ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Ф. Горюнов

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть I

Рекомендовано УМО „Ядерные физика и технологии"
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2008

УДК 517.958(075)
ББК 22.161.1я7
Г41

Горюнов А.Ф **Уравнения математической физики в примерах и задачах. Часть 1.**: Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2008. — 616 с.

Учебное пособие состоит из двух частей одинаковой структуры. Пособие ориентировано на специальности "Прикладная математика и информатика", "Физика", "Механика", "Физика атомного ядра и частиц" и др. и представляет собой сборник задач по уравнениям математической физики с примерами, демонстрирующими методику решения задач. Основой формирования сборника послужили модернизированные курсы уравнений математической физики, читаемые преподавателями кафедры "Прикладная математика"МИФИ. Темы первой части сборника: формирование математических моделей различных физических процессов и решение задач методом Фурье и методом интегральных преобразований. В отличие от аналогичных сборников в данном пособии рассматривается широкий спектр физических задач, построение аналитического решение которых осуществляется методами математической физики. При решении задач используется аппарат обобщенных функций.

Пособие адресовано студентам, изучающим математическую и теоретическую физику; некоторые фрагменты могут будут полезны аспирантам, инженерно-техническим и научным работникам, интересующимся данной областью знаний.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент проф., д-р физ.-мат. наук Д.Б. Рогозкин

© *Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008*

ISBN 978-5-7262-1046-9 (ч. 1)
ISBN 978-5-7262-1047-6

Оглавление

Предисловие 4
Обозначения 7

Глава 1. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
1.1. Модели механики 12
1.2. Модели теплопроводности и диффузии 50
1.3. Модели газо- и гидродинамики 85
1.4. Модели электродинамики 118
1.5. Ответы 157

Глава 2. МЕТОД ФУРЬЕ
2.1. Задачи для однородного уравнения 222
2.2. Задачи для неоднородного уравнения 262
2.3. Применение специальных функций 299
2.4. Ответы 367

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
3.1. Преобразование Фурье 459
3.2. Преобразование Лапласа 470
3.3. Преобразование Меллина 494
3.4. Преобразование Ганкеля 502
3.5. Ответы 509

Глава 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
4.1. Вывод интегральных уравнений 532
4.2. Решение интегральных уравнений 546
4.3. Ответы 590

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая физика занимается моделированием различных процессов, которое состоит в построении математической модели исследуемого явления и решения полученной задачи. Объектами изучения этого раздела математики являются дифференциальные уравнения с частными производными, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Цель пособия — научить владению математическим аппаратом, применяемым для аналитического решения задач, и умению критически оценивать эффективность различных методов в конкретной ситуации. Пособие состоит из двух частей и представляет собой сборник задач по математической физике. Задачи каждой главы распределены по группам; в начале группы приводится пример, в котором излагается методика решения задач. Задачи расположены по возрастанию сложности. В конце каждой главы помещены ответы к задачам, а в более трудных случаях даны указания или решения. В начале главы указана необходимая литература.

Первая часть содержит четыре главы. В первой главе проводится построение математических моделей различных физических процессов, или постановка задач, т.е. вывод системы условий, которые в рамках данной модели описывают физическое явление. Представлены задачи механики, теплопроводности, гидродинамики, фильтрации, электродинамики, квантовой механики и др. Для вывода уравнений механики привлекается вариационный метод. В задачах гидродинамики рассматриваются процес-

сы, происходящие в идеальных жидкостях (газах): потенциальное обтекание твердых тел, движение гравитационных волн в жидкости, распространение звука в газе и т.п. В задачах электродинамики требуется сформулировать условия для определения тока и потенциала в длинных линиях, плотности тока в тонких проводящих оболочках, электромагнитных полей в проводниках и диэлектриках, электромагнитных волн в идеальных и диэлектрических волноводах (световодах) и др. Даны примеры физических систем, поведение которых описывается квазилинейными и нелинейными уравнениями.

Вторая глава содержит задачи, решение которых осуществляется методом разделения переменных (методом Фурье). Основу метода составляет задача на собственные значения — источник формирования полной ортогональной системы функций (точнее, собственных функций), в виде ряда по которым представлено решение поставленной задачи.

Тема третьей главы — интегральные преобразования. Наряду с задачами, для решения которых применяются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля, предлагаются также упражнения, дающие представление об основных свойствах этих преобразований.

В четвертой главе рассмотрены задачи, приводящие к интегральным уравнениям, и даны упражнения, иллюстрирующие различные методы решения интегральных уравнений.

При решении задач активно используется аппарат обобщенных функций; их применение существенно упрощает технику решения многих задач.

Большая часть задач первых пяти глав данного сборника доступна студентам, имеющим физико-математическую подготовку по учебным программам вузов РФ. Количество доступных задач существенно возрастет для тех, кто прослушал курс уравнений математической физики. В сборнике содержатся также задачи, для решения которых требуется более высокий уровень знаний математики и определенный объем знаний теоретической физи-

ки: здесь автор руководствовался программой подготовки специалистов, которую реализует Московский инженерно-физический институт (государственный университет).

Пособие адресовано студентам, изучающим математическую физику, а также инженерам, желающим повысить квалификацию в этой области науки; некоторые главы могут быть полезны аспирантам.

Предлагаемый сборник задач базируется на модернизированных курсах уравнений математической физики, разработанных на кафедре Прикладной математики МИФИ. Основа этих курсов была заложена академиком А.В.Тихоновым. При написании данного пособия использованы известные сборники задач, учебники, а также другие источники, ссылки на которые приводятся в соответствующих местах текста.

Длительная работа над сборником задач вряд ли была бы успешной без постоянной поддержки коллег; особенно благодарен автор Н.А.Кудряшову, декану факультета "Высшая школа физики МИФИ-ФИАН"В.В.Шестакову, А.В.Кряневу, С.Г.Артышеву, М.Б. Сухареву, молодым сотрудникам кафедры М.А.Чмыхову, С.В.Чеснокову, О.Ю.Ефимовой, которые в не столь уж отдаленном прошлом были слушателями курса уравнений математической физики; М.А.Чмыхов явился фактическим и весьма квалифицированным редактором по созданию электронной версии пособия. Нельзя не выразить глубокую признательность студентам факультета ЭТФ и Высшей школы физиков МИФИ, труд которых способствовал улучшению качества сборника. Рукопись задачника набрана в редакторе LaTeX. Неоценимую помощь в освоении редактора оказал проф. В.Э.Вольфенгаген, которому автор выражает искреннюю признательность. Автор также сердечно благодарен И.А.Горюновой, внесшей большой вклад в компьютерное оформление рукописи.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$B(x,r)$ — шар, радиус которого r, центр — в точке $x \in \mathbf{R^n}$.
$B_r = B(0,r)$.
$\mathbf{e}_l = \mathbf{l}/l$.
$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел.
$\overline{z}$ — комплексно сопряженное число.
$erf\, x$ — интеграл вероятности.
$\mathcal{E}rf\, x = 1 - erf\, x$.
$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция.
$H_n(x)$ — полином Чебышева-Эрмита.
$H_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля 1-го рода порядка ν.
$H_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля 2-го рода порядка ν.
$I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя 1-рода порядка ν.
$J_\nu(z)$ — функция Бесселя 1-рода порядка ν.
$K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя 2-рода порядка ν (функция Макдональда).
$L_n^\alpha(x)$ — полином Чебышева-Лагерра.
$\mathbf{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел.
$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.
$P_n(x)$ — полином Лежандра.
$P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра.
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — полином Якоби.
$Q_n(x)$ —функция Лежандра второго рода
$\mathbf{R}^n$ — n-мерное Эвклидово пространство.
$\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$.

$S(x,r) = \partial B(x,r)$.

$S_r = S(0,r)$.

$|S_r|$ — площадь сферы S_r.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка пространства $\mathbf{R}^n$.

$Y_\nu(z)$ — функция Бесселя 2-рода порядка ν (функция Неймана).

$Y_n^m(\theta, \varphi)$ — фундаментальная сферическая функция.

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел.

$B(z, \zeta)$ — бета-функция Эйлера.

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

$\gamma(z, a)$ — неполная гамма-функция.

$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x. \end{cases}$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \qquad m, n \in \mathbf{N}.$

$\Phi(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Ω — область в $\mathbf{R}^n$.

$\overline{\Omega}$ — замыкание Ω.

$\partial\Omega = \overline{\Omega}/\Omega$.

A/B — дополнение множества B до множества A.

A^τ — транспонированная матрица A.

$[a]$ — целая часть вещественного числа a.

$(a,\, b) = \{x : a < x < b, \in \mathbf{R}\}$.

$[a,\, b] = \{x : a \leq x \leq b, \in \mathbf{R}\}$.

$\overline{mn}$, где $m < n$, — множество целых чисел $\{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$.

$\varphi_k(x) \overset{E}{\underset{k\to\infty}{\Longrightarrow}} \varphi(x)$ — равномерная сходимость на множестве E.

(f, g) — скалярное произведение, первый множитель $\overline{f}$.

$\| f \|$ — норма функции.

Σ_a — макроскопическое сечение поглощения нейтронов.

Σ_f — макроскопическое сечение деления нейтронов.

Σ_s — макроскопическое сечение рассеяния нейтронов.

$M_\odot$ — масса Солнца.

Глава 1

МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Предметом математической физики является разработка методов решения задач, возникающих при изучении явлений внешнего мира. Реальные процессы характеризуются величинами, зависящими, в общем случае, от координат и времени. Соотношения между этими величинам, записанные в математических терминах, составляют математическую модель данного процесса. Указанные соотношения являются следствием законов природы и представляют собой дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные уравнения, а также набор дополнительных условий (граничных, начальных), учитывающих специфические свойства системы. Математическая модель лишь приближенно отражает эволюцию системы, так как невозможно учесть все факторы, определяющие ее поведение. С другой стороны, построение более точных моделей, приводит к достаточно сложным задачам, решение которых получить не удается. Поэтому на первом этапе изучения явления используется сравнительно простая мо-

дель, в которой не учитываются факторы, мало влияющие на развитие явления. В ряде случаев это определяется ограничениями, которые накладываются на систему. Таким образом, формирование математической модели (или постановка задачи) зависит от того, какие аспекты конкретного явления считаются главными, а какие второстепенными. Упрощенная модель является стартовой: после решения задачи, анализа развития изучаемого явления и т.п. можно переходить к более сложным моделям.

В математической физике важную роль играют линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование многих физических процессов приводит к линейным уравнениям второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{1.1}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция, коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, аргумент $x{=}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного эвклидова пространства $\mathbf{R^n}$. В зависимости от структуры слагаемых, содержащих вторые производные, вводится понятие типа уравнения (1.1). С этой целью группе старших производных при фиксированном $x{=}x_0$ ставится в соответствие квадратичная форма

$$q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\lambda_i\lambda_j,$$

называемая характеристической. Существует невырожденное линейное преобразование $\mu{=}\mathcal{H}\,\lambda$ (т.е. $det\,\mathcal{H}{\neq}0$), посредством которого форма q преобразуется к виду

$$q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \alpha_i \mu_i^2, \qquad \alpha_i > 0, \;\; r+s \le n. \tag{1.2}$$

Согласно закону инерции квадратичных форм количество r положительных и количество s отрицательных членов в (1.2) не

зависят от выбранного преобразования, а определяются только конструкцией квадратичной формы. Таким образом, пара чисел (r, s) является инвариантом формы q, следовательно и уравнения (1.1) (в точке $x{=}x_0$), и определяет тип уравнения. Так как уравнение (1.1) не изменится при умножении на -1, то типы (r, s) и (s, r) одинаковы. Коэффициенты квадратичной формы q зависят от x, поэтому тип уравнения есть функция точки. Уравнение (1.1) принадлежит в точке x_0

гиперболическому типу, если $s{=}n$, $rs{\neq}0$,

параболическому типу, если $s{<}n$,

эллиптическому типу, если $r{=}n$, $s{=}0$.

Уравнение (1.1) принадлежит данному типу в области Ω, если оно обладает этим свойством в каждой точке области.

Представителем уравнения (1.1) является уравнение колебаний мембраны (волновое уравнение)

$$u_{tt} = div(T(x,y)\nabla u) + f, \quad \text{или} \quad u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy}) - (\nabla T \nabla u) = f,$$

характеристическая форма которого $q{=}\lambda_1{-}T\lambda_2^2{-}T\lambda_3^2$ имеет вид (1.2) при любых x, y, t. Так как $r{=}1$, $s{=}2$, $n{=}3$, то волновое уравнение принадлежит гиперболическому типу. Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение теплопроводности $u_t = div(k(x,y)\nabla u) + f$ принадлежит параболическому типу, а уравнение Пуассона (основное уравнение электростатики) $div(\varepsilon(x,y,z)\nabla u) = -4\pi\rho$ — эллиптическому типу.

При $n = 2$ уравнение (1.1) записывается в виде

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.3}$$

В соответствии с проведенной классификацией тип уравнения (1.3) определяется знаком $\Delta = b^2 - ac$:

$\Delta{>}0$ — гиперболический тип,

$\Delta{=}0$ — параболический тип,

$\Delta{<}0$ — эллиптический тип.

Литература к главе: [72], [5], [17], [71], [2].

1.1. Модели механики

Пример 1.1. Вывод малых продольных колебаний тонкого упругого стержня; постановка конкретной задачи. Стержень представляет собой одномерную систему, т.е. величины, его характеризующие, зависят от одной пространственной координаты x (ось $0x$ направлена по оси стержня), поперечные сечения стержня в процессе движения не изменяют форму и остаются перпендикулярными к оси $0x$.

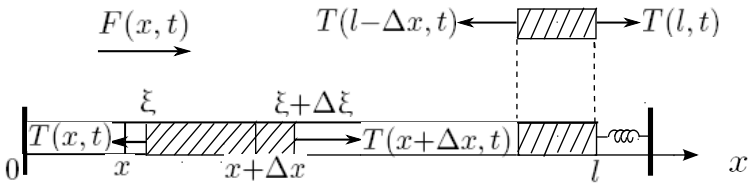

Рис. 1.1

Упругий стержень ($0<x<l$), конец $x=0$ которого закреплен жестко, а конец $x=l$ — упруго (посредством пружины с коэффициентом жесткости k), находится в статическом равновесии (рис1.1).

Построить модель малых продольных колебаний стержня под действием сил, объемная плотность которых $F(x,t)\,\mathbf{e}_x$, пренебрегая деформацией поперечных сечений.

Построение моделм включает в себя вывод уравнения продольных колебаний стержня, описание движения его концов (граничные, или краевые, условия), задание начального состояния стержня (начальные условия).

Пусть $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, $\rho(x)$ — объемная плотность, $E(x)$ — модуль Юнга материала стержня. Если $\xi=\xi(x,t)$ — координата сечения, имевшего в равновесном положении (при $t=0$) координату $x=\xi(x,0)$ (x — переменная Лагранжа), то отклонение этого сечения от положения равнове-

сия в момент времени $t{>}0$ равно $u(x,t){=}\xi(x,t)-x$. Если элемент Δx находится в равновесии, то по закону Гука

$$\frac{\Delta\xi-\Delta x}{\Delta x}=\frac{T(x+\Delta x,t)}{ES},$$

где T — натяжение. При $\Delta x\to 0$

$$T(x,t)=E(x)S(x)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-1\right)=E(x)S(x)u_x(x,t).$$

Полученная формула определяет натяжение $T(x,t)$ в момент $t{\geq}0$ в том сечении, начальная координата которого x. Условие малости колебаний: $|\Delta\xi-\Delta x|\ll|\Delta x|$, или в дифференциальной форме: $|u_x|\ll 1$.

Если элемент Δx движется, то по второму закону Ньютона

$$\rho S\Delta x u_{tt}=T(x+\Delta x,t)-T(x,t)+FS\Delta\xi. \tag{1.4}$$

Так как $T(x+\Delta x,t)-T(x,t)=T_x\Delta x$ (в силу формулы Лагранжа), $\xi_x=1+u_x\approx 1$, то при $\Delta x\to 0$ из соотношения (1.4) следует уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x)S(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)S(x). \tag{1.5}$$

По условию конец $x{=}0$ неподвижен, следовательно, отклонение сечения $x{=}0$ от положения равновесия $u(0,t){=}0$. Из уравнения движения элемента Δx, примыкающего к концу $x{=}l$,

$$-ESu_x(l-\Delta x,t)-ku(l,t)+FS\Delta\xi=\rho S\Delta x u_{tt}$$

при $\Delta x\to 0$ получается граничное условие $u_x(l,t)+hu(l,t)=0$, в котором $h{=}\frac{k}{E(l)S(l)}$. Формирование модели завершается заданием начальных условий: начальные смещения сечений стержня $u(x,0){=}0$, начальные скорости сечений $u_t(x,0){=}0$. Итак,

$$\begin{gathered}\rho Su_{tt}=\tfrac{\partial}{\partial x}(ES\tfrac{\partial u}{\partial x})+FS,\quad 0<x<l,\ 0<t,\\ u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0.\end{gathered}$$

В частном случае однородного цилиндрического стержня (величины ρ, E, S — постоянны) уравнение колебаний запишется в виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}.$$

Для вывода уравнений движения используется также вариационный метод, основанный на принципе наименьшего действия. Пусть W — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, $=W-U$ — функция Лагранжа механической системы. Действием называется функционал

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

где t_1 и t_2 — моменты времени, характеризующие реальные положения системы. Принцип наименьшего действия состоит в том, что из всех допустимых движений системы в течение времени от t_1 до t_2 реальным является то, при котором функционал Φ принимает экстремальное значение. В случае стержня кинетическая энергия

$$W = \int_0^l \frac{\rho S u_t^2}{2}\, dx,$$

а потенциальная энергия складывается из энергии деформации стержня и работы внешних сил, взятой со знаком минус. Энергия деформации внутреннего элемента Δx определяется работой силы

$$T = \frac{ES(\Delta\xi - \Delta x)}{\Delta x},$$

сообщающей этому элементу удлинение $\Delta\xi - \Delta x$,

$$\frac{ES}{\Delta x}\,\frac{(\Delta\xi - \Delta x)^2}{2} = \frac{ES}{2}\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta x} - 1\right)^2 \Delta x.$$

Следовательно, потенциальная энергия единицы длины стержня равна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{ES}{2}\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta x} - 1\right)^2 = \frac{ES u_x^2}{2}.$$

Таким образом,

$$U = \int_0^l \left(\frac{ESu_x^2}{2} - FSu \right) dx + \frac{ku^2(l,t)}{2}.$$

В результате

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{\rho S u_t^2}{2} - \frac{ESu_x^2}{2} + FSu \right) dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{ku^2(l,t)}{2}\, dt,$$

где $\Omega = \{ x, t : 0 < x < l,\ t_1 < t < t_2 \}$. Функции $u(x,t)$ удовлетворяют граничному условию $u(0,t)=0$ и имеют одинаковые значения при $t=t_1$ и при $t=t_2$. Если функционал достигает экстремума на функции $u(x,t)$, то необходимо равна нулю его вариация

$$\frac{d}{d\alpha}\Phi(u + \alpha\chi)\bigg|_\alpha =$$
$$= \int_\Omega (\rho S u_t \chi_t - ESu_x\chi_x + FS\,\chi) dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2} ku(l,t)\chi(l,t) dt = 0,$$

где $\chi(x,t_1)=\chi(x,t_2)=0$, $\chi(0,t)=0$. После интегрирования по частям необходимое условие экстремума преобразуется к виду

$$\int_\Omega [(ESu_x)_x - \rho S u_{tt} + FS]\,\chi\, dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2} [(ESu_x + ku)\,\chi]\big|_{x=l}\, dt = 0.$$

На более узком классе функций $\chi(x,t)$, удовлетворяющих дополнительному условию $\chi(l,t)=0$, второй интеграл обращается в нуль, а из первого по основной лемме вариационного исчисления вытекает уравнение колебаний

$$\rho S u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} ES \frac{\partial u}{\partial x} + FS.$$

Итак, первый интеграл равен нулю на исходном классе функций $\chi(x,t)$, а, значит, для этих же функций равен нулю второй интеграл. Тогда по основной лемме вариационного исчисления $ESu_x(l,t) + ku(l,t) = 0$. Остается учесть начальные условия.

1.1. В цилиндрическом стержне распространяются продольные (вдоль оси $0x$) волны. Пусть $\varepsilon(x,t)$ — деформация (относительное удлинение элемента стержня), $\sigma(x,t)$ — напряжение ($\sigma\, dS$ — сила, действующая вдоль оси $0x$ на элемент dS площади поперечного сечения), $\rho(x)$ — плотность стержня, x — переменная Лагранжа. Показать, что 1) функции $\varepsilon(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

где v — скорость элемента стержня; 2) при условии малости колебаний ($|\varepsilon| \ll 1$) из системы получается уравнение колебаний в форме: $\rho\, u_{tt} = (E u_x)_x$ (пример 1.1.); 3) если функции ε и σ связаны соотношением

$$\varepsilon = a(\sigma), \text{ где } a(0) = 0,\ a'(\sigma) > 0,\ a''(\sigma) \neq 0, \tag{1.6}$$

то движение стержня описывается нелинейной системой

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial a(\sigma)}{\partial t}; \end{aligned} \tag{1.7}$$

4) функция $\sigma(x,t)$ является решением нелинейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0; \tag{1.8}$$

5. при условиях (1.6) функция $\varepsilon(x,t)$ — решение уравнения [1]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\, b(\varepsilon)}{\partial x} = 0,$$

где $\sigma = b(\varepsilon)$ — обратная функция для $\varepsilon = a(\sigma)$.

[1] Источник задач 1.1.—1.7. — книга [47].

1.2. 1.Показать, что в случае однородного стержня функция $u(x,t)$ (см. предыдущую задачу) — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\,\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.9}$$

где $\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — функция, аргумент которой $\frac{\partial u}{\partial x}$. 2. Пусть

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\int\limits_0^y \sqrt{\sigma'(y)}\,dy + C. \tag{1.10}$$

Доказать, что гладкое решение любого из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.12}$$

где $h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — функция, аргумент которой $\frac{\partial u}{\partial x}$, является решением уравнения (1.9)

1.3. Торец x=0 однородного ($\rho = \rho_0$) полуограниченного стержня ($0<x<\infty$) движется по закону $\mu(t)$, где $\mu(t)$ — гладкая функция, равная нулю при $t\le 0$. Поставить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях, используя одно из уравнений 1.11 или 1.12.

1.4. На однородный стержень действует продольная сила, объемная плотность которой $F(t)$. Показать, что 1) функция $u(x,t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\,\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho}\,F(t); \tag{1.13}$$

2) гладкое решение любого из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t F(\tau)\,d\tau + C_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t F(\tau)\,d\tau + C_2$$

является решением уравнения (1.13)

1.5. На однородный полуограниченный стержень $0<x<\infty$) действует с момента $t=0$ равномерно распределенная продольная сила с объемной плотностью $F(t)$, торец $x=0$ движется по закону $\mu(t)$, где $\mu(t)$ — гладкая функция, равная нулю при $t\le 0$. Поставить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях, используя одно из уравнений п.2 предыдущей задачи.

1.6. Напряжение $\sigma(x,t)$ в одномерных нелинейных упругих средах с памятью является решением (в рамках некоторой модели) задачи для нелинейного интегрального уравнения

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)}\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}-k\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-k(t-\tau)}\frac{\partial\sigma(x,\tau)}{\partial x}d\tau=0, \quad (1.14)$$

$$k>0,\ \ \sigma(x,t)=0 \ \text{ при } \ x>0,\ \ t\le 0,$$

$$\sigma(0,t)=\mu(t),\ \ \mu(t)\in C^1,\ \ \mu(t)\ne 0 \ \text{ для } \ t\in(0;t_0).$$

Показать, что 1) уравнение (1.14) посредством дифференцирования сводится к дифференциальному уравнению

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)}\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}+k\int\limits_{0}^{\sigma}\sqrt{\rho a'(\sigma)}\,d\sigma=0;$$

2) если ввести функцию

$$w(x,t)=\int\limits_{0}^{\sigma}\sqrt{\rho a'(\sigma)}\,d\sigma \ \text{ и ей обратную } \ \sigma=\varphi(w),$$

то получится задача для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\varphi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}+kw=0,\quad x>0,$$

$$w(x,t)=0 \ \text{ при } \ x>0,\ t\le 0,$$

$$w(0,t)=\nu(t),\ \ \text{где } \ \nu(t)=\int\limits_{0}^{\mu(t)}\sqrt{\rho a'(\sigma)}\,d\sigma.$$

1.7. При условии малости колебаний функцию $w(x,t)$, введенную в предыдущей задаче, можно представить в виде

$$w(x,t) = A\sigma + B\sigma^2, \quad A > 0.$$

Показать, что в этом случае 1) уравнение (1.14) сводится к дифференциальному уравнению

$$A\frac{\partial \sigma}{\partial t} + B\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + C\sigma = 0, \quad C = kA;$$

2) если ввести функцию

$$f(x,t) = 2B\sigma(x,t)\, e^{-Cx}$$

и перейти к переменным

$$\xi = \frac{1}{C}(1 - e^{-Cx}), \quad \tau = t - Ax,$$

то задача для уравнения (1.14) преобразуется в задачу для квазилинейного уравнения

$$f\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < \frac{1}{C},$$
$$f(\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \xi < \frac{1}{C}, \quad \tau \geq \frac{A}{C}\ln(1 - C\xi),$$
$$f(0,t) = 2B\mu(t).$$

Построить модели 1.8 – 1.19 продольных колебаний цилиндрического стержня ($0<x<l$).

1.8. На стержень с жестко закрепленным концом $x=0$ действует сила $F(t)\,\mathbf{e}_x$, приложенная к свободному концу $x=l$; начальные условия нулевые.

1.9. Стержень, конец $x=l$ которого закреплен упруго, находится в статическом равновесии под действием силы $F_0\,\mathbf{e}_x$, приложенной к свободному концу $x=0$. В момент t=0 действие силы прекращается.

1.10. Неподвижный стержень расположен на гладкой горизонтальной поверхности. Конец $x{=}l$ стержня свободен, а конец $x{=}0$ закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, которая находится в сжатом состоянии вследствие уменьшения ее длины на величину u_0. В момент времени $t{=}0$ пружинка освобождается.

1.11. Один торец ($x{=}l$) неподвижного стержня закреплен жестко, а другой — упруго посредством пружинки с коэффициентом жесткости k. С момента $t{=}0$ на торец $x{=}0$ действует сила $F(t)\,\mathbf{e}_x$.

1.12. Неподвижный стержень, расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, получает импульс I в результате продольного удара в торец $x{=}0$.

1.13. Стержень расположен на гладкой горизонтальной поверхности. С момента $t{=}0$ на торцы $x{=}0$ и $x{=}l$ действуют силы $F_1(t)\,\mathbf{e}_x$ и $F_2(t)\,\mathbf{e}_x$ соответственно; начальные условия нулевые.

1.14. Стержень, расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, находится в равновесии под действием сил $F_0\,\mathbf{e}_x$ и $-F_0\,\mathbf{e}_x$, приложенных к торцам $x{=}0$ и $x{=}l$ соответственно. В момент времени $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.15. Боковая поверхность тонкого стержня получена вращением параболы $y^2 = 2p(l_0 + x)$, где $p > 0$, $l_0 > 0$, $0 < x < l$, относительно оси $0x$. Стержень находится в статическом равновесии под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_x$, приложенной к торцу $x{=}l$, торец $x{=}0$ жестко закреплен. В момент времени $t{=}0$ действие силы прекращается.

1.16. Стержень в форме усеченного конуса, высота которого l_0, а площадь основания S_0, (рис.1.2). находится в равновесном состоянии под действием постоянной силы F_0, приложенной к свободному торцу $x{=}0$, торец $x{=}l$ жестко закреплен. В момент времени $t{=}0$ действие силы прекращается.

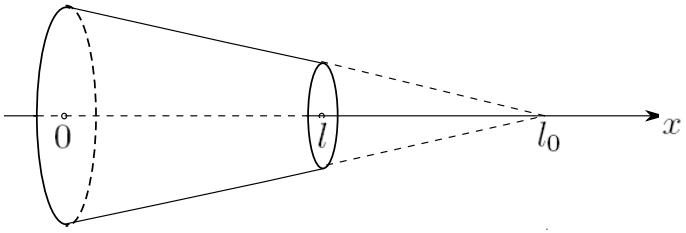

Рис. 1.2

1.17. Клиновидный стержень (рис.1.3) с закрепленным торцом $x{=}l$ находится в равновесии под действием постоянной силы $F_0\,\mathbf{e}_x$, приложенной к свободному торцу $x{=}0$, площадь которого S_0. В момент времени $t{=}0$ действие силы прекращается.

1.18. Торец $x{=}l$ клиновидного стержня (рис.1.3) закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, а торец $x{=}0$, площадь которого S_0, закреплен жестко. Незакрепленный конец пружинки движется (относительно начального положения) вдоль оси Ox по закону $\mu(t)$; начальные условия нулевые.

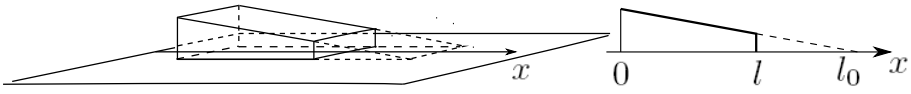

Рис. 1.3

1.19. Стержень имеет форму усеченной пирамиды. Торец $x{=}0$, площадь которого S_0, свободен, а торец $x{=}l$ закреплен упруго посредством пружинки с коэффициентом жесткости k. К свободному торцу приложена сила $F_0\mathbf{e}_x$, под действием которой стержень находится в равновесном состоянии. В момент времени $t{=}0$ сила перестает действовать.

1.20. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$) со свободными концами получает в момент времени $t=0$ заданные смещения и скорости вдоль оси Ox. Поставить задачу о движении стержня, применяя вариационный метод.

Пример 1.2. Поставить задачу для определения малых поперечных колебаний струны ($0<x<l$) с закрепленными концами под действием плоской системы поперечных сил, линейная плотность которых $F(x,t)\,\mathbf{e}_u$ (рис.1.4); начальные смещения и скорости точек струны заданы.

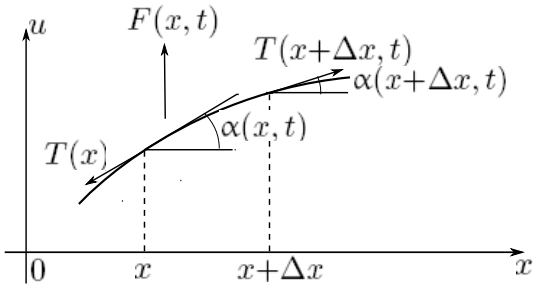

Рис. 1.4

Струной называется гибкая упругая нить. Пусть в положении равновесия струна занимает промежуток ($0<x<l$) оси $0x$, а ее точки движутся перпендикулярно к оси 0x в плоскости $x0u$, $u(x,t)$ — величина отклонения от положения равновесия точки x в момент времени t. Если $t=t_0$, то $u=u(x,t_0)$ — профиль струны в момент времени $t=t_0,$, если $x=x_0$, то $u=u(x_0,t)$ — закон движения точки x_0. Малыми называются колебания, при которых $|\alpha| \ll 1$ при любых x и t. Так как $\alpha \approx tg\alpha=u_x$, то условием малости является $|u_x| \ll 1$. Вследствие гибкости струны сила взаимодействия между ее элементами сводится к силе натяжения T, которая при любом t направлена по касательной к профилю $u=u(x,t)$ струны. Из свойства упругости струны следует, что изменение силы натяжения, действующей на элемент Δx,

пропорционально изменению длины элемента. Поскольку длина элемента Δx в момент времени t

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}dx \approx \Delta x,$$

то $T(x,t)=T(x)$. По 2-му закону Ньютона для элемента Δx

$$\rho\Delta x u_{tt} = T\sin\alpha|_{x+\Delta x} - T\sin\alpha|_x + F\Delta x,$$

где ρ — линейная плотность струны. Так как $\sin\alpha \approx tg\,\alpha = u_x$, то при $\Delta x \to 0$ получается уравнение колебаний струны

$$\rho(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}T(x)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,t). \tag{1.15}$$

Решение определено в области $\Omega=\{x,t:\ 0<x<l, 0<t\}$, на границе которой оно удовлетворяет условиям:

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ — краевые, или граничные, условия,

$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x)$ — начальные условия.

Если ρ и T — постоянные, то уравнение колебаний запишется в виде

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}.$$

1.21. Вывести уравнение колебаний струны вариационным методом.

Поставить задачи 1.22 – 1.30 для определения поперечных колебаний однородной струны.

1.22. Тяжелая горизонтальная струна $(-l<x<l)$ с закрепленными концами находится в равновесии под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_u$, где $\mathbf{e}_u=-\mathbf{e}_g$, приложенной в точке $x=0$, и силы тяжести; в момент $t=0$ действие силы F_0 прекращается.

1.23. Струна $(-l<x<l)$ с закрепленными концами получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара 1) молоточком с плоским основанием в форме круга радиуса $r_0<l$, центр которого совпадает с серединой струны; 2) в точку $x_0 \in (0,\, l)$.

1.24. Конец (x=0) струны ($0<x<l$) закреплен, а другой конец присоединен к кольцу K с пренебрежимо малой массой. Кольцо перемещается без трения по направляющей, параллельной оси $0u$ (струна со свободным концом). С момента $t = 0$ на кольцо действует сила $F(t)\,\mathbf{e}_u$; начальные условия нулевые.

1.25. Струна ($0<x<l$), один конец (x=0) которой закреплен, а другой свободен, находится в покое на оси $0x$. Свободный конец смещают параллельно оси $0u$ на величину u_0 и после установления равновесия отпускают без начальной скорости.

1.26. Конец (x=0) струны ($0<x<l$) жестко закреплен, а другой конец присоединен к кольцу, масса которого M. Кольцо перемещается без трения по направляющей, параллельной оси $0u$. В момент времени t=0 кольцо получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$.

1.27. Конец (x=0) струны ($0<x<l$) жестко закреплен, а другой конец присоединен к кольцу K, масса которого M. Кольцо перемещается без трения по направляющей, параллельной оси $0u$. Струна находится в статическом равновесии под действием сосредоточенной силы $F_0\mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x_0\in(0,l)$, и силы тяжести ($\mathbf{e}_g = -\mathbf{e}_u$). В момент времени t=0 действие сосредоточенной силы прекращается.

1.28. Конец полуограниченной струны ($0<x$) упруго закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k и может перемещаться без трения вдоль оси $0u$. С момента времени t=0 конец пружинки A движется (относительно начального положения) вдоль оси $0u$ по гармоническому закону с амплитудой u_0 и частотой ω; начальные условия нулевые.

1.29. На бесконечную струну ($-\infty<x<\infty$) с момента времени t=0 действует поперечная сила $F_0\mathbf{e}_u$, точка приложения которой перемещается по струне из положения x=0 со скоростью $v \ll a$; начальные условия нулевые.

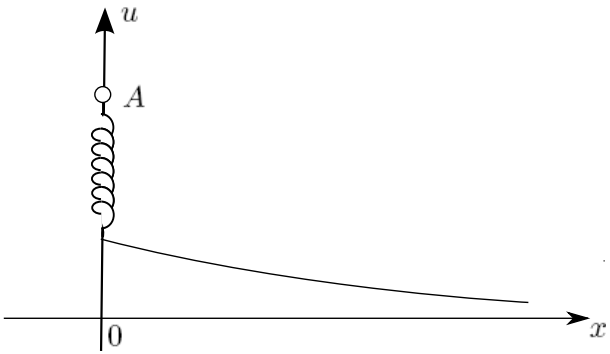

Рис. 1.5

1.30. Струна $(0<x<l)$ с закрепленными концами находится в среде, при движении в которой возникает сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности на единицу длины струны α задан). Начальные смещения и скорости точек струны известны.

1.31. На струну $(0<x<l)$, плотность которой $\rho(x)$, натяжение $T(x)$, действует поперечная упругая сила (коэффициент упругости на единицу длины $k(x)$), концы $x=0$ и $x=l$ закреплены посредством пружин с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 соответственно, начальные смещения точек струны $u_0(x)$, начальные скорости $u_1(x)$. Показать, что функция $u(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\rho(x)u_{tt} = \tfrac{\partial}{\partial x}T(x)\tfrac{\partial u}{\partial x} - k(x)u, \quad 0<x<l, \;\; 0<t, \\ T(0)u_x(0,t) - k_1u(0,t) = 0, \\ T(l)u_x(l,t) + k_2u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x).\end{gathered} \tag{1.16}$$

1.32. Однородный упругий круглый вал радиуса r_0 совершает малые крутильные колебания относительно оси $0x$, совпадающей с осью вала. Допуская, что в процессе движения поперечные се-

чения не изменяют форму и не смещаются вдоль оси $0x$, вывести уравнение для угла поворота $u(x,t)$ сечения с координатой x.

Поставить задачи 1.33 – 1.37 для определения малых крутильных колебаний однородного упругого вала.

1.33. Торец x=0 полуограниченного вала (0<x) совершает крутильные колебания, амплитуда которых u_0, частота ω; начальные условия нулевые.

1.34. Торец x=0 вала (0<x<l) закреплен жестко, а другой торец 1) свободен; 2) закреплен упруго посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k; начальные условия заданы.

1.35. Торец $x = 0$ вала (0<x<l) закреплен упруго посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k, а на торец x=l действует момент сил $M\,\mathbf{e}_x$; начальные условия нулевые.

1.36. Вал (0<x<l), торец x=l которого закреплен посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k, находится в равновесии под действием момента сил $M\,\mathbf{e}_x$, приложенного к торцу x= 0. В момент t=0 действие сил прекращается.

1.37. Вал (0<x<l) с закрепленными торцами находится в равновесии под действием момента сил $M_0\mathbf{e}_x$, приложенного в сечении $x_0 \in (0,l)$; в момент t=0 действие сил прекращается.

1.38. Торец x=0 полуограниченного вала (0<x) упруго закреплен посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k. Свободный конец пружины совершает крутильные колебания относительно оси вала, амплитуда которых u_0, частота ω; начальные условия нулевые.

Пример 1.3. Постановка задачи для определения малых поперечных колебаний однородной струны, свободно подвешенной в поле тяжести, точки которой в момент времени t=0 получают скорости $u_1(x)$ при нулевых начальных смещениях.

Колебания описываются уравнением (1.15), где $\rho(x)=\rho_0$, натяжение струны $T(x)=\rho_0 g\,(l-x)$. Так как конец $x=0$ струны закреплен, то его смещение $u(0,t)=0$. Уравнение движения концевого элемента $\rho_0\Delta x u_{tt} = -T(l-\Delta x)u_x(l-\Delta x,t)$ преобразуется при $\Delta x \to 0$ в граничное условие $\lim_{x\to l} T(x)u_x(x,t)=0$. Итак,

$$u_{tt} = g\frac{\partial}{\partial x}(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$$

$$u(0,t)=0, \;\; \lim_{x\to l}(l-x)u_x = 0,$$

$$u(x,0)=0, \;\; u_t(x,0)=u_1(x).$$

Точка $x=l$, в которой коэффициент при u_{xx} обращается в нуль, называется особой, так как уравнение может иметь решение, неограниченное в этой точке. Действительно, из уравнения, записанного в форме

$$u_{xx} = \tfrac{u_{tt}+gu_x}{g(l-x)}$$

следует возможность существования решения $u(x,t)$ с неограниченной производной $u_{xx}(x,t)$; но тогда не исключено, что $u_x(x,t)$ и, может быть, $u(x,t)$ неограничены при $x=l$ (см. задачи 1.40 и 1.48). В соответствии с физическим смыслом $|u(l,t)|<\infty$, что является другой формой граничного условия при $x=l$.

Построить модели 1.39 – 1.49 поперечных колебаний струны $(0<x<l)$ **или продольных колебаний (в одномерном приближении) стержня** $(0<x<l)$**.**

1.39. Струна, подвешенная в поле тяжести, находится в равновесии под действием силы $F_0\mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x=l/2$. В момент $t=0$ действие силы прекращается.

1.40. Струна, подвешенная в поле тяжести, находится в статическом равновесии под действием поперечных сил, линейная плотность которых $p_0\mathbf{e}_u$, и сил тяжести. В момент времени $t=0$ действие поперечных сил прекращается.

1.41. Струна, подвешенная в поле тяжести, вращается около оси $0x$ с постоянной угловой скоростью ω; начальные смещения и скорости точек струны заданы.

1.42. Струна $(0 < x < l)$, плотность которой $\rho(x)$ — заданная функция x, при этом $\rho(l) \neq 0$, подвешена в поле тяжести. Поставить задачу о движении струны, если начальные отклонения и начальные скорости точек струны заданы функциями $u_0(x)$ и $u_1(x)$ соответственно.

1.43. Стержень, имеющий форму прямого кругового конуса высоты l, основание которого жестко связано с горизонтальной плитой, находится в поле тяжести; ось $0x$ направлена по оси конуса, $\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_g$. С момента $t = 0$ плита движется вдоль оси $0x$ постоянной скоростью v_0. В качестве переменной Лагранжа взять положение равновесия сечения в поле тяжести.

1.44. Конический стержень, связанный основанием с горизонтальной плитой (см. предыдущую задачу) свободно падает под действием силы тяжести. В момент t=0 пластина мгновенно останавливается, скорость стержня в этот момент равна v_0.

1.45. Стержень в форме клина находится на гладкой горизонтальной поверхности (рис.1.6). С момента времени t=0 на торец x=0, площадь которого S_0, действует продольная сила $F(t)\,\mathbf{e}_u$.

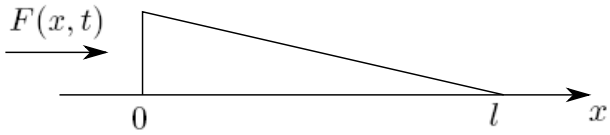

Рис. 1.6

1.46. Стержень в форме клина, параллельные грани которого — равнобедренные треугольники, прикреплен основанием к горизонтальной плите и находится под ней в состоянии покоя; ось $0x$

направлена по оси клина, $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_g$. В момент $t{=}0$ стержень отрывается от плиты и свободно падает под действием силы тяжести. В качестве переменной Лагранжа взять равновесное положение сечения недеформированного стержня.

1.47. Струна $(0{<}x{<}l)$ вращается в горизонтальной плоскости около точки $x{=}0$ с угловой скоростью ω; начальные смещения и скорости точек струны заданы.

1.48. Струна $(0{<}x{<}l)$, линейная плотность которой $\rho_0(1-\frac{x}{l})^{-\frac{1}{2}}$, подвешена в поле тяжести. Концу $x{=}l$ сообщают поперечное отклонение u_0 и отпускают без начальной скорости.

1.49. Струна $(0{<}x{<}l)$, линейная плотность которой

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 < x < l_1, \\ \rho_2, & l_1 < x < l, \end{cases}$$

подвешена в поле тяжести. Под действием силы точка $x{=}l_1$ получает поперечное отклонение u_0; после того, как установилось равновесие, действие силы прекращается.

Пример 1.4. Торец $x{=}0$ однородного стержня $(0{<}x{<}l)$ закреплен, а на свободном торце $x{=}l$ находится тонкая пластинка, масса которой m. Поставить задачу для определения продольных колебаний стержня; начальные условия заданы.

Постановка задачи имеет две эквивалентные формы.
1. Задача ставится для неоднородного стержня (масса m — часть стержня) со свободным концом $x{=}l$:

$$\begin{gathered} [\,\rho_0 + \tfrac{m}{S_0}\delta(x-l)\,]\,u_{tt} = E_0 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t, \qquad (1.17) \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \end{gathered}$$

2. Если считать стержень однородным, то граничное условие при

$x{=}l$ представляет собой уравнение движения массы m :

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t \\ u(0,t) = 0, \quad m u_{tt}(l,t) = -E_0 S_0 u_x(l,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Формальный переход от постановки 1 к постановке 2 можно осуществить на основании правила дифференцирования (10.25). Согласно этому правилу уравнение (1.17) определяет скачок производной в точке $x{=}l$

$$[\, u_x \,]_l = \frac{m}{E_0 S_0} u_{tt}(l,t)$$

откуда следует, что

$$u_x(l-0,t) = -\frac{m}{E_0 S_0} u_{tt}(l-0,t),$$

т.е. граничное условие при $x{=}l$ в постановке 2. Поскольку обобщенная функция $\delta(x-l) = 0$ при $x{<}l$, то уравнение (1.17) принимает форму $u_{tt}{=}a^2 u_{xx}$. Обратный переход достигается введением функции

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t), \;\; 0 \le x \le l, \;\; \tilde{u}_x(x,t) = \begin{cases} u_x(x,t) & , \;\; 0 \le x < l, \\ 0 & , \;\; x = l. \end{cases}$$

Так как

$$[\, \tilde{u}_x \,]_l = \tilde{u}_x(l,t) - \tilde{u}_x(l-0,t) = \frac{m}{E_0 S_0} u_{tt}(l,t), \qquad \tilde{u}_{tt} = u_{tt},$$

то согласно формуле (10.25)

$$\tilde{u}_{xx} = \{\tilde{u}_{xx}\} + [\, u_x \,]_l \, \delta(x-l) = u_{xx} + \frac{m}{E_0 S_0} u_{tt}(l,t) \, \delta(x-l).$$

Подстановка u_{tt} и u_{xx} в уравнение (1.18) преобразует его в уравнение (1.17) для функции $\tilde{u}(x,t)$, которая при $0{<}x{<}l$ совпадает с $u(x,t)$.

Замечание. Роль постановки 1 проявляется при решении задачи методом Фурье: коэффициент $\rho_0 + \frac{m}{S_0}\delta(x-l)$ при u_{tt} представляет собой вес, с которым ортогональны собственные функции.

Поставить задачи 1.50 – 1.53 для определения малых продольных колебаний однородного упругого цилиндрического стержня $(0<x<l)$**.**

1.50. На свободном торце $(x=l)$ стержня имеется сосредоточенная масса m, а другой торец жестко закреплен. Стержень движется под действием продольной силы $F(t)\,\mathbf{e}_x$, приложенной к торцу $x=l$; начальные условия нулевые.

1.51. Тело, масса которого m, движущееся со скоростью v в положительном направлении оси $0x$, ударяет в торец $x=0$ стержня, покоящегося на гладкой горизонтальной поверхности, и движется вместе со стержнем; размерами тела пренебречь.

1.52. Торец $x=0$ стержня упруго закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, а свободный торец с сосредоточенной массой m смещен на расстояние u_0 из начального положения под действием постоянной продольной силы; стержень находится в состоянии статического равновесия. В момент $t=0$ действие силы прекращается.

1.53. В сечении $x=x_0\in(0,\,l)$ стержня имеется тонкая пластинка, масса которой m; торец $x=0$ закреплен, а торец $x=l$ начинает двигаться с момента $t=0$ вдоль оси $0x$ по закону $\mu(t)$; начальные смещения и скорости сечений стержня равны нулю.

Поставить задачи 1.54 – 1.56 для определения малых поперечных колебаний однородной струны.

1.54. В точке $x=0$ струны $(-l<x<l)$ с закрепленными концами имеется шарик, масса которого m. В момент времени $t=0$ струна получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара по шарику; до удара смещения и скорости этой механической системы были равны нулю.

1.55. В точке $x{=}0$ тяжелой струны $(-l{<}x{<}l)$ с закрепленными концами имеется шарик, масса которого m; струна расположена на горизонтальной подставке в поле тяжести $(\mathbf{e}_g{=}-\mathbf{e}_u)$ и находится в состоянии статического равновесия. В момент времени $t{=}0$ подставку убирают.

1.56. Струна $(0{<}x{<}l)$ с шариком на конце $x{=}l$ подвешена в поле тяжести в точке $x{=}0$. Шарик, масса которого m, смещают в горизонтальном направлении на расстояние u_0 и отпускают без начальной скорости.

Построить модели 1.57 – 1.59 крутильных колебаний вала $(0{<}x{<}l)$**.**

1.57. На свободном торце $x{=}0$ вала имеется диск с осевым моментом инерции K_0. С момента времени $t{=}0$ торец $x{=}l$ совершает крутильные гармонические колебания с амплитудой u_0 и частотой ω; начальные условия нулевые.

1.58. Торец $x{=}0$ вала закреплен, а на свободном торце имеется диск с осевым моментом инерции K_0. Вал находится в равновесии под действием постоянного момента сил $M_0\mathbf{e}_x$, приложенного к диску. В момент $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.59. Торец $x{=}l$ вала закреплен посредством спиральной пружины с коэффициентом упругости k, а торец $x{=}0$ свободен; в сечении $x{=}x_0 \in (0,\, l)$ имеется тонкий диск с осевым моментом инерции K_0. Вал приводится в движение моментом сил $M(t)\,\mathbf{e}_x$, приложенным к торцу $x{=}0$.

Построить математические модели механических систем 1.60 – 1.62, совершающих малые колебания.

1.60. Стержень $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами имеет характеристики ρ_1, E_1, S_0 при $0{<}x{<}x_0$, и ρ_2, E_2, S_0 при $x_0{<}x{<}l$; начальные условия заданы.

1.61. Неоднородная струна ($0<x<l$), плотность которой ρ_1 при $0<x<x_0$ и ρ_2 при $x_0<x<l$, закреплена в точке $x=l$. Струна движется под действием поперечной силой $F(t)\,\mathbf{e}_u$, приложенной с момента $t=0$ к свободному концу $x=0$ (см.задачу 1.24); начальные условия нулевые.

1.62. Неоднородный круглый вал ($0<x<l$), характеристики которого $G_1,\ J_1,\ K_1$ при $0<x<x_0$, и $G_2,\ J_2,\ K_2$ при $x_0<x<l$, находится в статическом равновесии. Торец $x=0$ закреплен, а свободный торец повернут на угол u_0 под действием постоянного момента сил, направленного по оси $0x$. В момент $t=0$ действие сил прекращается.

1.63. Два стержня, один из которых имеет длину l, а другой полуограничен, расположены на оси $0x$. Их площади поперечных сечений, плотности и модули Юнга равны S_1, ρ_1, E_1 и S_2, ρ_2, E_2 соответственно. Первый стержень движется вдоль оси $0x$ со скоростью $v>0$, а второй неподвижен и занимает положительную часть оси $0x$. Поставить задачу для определения движения стержней в течение времени τ, пока длится соударение.

1.64. Два стержня, длины которых l, площади поперечных сечений S_1 и S_2, физические характеристики ρ_1, E_1 и ρ_2, E_2, расположены на оси $0x$ и движутся вдоль нее с положительными скоростями v_1 и v_2, где $v_1>v_2$. Поставить задачу для определения движения стержней в течение времени τ, пока длится соударение.

Пример 1.5. Получить уравнение малых поперечных колебаний мембраны, которая занимает в положении статического равновесия область Ω плоскости $x0y$.

Мембрана представляет собой гибкую упругую пленку, отклонения $u(x,y,t)$ точек которой от положения равновесия происходят в направлении, перпендикулярном плоскости $x0y$. Из определения мембраны следует, что сила T взаимодействия между соседними элементами, разделенными гладкой линией Γ, лежит в касательной плоскости к поверхности мембраны и направлена

по нормали к Γ. Пусть $\rho(x,y)$ — поверхностная плотность мембраны, $T(x,y)$ — натяжение в положении равновесия, $F(x,y,t)$ — внешняя поперечная сила, действующая на единицу площади мембраны. Малыми считаются колебания, при которых нормаль к поверхности мембраны составляет малый угол с осью $0u$, т.е. $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$. Отсюда следует, что упругая сила натяжения T, изменение которой пропорционально изменению площади элемента $\Delta S \subset \Omega$ мембраны, не зависит от времени, так как площадь в момент времени t равна

$$\int\limits_{\Delta S} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \approx \int\limits_{\Delta S} dx\, dy = \Delta S.$$

Для вывода уравнения колебаний мембраны можно применить вариационный метод. Кинетическая энергия мембраны

$$W = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho u_t^2}{2}\, ds.$$

Внутренняя потенциальная энергия элемента $\Delta S \subset \Omega$ равна работе сил натяжения

$$T(\Delta S\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - \Delta S) \approx T\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\Delta S,$$

следовательно, потенциальная энергия мембраны

$$U = \int\limits_{\Omega} \left(T\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} - Fu \right) ds.$$

Функция $u(x,y,t)$, на которой функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\rho u_t^2}{2} - T\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + Fu \right) ds\, dt$$

достигает экстремума, удовлетворяет уравнению Остроградского

$$\rho(x,y)u_{tt} = div(T(x,y)\,\nabla u) + F(x,y,t);$$

это и есть уравнение колебаний мембраны.

Если $\rho{=}\rho_0$, $T{=}T_0$, то уравнение примет вид

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \quad f = \frac{F}{\rho_0}.$$

1.65. Получить граничные условия для мембраны, край которой 1) перемещается из начального положения вдоль оси $0u$ по закону $\mu(P,t)$; 2) движется под действием силы, линейная плотность которой $F(P,t)\mathbf{e}_u$; 3) закреплен упруго (коэффициент упругости $k(P,t)$); 4) испытывает сопротивление, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности $\alpha(P,t)$).

1.66. Вывести уравнение малых поперечных колебаний мембраны на основе второго закона Ньютона (пример 1.2).

Построить модели 1.67 – 1.74 колебаний однородной мембраны.

1.67. Мембрана со свободным краем (см.задачу 1.24.) занимает ограниченную область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ на плоскости xOy. На мембрану действует поперечная сила, распределенная по краю с линейной плотностью $F(x,y,t)\mathbf{e}_u$; начальные условия нулевые.

1.68. Мембрана с упруго закрепленным краем (см.задачу 1.28.) занимает ограниченную область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ на плоскости xOy. Начальные отклонения $u(x,y)$ и скорости $u_1(x,y)$ точек мембраны заданы.

1.69. На единицу площади мембраны ($0{<}x{<}l_1$, $0{<}y{<}l_2$), две стороны ($x{=}0$, $x{=}l_1$) которой закреплены, а две другие свободны (см. задачу 1.24.), действует сила $F_0 \sin\omega t\,\mathbf{e}_u$; начальные условия нулевые.

1.70. На прямоугольную мембрану ($-l_1<x<l_1$, $-l_2<y<l_2$) с закрепленным краем действует поперечная сила, распределенная с линейной плотностью $F(x,t)\,\mathbf{e}_u$ вдоль линии $y=0$; начальные смещения и скорости точек мембраны равны нулю.

1.71. На прямоугольную мембрану ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$) с закрепленным краем действует поперечная сила $F(t)\,\mathbf{e}_u$, равномерно распределенная вдоль диагонали $y=\frac{l_2}{l_1}x$; начальные смещения и скорости точек мембраны равны нулю.

1.72. На круглую мембрану ($r=\sqrt{x^2+y^2}<r_0$) с закрепленным краем действует сила $F_0\mathbf{e}_u$, равномерно распределенная по диаметру ($y=0$); начальные условия нулевые.

1.73. Круглая мембрана с закрепленным краем, радиус которой r_0, получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара молоточком, основание которого — круг радиуса $r_1<r_0$; при ударе центры мембраны и молоточка совпадают, смещения и скорости точек мембраны до удара равны нулю.

1.74. Мембрана с закрепленным краем, радиус которой r_0, получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате удара в точку $(r_1<r_0, \varphi_1)$; смещения и скорости точек мембраны до удара равны нулю.

1.75. Построить модель движения мембраны, на которую действуют 1) упругие силы, пропорциональные отклонению точек мембраны от положения равновесия (коэффициент пропорциональности $k(x,y)$); 2) силы сопротивления, пропорциональные скорости точек мембраны (коэффициент $\alpha(x,y)$).

Поставить задачи 1.76 – 1.82 для определения равновесной формы однородной мембраны.

1.76. Прямоугольная мембрана ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$), две стороны которой ($x=\pm l_1$) закреплены упруго (коэффициент упругости k), а две другие — жестко, находится в состоянии статического равновесия под действием поперечной силы, приложенной вдоль линии $x=0$ с линейной плотностью $p(y)\mathbf{e}_u$.

1.77. Прямоугольная мембрана ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$) с закрепленным краем находится в поле тяжести; плоскость мембраны перпендикулярна ускорению свободного падения ($\mathbf{e}_u=\mathbf{e}_g$), масса единицы площади мембраны

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & 0 < x < x_0, \\ \rho_2, & x_0 < x < l_1. \end{cases}$$

1.78. На круглую мембрану ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$) с закрепленным краем действует поперечная сила, распределенная вдоль окружности ($r=r_1<r_0$) с линейной плотностью $p(\varphi)=p_0 \sin\varphi\, \mathbf{e}_u$.

1.79. Мембрана в форме полукруга ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$) закреплена по краю; вдоль линии $\{r, \varphi : r<r_0,\ \varphi=\pi/2\}$ действует сила, линейная плотность которой $p(y)\mathbf{e}_u$.

1.80. Мембрана имеет форму полукруга ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$). Часть ее границы $\{r, \varphi : 0<r_0,\ 0<\varphi<\pi\}$ закреплена, а остальная часть свободна. На свободную часть действует равномерно распределенная сила $F_0\mathbf{e}_u$.

1.81. Треугольная мембрана ($0<x<l, 0<y<l-x$) с закрепленным краем находится в состоянии статического равновесия под действием силы, поверхностная плотность которой постоянна и равна $p\,\mathbf{e}_u$.

1.82. Две стороны $x=0$ и $y=0$ треугольный мембраны (см. задачу 1.81.) закреплены, а на третью (свободную) сторону (см. задачу 1.24.) действует сила, линейная плотность которой $p\,\mathbf{e}_u$.

1.83. Кольцо, радиус которого r_0, находится в поле тяжести и расположено в горизонтальной плоскости. Кольцо изгибают так, что каждая точка получает отклонение $f(\varphi)$ в направлении $\mathbf{e}_g$. Поставить задачу для определения равновесной формы гибкой упругой пленки, натянутой на кольцо.

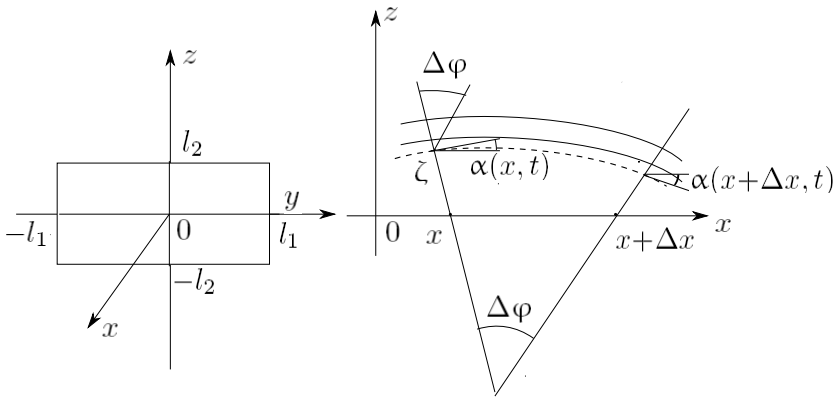

Рис. 1.7

Пример 1.6. Вывод уравнения малых поперечных колебаний тонкого упругого стержня с прямоугольным поперечным сечением, площадь которого зависит от x (рис.1.7).

При малых углах α (рис.1.7) точки стержня перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости $x0z$ (ось $0x$ направлена по оси недеформированного стержня), поперечные сечения поворачиваются без изменения формы, длина элемента Δx оси остается постоянной. Пусть уравнение $u{=}u(x,t)$ задает форму оси в момент времени $t{\geq}0$, тогда угол между сечениями x и Δx

$$\Delta\varphi = \alpha(x,t) - \alpha(x+\Delta x,t) \approx tg\,\alpha|_x - tg\,\alpha|_{x+\Delta x} = -u_{xx}\Delta x.$$

Удлинение элемента Δx нити, отстоящей на расстояние ζ от оси, равно $\zeta\Delta\varphi$ и обусловлено упругой силой

$$\frac{E\Delta S\,\zeta\,\Delta\varphi}{\Delta x}, \tag{1.19}$$

работа которой

$$E\frac{\Delta S}{\Delta x}\frac{(\zeta\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{E\Delta S\zeta^2 u_{xx}^2}{2}\Delta x.$$

Потенциальная энергия деформации элемента Δx стержня

$$\frac{Eu_{xx}^2}{2}\int\limits_S \zeta^2\, ds = \frac{EJ}{2}u_{xx}^2\Delta x,$$

где J — момент поперечного сечения относительно оси $0y$. Приведенный вывод справедлив при $|\alpha| \ll 1,\ |\zeta\Delta\varphi| \ll \Delta x$, т.е. $|u_x| \ll 1,\ l_2|u_{xx}| \ll 1$. Если $F(x,t)$ — объемная плотность внешних сил, направленных по оси $0z$, то действие

$$\Phi(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(\frac{\rho S u_t^2}{2} - \frac{EJu_{xx}^2}{2} + FSu\right) dx\, dt. \tag{1.20}$$

Необходимым условием экстремума функционала $\Phi(u)$ является уравнение Остроградского ([75])

$$S(x)\rho(x)u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x)F(x,t), \tag{1.21}$$

которому должна удовлетворять функция $u(x,t)$. Так как длина стержня $l \gg l_2$ (тонкий стержень), то функция $u(x,t)$ определяет форму стержня в процессе колебаний. Уравнение поперечных колебаний однородного цилиндрического стержня с прямоугольным поперечным сечением запишется в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = f, \quad a^2 = \frac{EJ}{\rho S},\ \ f = \frac{F}{\rho}.$$

Построить модели 1.84 – 1.97 малых поперечных колебаний стержня $(0<x<l)$ **с прямоугольным поперечным сечением.**

1.84. Торцы цилиндрического стержня жестко закреплены, начальные условия заданы.

1.85. Торец $x{=}0$ цилиндрического стержня закреплен жестко, а торец $x{=}l$ 1. свободен; 2. закреплен шарнирно (нет сопротивления изгибу). Начальные условия заданы.

1.86. Цилиндрический стержень, торец $x{=}0$ которого жестко закреплен, а торец $x{=}l$ свободен, находится в поле тяжести и поддерживается в горизонтальном положении плоской подставкой. В момент $t{=}0$ подставку убирают.

1.87. На цилиндрический стержень, торцы которого жестко закреплены, действует сосредоточенная поперечная сила $F_0(t)\,\eta(t)$, приложенная в сечении $x{=}x_0{\in}(0,l)$ и направленная по оси $0z$; начальные условия нулевые.

1.88. Стержень имеет форму усеченной пирамиды; торец $x{=}0$ жестко закреплен, а торец $x{=}l$ свободен (длина неусеченной пирамиды l_0), начальные условия заданы.

1.89. На цилиндрический стержень с жестко закрепленным торцом $x{=}0$ действует 1) сосредоточенная сила $F(t)\,\mathbf{e}_z$, приложенная к свободному торцу $x{=}l$; 2) сосредоточенный момент сил $M(t)\,\mathbf{e}_y$, приложенный к шарнирно закрепленному торцу $x{=}l$. В начальный момент времени стержень находился в состоянии покоя и равновесия.

1.90. На цилиндрический стержень с шарнирно закрепленными торцами действует сосредоточенный момент сил $M_0(t)\,\eta(t)\,\mathbf{e}_y$, приложенный в сечении $x{=}x_0{\in}(0,l)$; начальные условия нулевые.

1.91. Цилиндрический стержень с жестко закрепленным торцом $x{=}l$ находится в статическом равновесии под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_z$, приложенной к свободному торцу $x{=}0$. С момента времени $t{=}0$ действие силы прекращается.

1.92. Цилиндрический стержень с жестко закрепленным торцом $x{=}l$ находится в состоянии статического равновесия под действием постоянного момента сил $M_0\,\mathbf{e}_y$, приложенного к свободному торцу $x{=}0$. С момента $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.93. Цилиндрический стержень, торцы которого шарнирно закреплены, находится в состоянии статического равновесия под действием постоянного момента сил $M_0\mathbf{e}_y$, приложенного к торцу $x{=}0$. С момента времени $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.94. В сечении $x{=}x_0{\in}(0,l)$ цилиндрического стержня с жестко закрепленными торцами имеется тонкая прокладка, масса которой m; начальные условия заданы.

1.95. Стержень в форме усеченной пирамиды, полная длина которой l_0 находится в состоянии статического равновесия под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_z$, приложенной к свободному торцу $x{=}l$, а торец $x{=}0$ закреплен. С момента времени $t{=}0$ действие силы прекращается.

1.96. Стержень клиновидной формы (рис.1.3), торцы которого шарнирно закреплены, находится в состоянии статического равновесия под действием постоянного момента сил $M_0\mathbf{e}_y$, приложенного к торцу $x{=}0$. С момента $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.97. Торец $x{=}0$ стержня, имеющего форму клина (рис.1.6), жестко закреплен, а другой торец свободен. Стержень находится в состоянии статического равновесии под действием внешнего поля сил, объемная плотность которых постоянна и равна $p_0\mathbf{e}_z$. В момент времени $t{=}0$ действие сил прекращается.

1.98. Однородный упругий стержень $(0{<}x{<}l)$ с прямоугольным поперечным сечением изогнут в плоскости $x0z$ (рис.1.7). Получить уравнение равновесия стержня в форме

$$J(x)E(x)u_{xx} = -M(x),$$

где $M(x)$ — момент сил, действующих на часть $[\,0,\,x\,]$ стержня (положительным считается момент, направленный по $\mathbf{e}_y$).

1.99. Малые колебания тонкой упругой пластинки, занимающей в положении равновесия область Ω на плоскости $x0y$, описываются уравнением (см.[43])

$$u_{tt} + a^2\Delta^2 u = \frac{F}{\rho h},$$

где $a^2 = D/\rho h$, $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$, ρ — плотность, σ — коэффициент Пуассона, — модуль Юнга материала пластинки, h — ее толщина, F — поперечная сила, действующая на единицу площади пластинки. Если край $\partial\Omega$ пластинки жестко закреплен, то

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Поставить задачу для определения поперечных колебаний пластинки с жестко закрепленным краем, если в результате поперечного удара в точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ пластинка получает импульс $I\mathbf{e}_u$. До удара смещения и скорости точек пластинки равны нулю.

1.100. Поставить задачу для определения равновесной формы прямоугольной пластинки ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) с закрепленным краем, на единицу площади которой действует сила $F(x,y)\,\mathbf{e}_u$.

1.101. Условия на границе круглой свободно опертой пластинки (аналог шарнирного закрепления) имеют вид (см.[43])

$$u|_{r=r_0} = 0, \qquad \left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=r_0} = 0.$$

Поставить задачу для определения колебаний пластинки, свободно опертой по краю, под действием поперечной силы $F_0(t)$, приложенной в центре пластинки, при нулевых начальных условиях.

1.102. На единицу площади свободно опертой прямоугольной пластинки ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) действует сила $F(x,y)\,\mathbf{e}_u$. Поставить задачу для определения равновесной формы пластинки.

Пример 1.7. Вывод дифференциальных уравнений Буссинеска и Кортевега-де-Фриза (КдФ). В одномерных колебательных системах, которые моделируются линейными дифференциальными уравнениями

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0,$$

могут распространяться волны вида

$$u_1(x,t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)}, \quad u_2(x,t) = A_2 e^{i(kx+\omega t)}.$$

Действительно, подстановка $u_1(x,t)$ в первое уравнение превращает его в тождество, если $\omega{=}ka$. Отсюда следует, что скорость волны $\frac{dx}{dt}{=}\frac{\omega}{k}$, равная в данном случае a, не зависит от ее длины $\lambda{=}2\pi/k$. Поэтому волновой пакет, составленный из волн разной длины, перемещается без изменения формы. Аналогичный анализ второго уравнения показывает, что $u_1(x,t)$ — его решение при $\omega{=}k^2a$, а скорость распространения волны $\omega/k{=}ka$ зависит от ее длины. Это явление называется дисперсией. При движении волнового пакета в диспергирующей среде происходит его расплывние. В обоих случаях скорость волны не зависит от ее амплитуды.

Волновой оператор $\partial^2/\partial t^2 - a^2\,\partial^2/\partial x^2$ раскладывается на множители $(\partial/\partial t + a\,\partial/\partial x)(\partial/\partial t - a\,\partial/\partial x)$. Каждый из них определяет линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка; решениями уравнений при условии $\omega{=}ka$ являются функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ соответственно. В частности, уравнение $u_t + a\,u_x = 0$ описывает волны без дисперсии, распространяющиеся только в одном направлении с постоянной скоростью a. В реальных средах скорость a зависит от u. Нелинейное уравнение $u_t + u\,u_x = 0$, моделирующее такую зависимость, описывает волны, скорость которых растет с амплитудой. При движении волнового пакета, сформированного из волн с различными амплитудами, возрастает крутизна его передней части (рис.8.7). В результате решение становится неоднозначным и теряет физический смысл. Подобная деформация волнового пакета ослабляется дисперсией. Эти

факторы — рост крутизны и ее уменьшение из-за расплывания — проявляются в том, что в нелинейных диспергирующих средах могут распространяться уединенные волны постоянной формы (солитоны).

Моделью подобной среды может служить одномерная решетка с жестко закрепленными концами $x_0{=}0$, $x_N{=}Nl$, в узлах $x_j{=}jl$, $j{=}1,2,\dots,N-1$,, которой расположены точечные частицы, связанные одна с другой и с неподвижными концами решетки одинаковыми пружинками. Отклонение $q_j(t)$ от положения равновесия j-й частицы удовлетворяет уравнению

$$q_j'' = f(q_{j+1}-q_j) - f(q_j - q_{j-1}),$$

где $f(q)$ — сила пружинки. При $l \ll L{=}Nl$, где величина L фиксирована, можно перейти к непрерывным смещениям $q(x,t)$, полагая $q_j(t){=}q(jl,t)$, тогда

$$q_{tt}(x,t) = f\big(q(x+l,t)-q(x,t)\big) - f\big(q(x,t)-q(x-l,t)\big). \quad (1.22)$$

Если f и q — достаточно гладкие функции, то к правой части уравнения (1.22) применима формула Тейлора, и оно преобразуется к виду

$$q_{tt} = f'(0)q_{xx}l^2 + f''(0)q_xq_{xx}l^3 + \\ + \big(f'''(0)q_x^2q_{xx} + \frac{1}{12}f'(0)q_{xxxx}\big)l^4 + o(l^4), \quad l\to 0.$$

Колебания решетки, в которой каждая пружинка действует на частицу с силой $f(q) = \alpha q + \beta q^2$, описываются с точностью до членов с l^4 уравнением

$$q_{tt} = l^2\big(\alpha q_{xx} + 2\beta l q_x q_{xx} + \frac{\alpha l^2}{12}q_{xxxx}\big).$$

Для функции $p{=}q/l^s$ оно принимает вид

$$p_{tt} = l^2\big(\alpha p_{xx} + 2\beta l^{s+1}p_xp_{xx} + \frac{\alpha l^2}{12}p_{xxxx}\big),$$

из которого следует, что нелинейный и дисперсионный члены имеют одинаковый порядок по l при s=1. В этом случае для функции u=p_x получается уравнение Буссинеска

$$u_{tt} = l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\alpha u + \beta l^2 u^2 + \frac{\alpha l^2}{12} u_{xx}\big). \tag{1.23}$$

Оно сводится к волновому уравнению, если пренебречь членами с l^4. Следовательно, уравнение Буссинеска описывает волны в нелинейной диспергирующей среде, распространяющиеся как в положительном, так и в отрицательном направлении оси $0x$.

Уравнение для волн, распространяющихся только в одном направлении, является следствием уравнения (1.23).Вывод основан на применении теории возмущений, согласно которой решение отыскивается в форме ряда по малому параметру ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \ .$$

Если $u(\infty, t)\neq 0$, то $u_0\neq 0$ (иначе $u \equiv 0$ при ε=0); локализованная волна ($u(\infty, t)$=0) трактуется как возмущение, так что

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \tag{1.24}$$

Для сравнения различных величин необходимо определить их порядок относительно ε. Это осуществляется с помощью масштабных преобразований. Для построения соответствующих формул используется дисперсионное соотношение ω=$\omega(k)$ линеаризованного уравнения (1.23)

$$u_{tt} = l^2 \alpha\big(u_{xx} + \frac{l^2}{12} u_{xxxx}\big).$$

Оно имеет решение вида $u = \exp(i(kx - \omega t))$ при условии

$$\omega^2 = \alpha l^2 k^2 \big(1 - \frac{l^2 k^2}{12}\big).$$

Для малых k дисперсионное соотношение запишется в форме

$$\omega = \sqrt{\alpha} lk\big(1 - \frac{l^2k^2}{24}\big).$$

Пусть $k{=}\varepsilon^{\mu}\kappa$, где μ — неизвестная величина, а κ — новое волновое число, удовлетворяющее условию: $\kappa{=}O(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда фаза

$$i(kx - \omega t) = i\kappa\varepsilon^{\mu}(x - \sqrt{\alpha} lt) + i\frac{\sqrt{\alpha} l^3\kappa^3}{24}\varepsilon^{3\mu}t.$$

Масштабные преобразования определяются формулами

$$\xi = \varepsilon^{\mu}(x - at), \quad \tau = \varepsilon^{3\mu}t,$$

где $a{=}\sqrt{\alpha} l$. Переход к переменным ξ, τ и подстановка функции u в виде (1.24) в уравнение (1.23) приводит к следующему результату (индекс 1 у функции u опущен):

$$-2a\varepsilon^{4\mu+1}u_{\xi\tau} + \varepsilon^{6\mu+1}u_{\tau\tau} 2\beta l^4\varepsilon^{2\mu+2}(uu_{\xi})_{\xi} + \frac{\alpha l^4}{12}\varepsilon^{4\mu+1}u_{\xi\xi\xi\xi} + \ldots = 0.$$

Нелинейный и дисперсионный члены имеют одинаковый порядок по ε при $\mu{=}1/2$. После интегрирования по ξ получается уравнение КдФ

$$u_{\tau} + \frac{\beta l^3}{\sqrt{\alpha}}uu_{\xi} + \frac{\sqrt{\alpha} l^3}{24}u_{\xi\xi\xi} = 0. \tag{1.25}$$

1.103. Показать, что уравнение Буссинеска (1.24) преобразуется к виду

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u + u^2 + u_{xx}). \tag{1.26}$$

1.104. Уравнение КдФ записывают в следующем (каноническом) виде:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.27}$$

Привести уравнение (1.25) к виду (1.27.)

1.105. Для изменения длины пружинки в одномерной решетке (см. пример (1.7.)) на величину q необходимо приложить силу $f(q) = \alpha q + \beta q^3$. Показать, что волны, распространяющиеся вдоль решетки (в положительном направлении оси $0x$), описываются модифицированным уравнением КдФ (мКдФ)

$$u_\tau + \frac{3\beta l^3}{\sqrt{\alpha}} u^2 u_\xi + \frac{\sqrt{\alpha} l^3}{24} u_{\xi\xi\xi} = 0$$

и привести его к каноническому виду

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.28}$$

1.106. Решетка состоит из одинаковых частиц массы m, расположенных в точках $x_j = j\,l,\ j \in Z$, оси $0x$. Каждая частица взаимодействует только с двумя соседними, потенциал взаимодействия $U = U(q_j - q_{j-1})$, где q_j — отклонение j-й частицы от положения равновесия. Цепочкой Тоды называется решетка с потенциалом

$$U(q) = \frac{a}{b}\, e^{-b\,q} + a\,q, \quad a\,b > 0.$$

Показать, что 1) $U(q)$ — потенциал поля сил притяжения; 2) в переменных

$$\tau = \sqrt{\frac{a\,b}{m}}\, t, \qquad 1 + u_j = e^{-b\,r_j}, \quad r_j = q_j - q_{j-1}$$

движение цепочки описывается уравнениями

$$\frac{d^2}{d\,\tau^2}\, \ln(1 + u_j) = u_{j-1} - 2\,u_j + u_{j+1}, \quad j \in Z.$$

1.107. Точки подвеса $x_n = nl,\ n \in \mathbf{Z}$, одинаковых маятников расположены на горизонтальной оси $0x$ и соединены одна с другой идентичными спиральными пружинками, постоянная кручения которых k (для поворота пружинки на угол θ необходим момент

сил $k\theta$). Каждый маятник представляет собой жесткий невесомый стержень, длина которого d, с точечной массой m на свободном конце, маятники колеблются в плоскостях, перпендикулярных оси $0x$. Показать, что в случае непрерывной модели угол $\theta(t,x)$ удовлетворяет уравнению sin-Гордона(СГ)

$$\theta_{tt} = \frac{K}{md^2}\theta_{xx} - \frac{g}{d}\sin\theta,$$

где $K = kl^2$, и привести его к каноническому виду

$$u_{xt} = \sin u. \tag{1.29}$$

Пример 1.8. Частица, масса которой m, находится в одномерной потенциальной яме

$$U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| < l, \\ \infty & , \quad |x| > l. \end{cases} \tag{1.30}$$

Поставить задачу для определения волновой функции частицы, если волновая функция начального состояния задана.

В квантовой механике движение частицы описывается комплекснозначной функцией $\Psi(x,t)$, которая называется волновой функцией(см.[41]), $|\Psi(x,t)|^2\,dx$ есть вероятность обнаружить частицу на интервале $(x,\ x+dx)$ в момент времени t. Функция $\Psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi,$$

где $\mathcal{H} = p^2/(2m) + U(x)$ — оператор энергии (гамильтониан), $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор импульса, m — масса частицы. Так как в области, где $U(x)=\infty$, частица не может находиться, то волновая функция равна нулю при $x=\pm\,l$ для любого t. Итак,

$$\Psi_t = \tfrac{i\hbar}{2m}\Psi_{xx}, \quad |x| < l, \ \ 0 < t,$$
$$\Psi(-l,t) = \Psi(l,t) = 0,$$
$$\Psi(x,0) = \Psi_0(x), \quad \| \Psi \|^2 = \textstyle\int_{-l}^{l} |\Psi|^2 dx = 1.$$

Поставить задачи 1.108 – 1.112 для определения волновой функции, если волновая функция начального состояния известна.

1.108. Частица, масса которой m, совершает линейные гармонические колебания с частотой ω в поле упругих сил (линейный гармонический осциллятор).

1.109. Частица, масса которой m, находится в поле с потенциальной энергией

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < l, \\ U_0, & l < x. \end{cases}$$

1.110. Твердое тело с моментом инерции I вращается около неподвижной оси (плоский ротатор).

1.111. Твердое тело с моментом инерции I вращается около неподвижной точки (пространственный ротатор).

1.112. Частица, масса которой m, находится в сферической потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < r_0, \\ \infty & , \quad r_0 < r. \end{cases}$$

1.113. Частица, масса которой m, находится в двухмерной аксиально симметричной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \in (r_1, r_2), \\ \infty, & r \overline{\in} [r_1, r_2]. \end{cases}$$

Поставить задачу для определения волновых функций и уровней энергии стационарных состояний частицы.

1.114. Решить предыдущую задачу для сферически симметричной трехмерной потенциальной ямы $U(r) = -U_0 e^{-\frac{r}{a}}$.

1.2. Модели теплопроводности и диффузии

Пример 1.9. Поставить задачу для определения температуры $u(\mathbf{r},t)$ изотропного тела, занимающего в R^3 область Ω с кусочно-гладкой границей S, если внутри действуют тепловые источники, мощность которых в единице объема $F(\mathbf{r},t)$, а на границе происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Заданы: температура $\mu(\mathbf{r},t)$ внешней среды, коэффициент теплообмена α, начальная температура тела $u_0(\mathbf{r})$, его физические характеристики — плотность массы $\rho(\mathbf{r})$, коэффициент теплопроводности $k(\mathbf{r})$, удельная теплоемкость (т.е. теплоемкость единицы массы) $C(\mathbf{r})$.

Пусть $w(\mathbf{r},t)\in C^1$ — объемная плотность, $\mathbf{q}(\mathbf{r},t)\in C^1$ — плотность потока, $Q(\mathbf{r},t)\in C$ — плотность источников некоторой физической величины $W(x,t)$. Уравнение баланса — изменение величины $W(x,t)$ в объеме Ω с гладкой границей S за время Δt, обусловленное потоком и действием источников, — запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega} (w|_{t+\Delta t} - w|_t)\, d\mathbf{r} = -\Delta t \int\limits_{S} (\mathbf{q}\,\mathbf{n})\, ds + \Delta t \int\limits_{\Delta\Omega} Q\, d\mathbf{r}\,, \qquad (1.31)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S. В результате применения формулы Лагранжа к левой части, формулы Остроградского к интегралу по S и перехода к пределу (после сокращения на Δt) при $\Delta t \to 0$ соотношение (1.31) принимает форму

$$\int\limits_{\Delta\Omega} (w_t + div\,\mathbf{q} - Q)\, dx = 0\,.$$

Отсюда в силу произвольности Ω и непрерывности подынтегральной функции вытекает уравнение

$$w_t + div\,\mathbf{q} = Q\,, \qquad (1.32)$$

выражающее закон сохранения величины W.

Процесс распространения тепла регулируется законом сохранения тепловой энергии W, плотность которой $w{=}\rho\, Cu$, а плотность теплового потока $\mathbf{q}{=}{-}k\,\nabla u$ (закон Фурье). В этом случае уравнение (1.32) преобразуется к виду

$$\rho(\mathbf{r})\, C(\mathbf{r}) u_t = div\,(k(\mathbf{r})\,\nabla u) + F(\mathbf{r},t) = 0$$

и называется уравнением теплопроводности.

Теплообмен по закону Ньютона означает, что плотность потока тепла через поверхность S пропорциональна разности температур тела и внешней среды:

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \alpha\,(u-\mu)|_S\,.$$

Таким образом, функция $u(\mathbf{r},t)$ является решением задачи:

$$\begin{gathered}\rho\, Cu_t = div(k\,\nabla u) + F\,, \quad (x,y,z)\in\Omega,\ \ 0<t\,,\\ \big(\tfrac{\partial u}{\partial n} + h(u-\mu)\big)\big|_S = 0\,,\ \ h=\tfrac{\alpha}{k}\,,\\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z).\end{gathered}$$

В случае постоянных ρ, k, C уравнение теплопроводности записывается в виде:

$$u_t = a^2\,\Delta u + f\,, \qquad a^2 = \frac{k}{\rho\, C}\,, \quad f = \frac{F}{\rho\, C}\,.$$

1.115. Вывести в одномерном приближении уравнение теплопроводности для тонкого стержня, площадь поперечного сечения которого $S(x)$, объемная плотность $\rho(x)$, удельная теплоемкость $C(x)$, коэффициент теплопроводности $k(x)$; в стержне действуют источники тепла, мощность которых в единице объема $F(x,t)$, через боковую поверхность стержня происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой $\mu(x,t)$, коэффициент теплообмена, отнесенный к площади боковой поверхности участка стержня единичной длины (вдоль оси $0x$), равен $\alpha(x)$.

Поставить задачи 1.116 – 1.122 для определения температуры однородного стержня $(0<x<l)$ **с теплоизолированной боковой поверхностью.**

1.116. На концах стержня происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой 0^o, начальная температура стержня $u_0(x)$.

1.117. Стержень имеет нулевую температуру. С момента $t=0$ на конце $x=l$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(t)$, а конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре.

1.118. Конец $x=l$ стержня имеет температуру $\mu(t)$, на конец $x=0$ подается тепловой поток плотности $q(t)\,\mathbf{e_x}$, начальная температура равна нулю.

1.119. Стержень $(0<x<l)$ находится при нулевой температуре. С момента времени $t=0$ в сечении $x=x_0\in(0,\,l)$ действует источник тепла мощности $Q(t)$, концы стержня поддерживаются при нулевой температуре.

1.120. В сечении $x = x_0\in(0,\,l)$ стержня, концы которого $x=0$ и $x=l$ поддерживаются при постоянных температурах μ_1 и μ_2 соответственно, действует источник тепла постоянной мощности Q_0 столь долго, что в стержне устанавливается стационарный тепловой режим. В момент $t=0$ источник отключается.

1.121. Конец $x=0$ стержня поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце находится шарик, поверхность которого (кроме части, контактирующей со стержнем) теплоизолирована. Начальная температура шарика u_0, стержня — 0^o. Теплоемкость шарика C_0, а его теплопроводность много больше теплопроводности стержня.

1.122. В стержне устанавливается стационарная температура в результате длительного нагревания тепловым потоком плотности

$\mathbf{q}=-q_0\mathbf{e_x}$, поступающим через торец $x=l$, и теплообмена по закону Ньютона на торце $x=0$ со средой, температура которой μ_0. В момент $t=0$ торец $x=l$ покрывают теплоизоляцией.

1.123. В сечении $x=x_0\in(0,\, l)$ стержня имеется тонкая прокладка с теплоемкостью C_0; торец $x=0$ поддерживается при температуре μ_1, а через торец $x=l$ поступает тепловой поток плотности $\mathbf{q}=-q_0\mathbf{e_x}$ столь долго, что в стержне устанавливается стационарный тепловой режим. В момент времени $t=0$ торец $x=0$ покрывают теплоизоляцией.

1.124. Полубесконечный стержень $(0<x)$ из горючего материала находится при нулевой температуре; боковая поверхность стержня теплоизолирована. В момент времени $t=0$ торец стержня начинает гореть. Фронт горения имеет температуру μ_0 и распространяется со скоростью v_0. Поставить задачу теплопроводности.

Построить модели теплопроводности в одномерном приближении для систем 1.125 – 1.133.

1.125. Через боковую поверхность стержня $(0<x<l)$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, торцы стержня теплоизолированы, начальная температура $u_0(x)$.

1.126. Через боковую поверхность стержня $(0<x<l)$ и торец $x=l$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(x,t)$, торец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, начальная температура равна нулю.

1.127. Стержень $(0<x<l)$ с теплоизолированной боковой поверхностью составлен из двух различных однородных стержней с характеристиками $\rho_1,\ k_1,\ C_1,\ S_0$ при $0<x<x_0$ и $\rho_2,\ k_2,\ C_2,\ S_0$ при $x_0<x<l$; конец $x=0$ теплоизолирован, конец $x=l$ имеет заданную температуру $\mu(t)$, начальная температура $u_0(x)$.

1.128. Вдоль однородного стержня $(-\infty<x<\infty)$ с теплоизолированной поверхностью движется по закону $x(t)=v_0\,t$ точечный

источник тепла мощности $Q(t)$; при $t{=}0$ температура стержня равна нулю.

1.129. Однородный усеченный конус (рис.1.2), боковая поверхность которого теплоизолирована, имеет температуру $u_0(x)$. С момента $t{=}0$ через основания $x{=}0$ и $x{=}l$ проходят тепловые потоки, плотности которых $q_1(t)\,\mathbf{e_x}$ и $q_2(t)\,\mathbf{e_x}$ соответственно.

1.130. Основание $x{=}0$ усеченного конуса (рис.1.2) с теплоизолированной боковой поверхностью имеет температуру μ_0, а через основание $x{=}l$ поступает тепловой поток, плотность которого $\mathbf{q}{=}-q_0\mathbf{e_x}$, столь длительное время, что в конусе устанавливается стационарная температура. В момент времени $t{=}0$ основание $x{=}l$ покрывают теплоизоляцией.

1.131. Через торец $x{=}0$ клиновидного стержня (рис.1.3) с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu_1(t)$, торец $x{=}l$ имеет температуру $\mu_2(t)$, начальная температура равна $u_0(x)$.

1.132. Боковая поверхность клиновидного стержня (см. рис.1.3) теплоизолирована, торцы поддерживаются при нулевой температуре. В результате действия тепловых источников, мощность которых в единице объема Q_0, в стержне устанавливается стационарное распределение температуры. В момент $t{=}0$ действие источников прекращается.

1.133. Основание прямого кругового конуса, высота которого равна l, поддерживается при 0^o, а через боковую поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой μ_0, столь длительное время, что в конусе устанавливается стационарное распределение температуры. В момент $t{=}0$ боковую поверхность конуса покрывают теплоизоляцией. Радиус основания конуса r_0, коэффициент теплообмена на единицу площади равен α_0.

1.134. Боковая поверхность тонкого стержня ($0<x<l$) получена в результате вращения параболы $y^2 = 2p(x + l_0)$, где $p>0$, $l_0>0$, $pl_0 \gg 1$, около оси Ox. Через поверхность стержня происходит теплообмен по закону Ньютона (коэффициент теплообмена α задан) со средой, температура которой u_1, начальная температура стержня $u_0(x)$.

Сформулировать математические модели теплопроводности для однородных тел 1.135 – 1.143.

1.135. Через поверхность длинного цилиндра радиуса r_0 происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(\varphi, t)$; начальная температура цилиндра равна нулю.

1.136. Труба ($r_1<r<r_2$) имеет температуру u_0. С момента времени $t=0$ на ее внешнюю поверхность поступает радиальный тепловой поток плотности $\mathbf{q}=-q(t)\,\mathbf{e_r}$, а внутренняя поверхность поддерживается при температуре μ_0.

1.137. Внутренняя поверхность трубы ($r_1<r<r_2$) теплоизолирована, а на внешней — происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Труба нагревается постоянным током, при прохождении которого в единице объема выделяется тепловая мощность Q. После того как в трубе установилась стационарная температура, источник тока отключается.

1.138. Начальная температура трубы ($r_1<r<r_2$) равна u_0, ее внешняя поверхность поддерживается при нулевой температуре, а область $r<r_1$ заполнена материалом, теплопроводность которого много больше теплопроводности трубы, а теплоемкость единицы длины (вдоль оси трубы) равна C_0.

1.139. Через поверхности сферического слоя ($r_1<r<r_2$) проходит радиальный тепловой поток $Q(t)$, равномерно распределенный по каждой из поверхностей. Начальная температура слоя равна нулю.

1.140. В точке $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ шара, радиус которого r_0, в результате взрыва мгновенно выделилось Q единица; на поверхности шара происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, начальная температура шара равна нулю.

1.141. В результате камуфлетного (без выброса во внешнюю среду) подземного взрыва образуется сферическая полость, радиус которой r_0, заполненная газом. При больших температурах скорость теплообмена в газе много больше скорости обмена теплом между газом и окружающей средой. В полости происходит тепловыделение, обусловленное фазовыми превращениями и химическими реакциями, мощность которого в единице объема $Q(t)$. Начальная температура газа u_0 ($u_0<u_k$,где u_k — температура плавления вещества вне полости), внешней среды — $u_1(r)$, физические характеристики газа ρ_0, C_0, внешней среды — ρ, C, k.

1.142. В газе происходит высоковольтный разряд, сопровождающийся мгновенным выделением количества тепла Q, равномерно распределенного по объему цилиндра, высота которого $2l$, радиус r_0; начальная температура газа равна нулю.

1.143. Газ, температура которого равна нулю, движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. В результате высоковольтного разряда в направлении, перпендикулярном скорости, возникает искра в форме тонкого цилиндра, высота которого $2l$, и мгновенно выделяется равномерно по цилиндру количество тепла Q.

Поставить задачи 1.144 – 1.146 для определения стационарной температуры в однородных телах.

1.144. В параллелепипед ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$, $0<z<l_3$) через грань $x=0$ вводится постоянный тепловой поток Q, а через грань $z=0$ такой же поток выводится, оба потока равномерно распределены по соответствующим граням, остальная поверхность теплоизолирована.

1.145. Длинный цилиндр, радиус которого r_0, облучается плоскопараллельным тепловым потоком постоянной плотности q_0, направленным перпендикулярно оси цилиндра, через поверхность цилиндра происходит теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, температура которой равна нулю.

1.146. Вне теплоизолированного шара, радиус которого r_0, на расстоянии d от центра расположен точечный источник тепла постоянной мощности Q.

1.147. Согласно закону Фурье при выделении в точке $M(\mathbf{r})$ некоторого количества тепла в точке $M'(\mathbf{r}+\mathbf{\Delta r})$ сразу возникает тепловой поток, плотность которого $q \approx -k\frac{\Delta u}{\Delta r}$, т.е. тепловая энергия распространяется мгновенно. Для многих твердых тел, в которых теплообмен происходит достаточно быстро, такая модель согласуется с опытом. Но она неприменима к разреженным средам, в которых передача энергии осуществляется посредством соударения частиц и происходит медленнее, чем в твердых телах. Модель теплопроводности в разреженных средах должна учитывать конечность скорости распространения тепла; в этом случае применяют следующий закон теплопередачи:

$$\mathbf{q} = -k\nabla u - t_r\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \tag{1.33}$$

где t_r — время релаксации потока, равное по порядку величины времени свободного пробега частиц.

Применяя соотношение 1.33, получить уравнение для температуры $u(\mathbf{r},t)$, называемое гиперболическим уравнением теплопроводности в однородной среде (C, ρ, r, t_r — константы). Рассмотреть предельные случаи: 1) $|\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}| \ll |\mathbf{q}|$; 2) $|\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}| \gg |\mathbf{q}|$ и найти скорость распространения тепла во втором случае.

Пример 1.10. В тонкую трубку ($0<x<l$) с инертным газом через конец $x=l$ поступает неустойчивый газ (распад газа пропорционален его концентрации, коэффициент пропорциональности

α), плотность потока которого $q(t)$, а конец $x{=}0$ закрыт непроницаемой перегородкой. Поставить задачу для определения концентрации $u(x,t)$ неустойчивого газа в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

Закон сохранения массы газа имеет вид (1.32). В данном случае $w(x,t){=}u(x,t)$ — концентрация газа, плотность потока газа по закону Нернста $\mathbf{q}{=}-D\,\nabla u$, где D — коэффициент диффузии, плотность источников $Q{=}-\alpha\,u(x,t)$. Таким образом, концентрация $u(x,t)$ является решением задачи

$$u_t = D\,u_{xx} - \alpha u, \quad 0 < x < l\,, \quad 0 < t\,,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \tfrac{q(t)}{D}\,,$$
$$u(x,0) = 0.$$

Построить модели 1.148 – 1.153 процесса диффузии.

1.148. Начальная концентрация газа в трубке ($0{<}x{<}l$) равна $u_0(x)$, конец $x{=}l$ закрыт полупроницаемой перегородкой (поток газа через перегородку пропорционален разности концентраций по обе ее стороны), концентрация на конце $x{=}0$ равна $\mu(t)$, а вне трубки ее можно считать равной нулю.

1.149. Начальная концентрация неустойчивого газа, диффундирующего в трубке ($0{<}x{<}l$), равна u_0, конец $x{=}l$ закрыт, а на конце $x{=}0$ имеется полупроницаемая перегородка; концентрация газа вне трубки равна нулю.

1.150. Неограниченная трубка ($-\infty{<}x{<}\infty$) с газом движется с постоянной скоростью v в положительном направлении оси $0x$; в момент $t{=}0$ концентрация газа равна $u_0(x)$.

1.151. В неограниченном цилиндре, радиус которого r_0, происходит диффузия молекул газа, число молекул увеличивается (вследствие химической реакции) пропорционально концентрации. Начальная концентрация газа u_0, его концентрация на поверхности цилиндра равна нулю.

1.152. Через сферический слой ($r_1<r<r_2$) проходит поток частиц, обусловленный действием изотропного источника мощности Q, помещенного в центре ($r = 0$). После того как в слое установилась стационарная концентрация его поверхности покрывают непроницаемой для частиц оболочкой.

1.153. Сферический слой ($r_1<r<r_2$) окружен газом, концентрация которого μ_0. В точке $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ слоя действует изотропный источник того же газа мощности $Q(t)$. Начальная концентрация газа в слое равна нулю, внутренняя поверхность непроницаема для газа, а внешняя является полупроницаемой перегородкой.

1.154. Из шара, радиус которого r_0, во внешнюю среду диффундирует неустойчивый газ (распад газа пропорционален концентрации, коэффициент пропорциональности α задан); плотность потока газа через границу шара $q(\theta, \varphi, t)\,\mathbf{e_r}$, начальная концентрация газа вне шара равна нулю.

1.155. В шаре с полупроницаемой поверхностью, радиус которого r_0 действуют источники газа, диффузия которого во внешней среде сопровождается распадом, пропорциональным концентрации (коэффициент пропорциональности α задан). Начальная концентрация газа вне шара равна нулю, концентрация в шаре при $t>0$ равна $u_0(t)$.

1.156. В пространстве действует линейный источник неустойчивого газа; мощность источника на единицу длины Q_0, коэффициент диффузии D. Поставить задачу для определения стационарной концентрации газа.

1.157. Максимальная концентрация вещества в кристаллическом теле (металле) называется предельной растворимостью. Процесс твердотельной диффузии через границу раздела двух тел описывается одной из моделей: 1) отношение концентраций u_1 и u_2 в любой момент времени равно отношению предельных растворимостей c_1 и c_2; 2) диффузионный поток через границу

пропорционален разности отношений u_1/c_1 и u_2/c_2 (аналог полупроницаемой перегородки). Поставить диффузионную задачу для слоя $(-l_1<x<l_2)$, состоящего из двух различных однородных слоев $(-l_1<x<0)$ и $(0<x<l_2)$ с характеристиками D_1, c_1 и D_2, c_2 соответственно, если границы $x=-l_1$ и $x=l_2$ непроницаемы для частиц; начальная концентрация равна u_1 при $x\in(-l_1,\,0)$, u_2 при $x\in(0,\,l_2)$, $u_1\ll c_1$, $u_2\ll c_2$.

1.158. Пусть $u(x,t)\in C^1$ — объемная плотность, $q\in C^1$ — плотность потока некоторой физической величины, $x\in\mathbf{R}$, t — время, источников нет. 1. Доказать, что если $q=Q(u)$, то $u(x,t)$ удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$u_t + c(u)\,u_x = 0, \qquad c(u) = Q'(u). \tag{1.34}$$

2. Существуют процессы, в которых с ростом плотности по x ($u_x>0$) уменьшается скорость u_t, а следовательно, и плотность потока (движение автомашин по шоссе). Эта ситуация моделируется зависимостью $q=Q(u)-\nu\,u_x$, $\nu>0$. Доказать, что если $Q(u)$ — квадратный трехчлен, то $c=Q'$ — решение уравнения Бюргерса

$$c_t + c\,c_x = \nu c_{xx}, \quad \nu > 0. \tag{1.35}$$

1.159. По длинной трубе течет газ, плотность потока которого $q=Q(u)$, где $u(x,t)$ — плотность газа. Из-за пористости стенки трубы в каждую единицу времени часть газа, пропорциональная плотности (коэффициент пропорциональности β), выходит наружу. Пренебрегая трением газа, поставить задачу для определения его плотности при $t>0$, если начальная плотность $u_0(x)$.

Пример 1.11. Уравнение диффузии тепловых нейтронов в размножающей среде. Среда называется размножающей, если в ней происходит реакция деления, т.е. захват нейтрона ядром с последующим делением составного ядра и испусканием нескольких нейтронов (размножение). Наряду с размножением происходит убыль нейтронов — поглощение ядрами, вылет за пределы среды

(утечка). Захват нейтронов с последующим делением и поглощение нейтронов зависят от свойств среды и от энергии нейтронов. Утечка определяется формой и размерами области Ω, занятой средой. Если область Ω достаточно велика, то утечкой можно пренебречь (утечка пропорциональна площади поверхности, т.е. квадрату длины, а число актов деления пропорционально объему, т.е. кубу длины).

Для бесконечной однородной среды вводится коэффициент размножения k_∞, равный отношению плотности нейтронов в новом поколении к их плотности в предыдущем поколении. Если k_∞=1, то в среде идет самоподдерживающаяся цепная реакция, при этом плотность нейтронов не зависит от времени; такое состояние называется критическим. Устройство, в котором осуществляется управляемая цепная реакция, называется ядерным реактором. Реальный реактор имеет конечный объем, поэтому (из-за утечки) критическое состояние возможно при k_∞>1.

Примером размножающей среды может служить природный уран, состоящий из двух изотопов: ^{238}U (99,3%) и ^{235}U (0,7%). В такой среде невозможно осуществить самоподдерживающуюся цепную реакцию, так как сколь угодно большой объем природного урана не является критическим. Это связано с тем, что быстрые нейтроны (средняя энергия 2 МэВ), возникающие при делении ^{235}U, теряют энергию из-за неупругих столкновений, и она становится ниже порога E деления ядра ^{238}U (только 10% нейтронов вызывают деление этого изотопа). При последующем замедлении нейтрон попадает в область резонансного поглощения ядром ^{238}U. В этой области энергий сечение неупругого рассеяния мало, а потери энергии при упругих столкновениях незначительны (из-за большой массы ядер). Поэтому нейтрон проводит достаточно много времени в указанной области, что повышает вероятность резонансного поглощения. В итоге лишь небольшая часть нейтронов достигает тепловой энергии, где высока вероятность захвата ядром ^{235}U с последующим делением и испусканием вторичных нейтронов. Оказывается, что для природного

урана $k_\infty \approx 0{,}25$.

Чтобы увеличить долю тепловых нейтронов, в уран вводят замедлитель — материал с небольшим массовым числом и низким сечением поглощения нейтронов (тяжелая вода, графит и др.). В результате упругих столкновений с ядрами замедлителя нейтрон сравнительно быстро теряет энергию. Вероятность резонансного поглощения уменьшается, и нейтрон попадает в тепловую область. Посредством введения замедлителя удается создать критическую систему, называемую реактором на тепловых нейтронах. Область, в которой происходит процесс деления, называется активной зоной реактора; она содержит ядерное горючее и замедлитель. Реактор, в котором делящееся вещество и замедлитель представляют собой однородную среду, называется гомогенным. В целях защиты от излучения, а также для возвращения части нейтронов в активную зону, реактор окружают оболочкой из замедлителя — отражателем.

Нейтрон не имеет заряда и взаимодействует с ядром посредством столкновений. Столкновение происходит при попадании нейтрона в область влияния ядра σ, которая называется микроскопическим сечением столкновений и имеет размерность площади. Каждое столкновение сопровождается либо рассеянием (сечение σ_s), либо захватом нейтрона ядром (сечение σ_c), либо захватом с последующим делением ядра (сечение σ_f), так что $\sigma = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f$. Сумма сечений $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$ называется полным сечением поглощения. Суммарное сечение столкновений в прямом цилиндре с основанием ΔS и высотой Δl для нейтрона, попавшего в цилиндр через основание в направлении, параллельном оси, равно $N \Delta V \sigma$, где N — число ядер в единице объема, $\Delta V = \Delta S \Delta l$. Вероятность столкновения на единице длины пути нейтрона есть

$$\frac{1}{\Delta l} \frac{N \Delta V \sigma}{\Delta S} = N\sigma = \Sigma.$$

Величина Σ называется макроскопическим сечением столкновений и имеет размерность обратной длины. Сечение столкновений

$\Sigma=\Sigma_s+\Sigma_c+\Sigma_f$, где $\Sigma_s=\sigma_s N$, $\Sigma_c=\sigma_c N$, $\Sigma_f=\sigma_f N$ — макроскопические сечения рассеяния, захвата и захвата с последующим делением ядра соответственно, $\Sigma_a=\Sigma_c+\Sigma_f$ — полное макроскопическое сечение поглощения.

Пусть нейтрон проходит путь x с вероятностью $P(x)$, тогда вероятность $P(x+\Delta x)=P(x)(1-\Sigma\Delta x)$, или $\Delta P=-P\Sigma\Delta x$. Таким образом, функция $P(x)$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &P'(x)+\Sigma P(x)=0, \quad 0<x \\ &P(0)=1, \end{aligned}$$

откуда

$$P(x)=e^{-\Sigma x}. \tag{1.36}$$

Средняя длина свободного пробега нейтрона

$$\lambda=\int_0^x xe^{-\Sigma x}\Sigma dx=\frac{1}{\Sigma},$$

среднее время между двумя последовательными соударениями нейтрона, скорость которого v, равно $\tau=\lambda/v$. Величина $\lambda_s=1/\Sigma_s$ называется средней длиной рассеяния, а $\lambda_a=1/\Sigma_s$ — средней длиной поглощения.

При изучении движения нейтронов их разбивают на ряд энергетических групп, в каждой из которых разброс нейтронов по скоростям невелик. Приход нейтронов в группу и их уход из нее трактуется как действие источников. Вывод уравнения диффузии тепловых нейтронов проводится в предположении, что они образуют одну группу, т.е. обладают одинаковой (по абсолютной величине) скоростью v (односкоростное приближение). Основными характеристиками нейтронного поля являются функция распределения $n(\mathbf{r},t,\mathbf{l})$ — концентрация нейтронов с заданным направлением скорости $\mathbf{v}=v\mathbf{l}$ и плотность $n(\mathbf{r},t)$ — число нейтронов в единице объема. Если известна функция распределения, то

$$n(\mathbf{r},t)=\int\limits_{\mathbf{l}} n(\mathbf{r},t,\mathbf{l})\,d\mathbf{l}.$$

Используется также функция $vn(\mathbf{r},t)$=$\Phi(\mathbf{r},t)$, называемая плотностью потока нейтронов, и функция $j_n(\mathbf{r},t) = (\mathbf{j},\mathbf{n})$ — число нейтронов, пересекающих за единицу времени единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении нормали,— называемая плотностью тока нейтронов.

В элементарном объема $d\mathbf{r}$ с координатой $\mathbf{r}$ содержится $n(\mathbf{r},t,\mathbf{l})d\mathbf{r}$ нейтронов с заданным направлением скорости. Следовательно, число столкновений в элементе объема $d\mathbf{r}$ за время dt будет равно $n(\mathbf{r},t,\mathbf{l})\,d\mathbf{r}\,v\,dt\Sigma$, а полное их число

$$dN = \int\limits_{\mathbf{l}} n(\mathbf{r},t,\mathbf{l})\,d\mathbf{l}d\mathbf{r}vdt\Sigma = vn(\mathbf{r},t)\Sigma\mathbf{r}dt,$$

или

$$dN = \Sigma\Phi(\mathbf{r},t)\mathbf{r}dt. \tag{1.37}$$

Если плотность потока нейтронов в бесконечной однородной размножающей среде не зависит от координат, то коэффициент размножения

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f\varphi}{\Sigma_a}, \tag{1.38}$$

где ν — среднее число быстрых нейтронов, рождающихся при одном акте деления, а φ — вероятность того, что быстрый нейтрон избежит в процессе замедления резонансного поглощения. Действительно, число тепловых нейтронов нового поколения, которые появляются в единице объема в единицу времени, равно $\nu\Sigma_f\varphi\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — плотность потока тепловых нейтронов предыдущего поколения. Отношение этого числа к числу $\Sigma_a\Phi(t)$ поглощенных нейтронов (в единице объема за единицу времени) и есть коэффициент размножения k_∞.

При выводе уравнения диффузии на нейтронное поле накладываются следующие ограничения (диффузионное приближение). 1) Скорость нейтрона велика по сравнению со скоростью ядер, так что ядра считаются неподвижными. 2) Концентрация нейтронов мала по сравнению с концентрацией ядер, по-

этому столкновения между нейтронами не учитываются. 3) Число столкновений, приводящих к поглощению нейтронов, много меньше числа столкновений, сопровождающихся рассеянием (за одно и то же время): $\Sigma_a \ll \Sigma_s$. 4) Рассеяние нейтронов является упругим (в результате рассеяния абсолютная скорость нейтрона не меняется) и изотропным (любое направление скорости нейтрона после рассеяния равновероятно). 5) Нейтронное поле мало меняется за время $\tau{=}\lambda/v$ между двумя последовательными соударениями при фиксированном $\mathbf{r}$.

Ниже рассматривается диффузия нейтронов в однородной изотропной неограниченной размножающей среде, в которой отсутствуют "внешние"источники, т.е. источники, действие которых не зависит от поля нейтронов. Уравнение диффузии представляет собой запись баланса числа нейтронов и имеет вид (1.32), где $w{=}u$, $q{=}j$, $Q{\to}Q(\mathbf{r},t){-}\Sigma_a\Phi$, $Q(\mathbf{r},t)$ — плотность источников тепловых нейтронов, т.е. $Q(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt$ есть число нейтронов, появившихся в элементе объема $d\mathbf{r}$ за время dt в результате замедления до тепловых энергий, $\Sigma_a\Phi$ — число нейтронов, поглощенных в единицу времени в единице объема (отрицательные источники):

$$u_t + div\mathbf{j} = Q(\mathbf{r},t) - \Sigma\Phi. \tag{1.39}$$

Чтобы завершить вывод нужно подсчитать поток нейтронов, пересекающих площадку ΔS, которая в пространстве расположена произвольным образом. Эту площадку без ограничения общности можно расположить в начале координат в координатной плоскости $x0y$, тогда орт $\mathbf{e}_z$ будет нормальным вектором к Δ (рис 1.8). В этом случае односторонняя плотность тока j_- формируется теми нейтронами, скорость $\mathbf{v}$ которых составляет тупой угол с осью $0z$, т.е. нейтронами, поступающими из точек с неотрицательной координатой z. Каждый нейтрон, пересекающий площадку ΔS, попадает в нее после столкновения с ядром (иначе, путь, проходимый нейтроном без столкновений, был бы бесконечно большим). В течение времени от

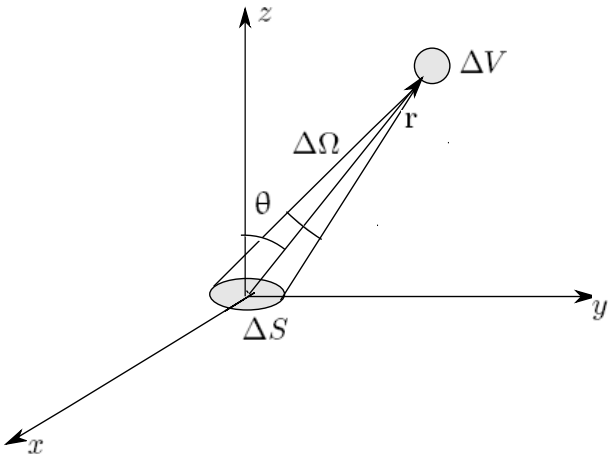

Рис. 1.8

t до $t+\Delta t$ площадки ΔS могут достичь те нейтроны, которые оказались в элементе объема ΔV в промежуток времени от $t-r/v$ до $t+\Delta t-r/v$. Число столкновений за время Δt (см.1.37) $\Delta n=\Sigma_s\Phi(\mathbf{r},t-r/v)\Delta V\Delta t$. В силу изотропности рассеяния в телесный угол $\Delta\Omega=\Delta S\cos\theta/r^2$ попадет $\Delta n\Delta\Omega/(4\pi)$ нейтронов, а площадку ΔS пересекут с учетом соотношения(1.36)количество нейтронов, равное $\Delta n\frac{\Delta\Omega}{4\pi}\exp(-\Sigma r)$. Таким образом, односторонняя плотность тока

$$
\begin{aligned}
j_- &= \frac{1}{\Delta S\Delta t}\int\limits_{(z>0)} dn\frac{\Delta\Omega}{4\pi}e^{-\Sigma_s r} = \\
&= \frac{\Sigma_s}{8\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\Sigma_s r}dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi}\Phi\left(\mathbf{r},t-\frac{r}{v}\right)d\varphi,
\end{aligned}
$$

где согласно условию 3) диффузионного приближения $\Sigma=\Sigma_s+\Sigma_a\approx\Sigma_s$. Так как экспонента убывает с ростом r и должно выполняться условие 5) диффузионного приближения,

то основной вклад в интеграл вносит окрестность точки $r{=}0$. Замена функции Φ приближенным выражением

$$\Phi(\mathbf{r}, t{-}r/v) = \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(0, t) + (\mathbf{r}\nabla\Phi(0, t)) \tag{1.40}$$

и интегрирование приводят к следующему выражению для односторонней плотности тока нейтронов в отрицательном направлении оси $0z$:

$$j_- = \frac{1}{4}\Phi(0, t) + \frac{1}{6\Sigma_s}\Phi_z(0, t). \tag{1.41}$$

Плотность тока в положительном направлении оси $0z$ подсчитывается аналогично:

$$j_+ = \frac{1}{4}\Phi(0, t) - \frac{1}{6\Sigma_s}\Phi_z(0, t). \tag{1.42}$$

Плотность тока через единичную площадку с нормалью $\mathbf{e}_z$ в направлении нормали

$$j_z = j_+ - j_- = -\frac{1}{3\Sigma}\Phi_z(0, t). \tag{1.43}$$

В общем случае плотность тока нейтронов через единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении нормали

$$j_n = -D\frac{\partial\Phi}{\partial n}, \quad D = \frac{1}{3\Sigma_s}$$

Вектор

$$\mathbf{j} = -D\nabla\Phi \tag{1.44}$$

называется векторным током нейтронов, величина D — коэффициентом диффузии. Уравнение (1.39) приобретает окончательный вид

$$\frac{1}{v}\,u_t = D\Delta u - \Sigma_a\Phi + Q \tag{1.45}$$

и называется односкоростным уравнением диффузии нейтронов.

Замечания. 1. Условие 5) диффузионного приближения не выполняется в областях, где функция Φ достаточно быстро меняется на длине свободного пробега нейтрона. В таких областях уравнение диффузии не дает правильного описания нейтронного поля. Нарушение условия 5) происходит в окрестности концентрированного источника нейтронов (например, точечного), вблизи границы раздела двух сред с различными физическими свойствами (одна из них может быть вакуумом), около сильных поглотителей, а также в сильно поглощающих средах, для которых Σ_a порядка или больше Σ_s (см. условие 3) диффузионного приближения). Отсюда, в частности, вытекает требование: размеры среды, в которой происходит диффузия, должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтрона.

2. Плотность нейтронов не зависит от направления скорости каждого из них; это свойство сохранится при наличии источников, если источники изотропны. Протяженный источник будет изотропным, если каждый достаточно малый его элемент представляет собой изотропный точечный источник.

3. Если вместо (1.40) применить разложение до членов второго порядка, то выражения (1.41) и (1.42) для односторонних плотностей тока j_- и j_+ изменятся, но в них появятся одни и те же слагаемые, а это значит, что выражение (1.45) для плотности тока j_z останется тем же. Таким образом, формула (1.43) и, следовательно, уравнение диффузии (1.45), полученные с помощью разложения (1.40) до членов второго порядка, имеют большую точность, чем формулы (1.41) и (1.42).

4. Граничное условие для выпуклой области Ω, граничащей с вакуумом, ставится следующим образом: односторонняя плотность тока через поверхность $S{=}\partial\Omega$ в направлении внутренней нормали к S равна нулю (вакуум не возвращает нейтроны). В одномерном случае, где Ω — слой $|x|{<}x_0$, граничное условие $j_-(x_0,t){=}0$, или

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = -\frac{3}{2\lambda_s} \tag{1.46}$$

имеет следующий геометрический смысл: касательная к графику функции $\Phi(x,t)$ в точке с абсциссой $x{=}x_0$ (при любом фиксированном t) пересекает ось $0x$ в точке $x{=}x_0{+}\delta$, где $\delta{=}\frac{2}{3}\lambda_s$. При $x_0{\ll}\delta$ условие (1.46) заменяют более простым $\Phi(\tilde{x}_0,t){=}0$, где $\tilde{x}_0{=}x_0{+}\delta$ — экстраполированная граница. Из уточненного решения задачи с привлечением кинетического уравнения следует, что плотность нейтронов вдали от границы определяется уравнением диффузии при условии $\Phi(\tilde{x}_0,t){=}0$, в котором величина $\tilde{x}_0{=}x_0+0,71\lambda_s$. В задачах для выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей $S=\partial\Omega$ ставится условие

$$\Phi|_{\tilde{S}}=0, \tag{1.47}$$

где экстраполированная граница $\tilde{S}$ получается смещением точек S в направлении внешней нормали на величину $\delta=0,71\lambda_s$.

В цилиндрическом реакторе $r_0{<}r{<}r_1$ с центральным регулирующим стержнем ($r{<}r_0$), полностью поглощающим нейтроны, внутренний экстраполированный радиус $\tilde{r}_0 = r_0-\varepsilon$. Так как $\Phi(\tilde{r}_0)\approx\Phi(r_0)-\varepsilon\Phi'(r_0)$, то на экстраполированной границе

$$\Phi(r_0)-\varepsilon\Phi'(r_0)=0. \tag{1.48}$$

Зависимость величины ε от радиуса r_0 (в виде графика) приведена в [49].

Построить модели 1.160 – 1.165 нестационарной диффузии для определения плотности потока нейтронов в неразмножающей поглощающей среде ($\Sigma_c{\ll}\Sigma_s$). .

1.160. В пространстве действуют источники тепловых нейтронов, мощность которых в единице объема $F(\mathbf{r},t)$. Начальная концентрация нейтронов $u_0(\mathbf{r})$.

1.161. Слой ($|x|{<}l$) граничит с вакуумом, плотность потока нейтронов из вакуума равна нулю; начальная концентрация нейтронов $u_0(x)$.

1.162. Длинный цилиндр, экстраполированный радиус которого r_0, помещен в вакуум. На оси цилиндра находится линейный изотропный источник тепловых нейтронов, мощность единицы длины которого q_0; начальная концентрация нейтронов равна нулю.

1.163. В однородном полупространстве ($z>0$), граничащем с вакуумом ($z<0$), действует изотропный точечный источник тепловых нейтронов, мощность которого Q, координаты $(0,0,z_0)$. Нейтроны из вакуума не возвращаются, их начальная концентрация равна нулю.

1.164. Начальная концентрация нейтронов в шаре, радиус которого r_0, равна $u_0(\mathbf{r})$. В процессе диффузии происходит поглощение нейтронов. Шар находится в вакууме; нейтроны из вакуума не возвращаются.

1.165. Бесконечный цилиндр, радиус которого r_0, коэффициент диффузии D_1, сечение поглощения Σ_{c1}, находится в среде, коэффициент диффузии которой D_2, сечение поглощения Σ_{c2}. Начальная концентрация нейтронов вне цилиндра равна нулю, концентрация в цилиндре — $u_0(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y$.

Поставить задачи 1.166 – 1.171 диффузии для определения плотности потока нейтронов в неразмножающей поглощающей среде ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) при условии стационарности диффузионного процесса.

1.166. В пространстве действует плоский изотропный источник нейтронов, с единицы площади которого в единицу времени испускается Q_0 тепловых нейтронов.

1.167. Внутрь слоя ($0<x<\tilde{l}$), где $\tilde{l}$ — экстраполированная граница, через поверхность $x=0$ поступают тепловые нейтроны; число нейтронов, проходящих через единицу площади за единицу времени равно q_0.

1.168. В однородном пространстве действует линейный изотропный источник тепловых нейтронов, мощность единицы длины которого q_0.

1.169. В центр шара с экстраполированным радиусом $\tilde{r}_0$ помещен точечный изотропный источник тепловых нейтронов, мощность которого Q_0. Шар находится в вакууме.

1.170. Сечения рассеяния и поглощения нейтронов в неограниченной среде равны соответственно

$$\Sigma_s = \begin{cases} \Sigma_{s1}, & z < 0, \\ \Sigma_{s2}, & z > 0, \end{cases} \qquad \Sigma_c = \begin{cases} \Sigma_{c1}, & z < 0, \\ \Sigma_{c2}, & z > 0. \end{cases}$$

В точке $(0, 0, z_0 > 0)$ действует изотропный источник тепловых нейтронов, мощность которого Q_0.

1.171. Однородная среда занимает ограниченную выпуклую область Ω и находится в вакууме. В среде действуют изотропные источники тепловых нейтронов, мощность которых в единице объема $F(\mathbf{r})$. Вне области Ω источников нет, нейтроны из вакуума не возвращаются.

1.172. Для изучения свойств облучаемых материалов соответствующие образцы помещают в экспериментальный ядерный реактор в область с высокой плотностью нейтронов. Образец представляет собой однородный поглотитель, занимающий область Ω с кусочно-гладкой границей S. Поставить в диффузионном приближении задачу для определения плотности потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r})$ в образце при следующих предположениях: нейтронное поле вне образца 1) изотропно (плотность потока нейтронов Φ_0); 2) мало меняется вблизи образца.

1.173. Гомогенный реактор на тепловых нейтронах занимает достаточно большую область Ω (можно пренебречь утечкой) и находится в критическом состоянии. При делении ядер тепловыми

нейтронами с энергией E_τ рождаются быстрые нейтроны с энергией $E_0{>}E_\tau$. Пусть E_r — энергия нейтрона, при которой происходит его резонансное поглощение, $w(\mathbf{r},\mathbf{r}',E_1,E_2)$ — плотность вероятности того, что нейтрон переместится из точки $\mathbf{r}$ в точку $\mathbf{r}'$, изменив энергию со значения E_1 до $E_2{<}E_1$, где

$$\int\limits_{\mathbf{R^3}} w(\mathbf{r},\mathbf{r}',E_1,E_2)\,d\mathbf{r}' = 1.$$

Пренебрегая делением, вызванным замедляющимися нейтронами, показать, что уравнение диффузии (1.45) преобразуется к виду:

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + k_\infty\Sigma_a \int\limits_{\Omega} w(\mathbf{r}',\mathbf{r},E_0,E_\tau)\Phi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0. \quad (1.49)$$

1.174. Пусть выполнены условия предыдущей задачи, при этом размер реактора $R{\gg}L$ и $R{\gg}\sqrt{\tau}$, где L — длина диффузии (см. ответ к задаче 1.166.), $\sqrt{\tau}{=}\sqrt{\frac{\overline{r^2}}{6}}$ — длина замедления,

$$\overline{r^2} = \overline{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|^2} = \int\limits_{\mathbf{R^3}} |\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|^2 w(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',E_0,E_\tau)\,d\mathbf{r}''$$

— средний квадрат перемещения нейтрона в процессе замедления. Показать, что уравнение диффузии (1.49) можно привести к виду

$$\Delta\Phi + \alpha^2\Phi = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty\tau}, \qquad k_\infty - 1 \ll 1. \quad (1.50)$$

Величина

$$\alpha^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty\tau} \approx \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$

называется материальным параметром, $M{=}\sqrt{L^2+\tau}$ — длина миграции, характеризующая среднее расстояние между точками рождения и поглощения нейтрона.

Поставить задачи 1.175 – 1.179 для определения критического размера гомогенного реактора на тепловых нейтронах.

1.175. Реактор занимает односвязную выпуклую область Ω с кусочно-гладкой границей S и находится в вакууме. Граничное условие поставить в двух формах: 1) для плотности потока на экстраполированной границе; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на S.

1.176. Цилиндрический реактор ($r_1<r<r_2$), внутреннюю часть ($r<r_1$) которого заполняет сильный поглотитель ("черное"тело), помещен в вакуум. Поставить условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе, применив (1.47).

1.177. Сферический реактор ($r_1<r<r_2$) с полостью ($r<r_1$) находится в вакууме. Постановку сделать при условии, что нейтроны из вакуума не возвращаются.

1.178. Реактор в форме параллелепипеда ($|x|<l_1, |y|<l_2, |z|<l_3$) имеет два торцевых отражателя ($|x|<l_1, |y|<l_2, l_3<|z|<l$). Сечения поглощения и рассеяния равны соответственно Σ_a^C и Σ_s^C в активной зоне и Σ_c^R и Σ_s^R в отражателе. Поставить условие для плотности потока нейтронов на внешней экстраполированной границе системы в предположении, что экстраполированные длины $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ для реактора и отражателя одинаковы.

1.179. Сферический реактор ($r<r_0$) окружен отражателем в форме сферического слоя ($r_0<r<r_1$). Сечения поглощения и рассеяния равны соответственно Σ_a^C и Σ_s^C в активной зоне и Σ_c^R и Σ_s^R в отражателе. Поставить условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе системы.

Пример 1.12. Диффузионно-возрастное уравнение Ферми. Рождающиеся в результате деления быстрые нейтроны (средняя энергия 2 МэВ) замедляются при рассеянии на ядрах среды (замедлителя) и достигают тепловой области В этой области разброс

нейтронов по скоростям невелик и их движение рассматривается в рамках диффузионной теории. Так как в процессе замедления скорость нейтронов меняется в широком диапазоне (от 10 МэВ до долей электронвольта), то диффузионное приближение, строго говоря, неприменимо. Однако если замедлитель состоит из тяжелых ядер, то потеря энергии при одном столкновении невелика и нейтрон испытывает достаточно много столкновений при небольшом изменении скорости. В связи с этим в каждом малом интервале энергии для описания движения нейтронов можно применить диффузионное приближение.

Скорость замедляющихся нейтронов много больше скорости ядер, а энергия нейтронов значительно превосходит энергию связи ядер (в молекулах, кристаллах). Поэтому можно считать, что нейтроны взаимодействуют со свободными неподвижными ядрами. Длина волны нейтрона с энергией порядка (и меньше) 1 МэВ много больше радиуса действия ядерных сил; при этом условии упругое рассеяние нейтрона на свободных ядрах в системе центра инерции изотропно.

Пусть скорости нейтрона и ядра до и после столкновения равны $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{V}_1$ в лабораторной системе координат, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{W}_0 = -\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{W}_1$ — в системе центра инерции, скорость которой $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_0/(1+A)$, где A — отношение масс ядра и нейтрона. При упругом рассеянии в системе центра инерции абсолютная величина скорости нейтрона и ядра не изменяется. Это следует из законов сохранения количества движения и энергии

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 + A\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}, \qquad & \mathbf{w}_1 + A\mathbf{W}_1 = \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{w}_0^2}{2} + \frac{A\mathbf{W}_0^2}{2} \quad = \quad & \frac{\mathbf{w}_1^2}{2} + \frac{A\mathbf{W}_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Действительно, подстановка $\mathbf{w}_i = -A\mathbf{W}_i$, $i = 0, 1$, в третье уравнение приводит к соотношению

$$\frac{1+A^2}{2}\mathbf{W}_0 = \frac{1+A^2}{2}\mathbf{W}_1,$$

откуда $|\mathbf{W}_0| = |\mathbf{W}_1| = |\mathbf{v}_c|$; аналогично $|\mathbf{w}_0| = |\mathbf{w}_1|$. Угол рассеяния β в системе центра инерции образован векторами $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{v}_c$. Из равенства $\mathbf{v}_1{=}\mathbf{w}_1{+}\mathbf{v}_c$ следует, что $v_1^2{=}w_1^2{+}v_c^2{+}2W_1v_c\cos\beta$. Но $|\mathbf{w}_1|{=}A|\mathbf{W}_1|{=}A|\mathbf{v}_c|$, поэтому

$$v_1^2 = \frac{1 + A^2 + 2A\cos\beta}{1 + A^2} v_0^2.$$

Следовательно, отношение энергий E_1 после и E_0 до столкновения

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{2}\left[1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\cos\beta\right], \quad \varepsilon = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2. \tag{1.51}$$

В силу изотропности рассеяния значения $\beta \in [0, \pi]$ равновероятны. Но тогда, согласно формуле (1.51), нейтрон с энергией E после соударения может с одинаковой вероятностью приобрести энергию E' в интервале $[\varepsilon E, E]$. Плотность вероятности случайной величины E'

$$w(E, E') = \begin{cases} \frac{1}{(1-\varepsilon)}E, & E' \in [\varepsilon E, E], \\ 0, & E' \overline{\in} [\varepsilon E, E]. \end{cases} \tag{1.52}$$

В теории замедления энергия нейтрона измеряется в логарифмической шкале. Мерой энергии служит летаргия — логарифм отношения энергий

$$u = \ln\frac{E_0}{E}, \tag{1.53}$$

где E_0 — произвольная величина (например, средняя энергия нейтронов деления). Для обозначения функций, зависящих от разных аргументов $f(E) = f(E(u)) = \tilde{f}(u)$, будет применяться упрощенная запись: $f(E) = f(u)$. Вероятность того, что нейтрон с летаргией u приобретет после соударения летаргию u' в интервале du'

$$w(u, u')\, du' = w(E, E')\, dE',$$

где $w(E, E')$ имеет вид (1.52). Следовательно,

$$w(u, u') = \begin{cases} \frac{e^{-(u'-u)}}{1-\varepsilon}, & u' \in [u, u + \ln \frac{1}{\varepsilon}], \\ 0, & u' \overline{\in} [\prime \in [u, u + \ln \frac{1}{\varepsilon}]. \end{cases} \tag{1.54}$$

Среднее приращение летаргии нейтрона за одно соударение

$$\xi = \int\limits_{u}^{u+\ln \frac{1}{\varepsilon}} \frac{(u'-u)e^{-(u'-u)}}{1-\varepsilon} du' = 1 + \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Для описания распределения замедляющихся нейтронов по энергиям вводится функция $q(u)$ — число нейтронов в единице объема, пересекающих в единицу времени уровень летаргии u (в направлении возрастания летаргии). Эта функция называется плотностью замедления и представляет собой плотность потока нейтронов в пространстве летаргии.

Ниже рассматриваются две задачи, относящиеся к основным в теории замедления.

Задача 1. В однородном неограниченном замедлителе действуют источники быстрых нейтронов с летаргией u=0, мощность которых в единице объема Q_0. Замедлитель состоит из тяжелых ядер, не поглощающих нейтроны (Σ_a=0), процесс замедления стационарен. Нужно установить соотношение, связывающее плотность потока нейтронов и плотность замедления, а также получить распределение нейтронов по энергиям.

После одного соударения нейтрон с летаргией u приобретет летаргию $u' \in [u, u + \ln \frac{1}{\epsilon}]$ в интервале du' с вероятностью $w(u, u')du'$, где $w(u, u')$ имеет вид (1.54). Следовательно, летаргия нейтрона может стать равной u', если до соударения ее значение $u \in [u' - \ln \frac{1}{\epsilon}, u']$. Число нейтронов с летаргией u в интервале du, испытавших соударения (в единице объема за единицу времени) равно $\Phi(u)\Sigma_s(u)du$, из них в интервал du' попадет

$\Phi(u)\Sigma_s(u)dw(u,u')du'$ нейтронов, а полное их число ‘

$$dN^+ = du' \int\limits_{u'-\ln\frac{1}{\epsilon}}^{u'} \Phi(u)\Sigma_s(u)\frac{e^{-(u'-u)}}{1-\varepsilon}du.$$

С другой стороны, из интервала du' уйдет

$$dN^- = \Phi(u')\Sigma_s(u')du'$$

нейтронов. Так как процесс замедления нейтронов стационарен, нет их поглощения и отсутствуют источники с летаргией $u{>}0$ (энергии $E{=}E_0$ соответствует летаргия $u{=}0$), то $dN^+{=}dN^-$, т.е.

$$\Phi(u')\Sigma_s(u') = \int\limits_{u'-\ln\frac{1}{\epsilon}}^{u'} \Phi(u)\Sigma_s(u)\frac{e^{-(u'-u)}}{1-\varepsilon}du. \qquad (1.55)$$

Решение этого уравнения (см. задачу 4.180)

$$\Phi(u')\Sigma_s(u') = C. \qquad (1.56)$$

Плотность замедления $q(u')$ равна числу нейтронов (в единице объема), пересекающих (за единицу времени) уровень летаргии u', т.е. числу нейтронов, летаргия которых попадает в промежуток $[u', u+\ln\frac{1}{\epsilon}]$. Вероятность того, что случайная величина с распределением (1.54) попадет в указанный интервал равна

$$\int\limits_{u'}^{u+\ln\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-(u''-u)}}{1-\varepsilon}du'' = \frac{e^{-(u'-u)}-\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Следовательно, плотность замедления

$$q(u') = \int\limits_{u'-\ln\frac{1}{\epsilon}}^{u'} \Phi(u)\Sigma(u)\frac{e^{-(u'-u)}-\varepsilon}{1-\varepsilon}du =$$

$$= \int\limits_{u'-\ln\frac{1}{\epsilon}}^{u'} C\frac{e^{-u'+u}-\varepsilon}{1-\epsilon}du = C\frac{1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon}{1-\varepsilon} = C\xi. \quad (1.57)$$

Сравнение (1.56) и (1.57) приводит к соотношению

$$q(u) = \xi\Sigma_s(u)\Phi(u). \quad (1.58)$$

При замедлении нет потери нейтронов, поэтому из интервала $(E, E+dE)$ выходит ровно столько нейтронов, сколько входит, т.е. $q(E+dE)=q(E)$. Таким образом,

$$\frac{dq}{dE} = 0, \quad E_0 < E,$$
$$q(E_0) = Q_0,$$

откуда $q(E) = Q_0$. Соотношение (1.58) принимает форму

$$\Phi(E) = \frac{Q_0}{\xi\Sigma_s(E)E} \quad (1.59)$$

и описывает распределение нейтронов по энергиям (спектр Ферми).

Формулы (1.58) и (1.59) получены при условии непрерывности процесса замедления для летаргии $u \geq \ln(1/\varepsilon)$ (нижний предел $u' - \ln(1/\varepsilon)$ в интеграле уравнения (1.55) неотрицателен) или для энергии $E \leq \varepsilon E_0$. Поскольку максимальная доля энергии, теряемая нейтронов при столкновении (она равна $1-\varepsilon$), уменьшается с ростом A, то для тяжелых замедлителей формулы (1.58) и (1.59) являются хорошим приближением и применимы вплоть до $u=0$ или $E=E_0$ (см.[49]).

Задача 2. В однородном замедлителе, который занимает область Ω, действуют источники, испускающие в единицу объема за единицу времени $F(\mathbf{r}, u)$ нейтронов с летаргией u. Нужно получить уравнение, описывающее стационарный процесс замедления нейтронов при условии, что замедлитель состоит из тяжелых ядер, не поглощающих нейтроны, а размеры области Ω велики по сравнению с длиной диффузии.

Вывод уравнения (его называют возрастным, или уравнением замедления) основан на следующих допущениях:

1. Нейтроны с летаргией в интервале $(u, u+du)$ принадлежат односкоростной группе, до выхода из которой каждый из них достаточно много раз сталкивается с ядрами. Для такой группы справедливо диффузионное приближение, т.е. плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, u)$ пропорциональна градиенту плотности потока $\Phi(\mathbf{r}, u)$ нейтронов (см. (1.44)):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, u) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, u). \tag{1.60}$$

2. Плотность нейтронов — медленно меняющаяся функция (по крайней мере, на длине свободного пробега нейтрона), поэтому в окрестности точки $\mathbf{r}$ для плотности замедления $q(\mathbf{r}, u)$ и плотности потока $\Phi(\mathbf{r}, u)$ нейтронов используют соотношение (1.58):

$$q(\mathbf{r}, u) = \xi\Sigma_s(u)\Phi(\mathbf{r}, u). \tag{1.61}$$

Уравнение замедление представляет собой запись баланса нейтронов в четырехмерном пространстве переменных $\mathbf{r}$ и u:

$$\int\limits_{\Delta\Omega} (q(\mathbf{r}, u) - q(\mathbf{r}, u + du)\, d\mathbf{r} + \\ + \int\limits_{\Delta\Omega} F\mathbf{r}, u)\, d\mathbf{r}\, du = -\int\limits_{\Delta S} (\mathbf{j}(\mathbf{r}, u), \mathbf{n})\, dS\, du, \tag{1.62}$$

где область $\Delta\Omega$ с кусочно-гладкой границей принадлежит Ω, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ΔS, плотность тока $\mathbf{j}$ имеет вид (1.60). Отсюда нетрудно извлечь уравнение замедления в дифференциальной

форме (см. пример 1.9.):

$$-\frac{\partial q}{\partial u} + F = -D\Delta\Phi,$$

где Φ выражается через q посредством (1.61). Следовательно, плотность замедления $q(\mathbf{r}, u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D}{\xi\Sigma_s}\Delta q + F.$$

После введения новой переменной τ, заданной в дифференциальной форме,

$$d\tau = \frac{D(u)}{\xi\Sigma_s(u)}du, \quad \tau(0) = 0, \tag{1.63}$$

возрастное уравнение (без учета поглощения) приобретает окончательный вид

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q + F_1,$$

где $F_1(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\xi\Sigma_s(u)}{D(u)}F(\mathbf{r}, u)$ при $u{=}u(\tau)$. Величина

$$\tau(u) = \int\limits_0^u \frac{D(u')\,du'}{\xi\Sigma_s(u'))} \tag{1.64}$$

имеет размерность квадрата длины и называется возрастом нейтронов.

Поставить задачи 1.180 – 1.185 для определения плотности замедления нейтронов без учета поглощения.

1.180. В однородном неограниченном замедлителе действует изотропный точечный источник, испускающий в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$.

1.181. Шар, радиус которого r_0, с характеристиками ξ_1, Σ_{s1} находится в среде с характеристиками ξ_2, Σ_{s2}. В центре действует изотропный точечный источник, испускающий в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$.

1.182. Замедлитель занимает полупространство и граничит с вакуумом. В замедлителе на расстоянии d от экстраполированной границы $x{=}0$ параллельно ей расположен линейный изотропный источник, испускающий в единицу времени с единицы длины q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$.

1.183. В однородном бесконечном замедлителе действуют изотропные плоские источники нейтронов, образующие решетку. Координаты источников $x_k = kd$, $k{\in}\mathbf{Z}$, каждый источник испускает с единицы площади за единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$.

1.184. В бесконечном однородном замедлителе действует изотропный сферический источник (сфера радиуса r'), с единицы площади которого в единицу времени испускается Q_0/S' быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$, где S' — площадь источника.

1.185. В бесконечном однородном замедлителе находится шар, радиус которого r_0. В шаре в результате деления рождается (равномерно по объему) Q_0 быстрых нейтронов в единицу времени с летаргией $u{=}0$.

1.186. В однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c{\ll}\Sigma_s$) действуют изотропные источники, испускающие в единицу объема за единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$.
1. Получить возрастное уравнение с учетом поглощения нейтронов, применяя соотношение (1.61) в форме

$$q(\mathbf{r}, u) = \xi\Sigma(u)\Phi(\mathbf{r}, u), \qquad \Sigma(u) = \Sigma_s + \Sigma_c(u).$$

2. Используя модель бесконечного замедлителя, найти вероятность $\varphi(u)$ того, что нейтрон избежит резонансного поглощения и окажется в состоянии с летаргией $u{<}0$.

1.187. В однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c{\ll}\Sigma_s$), занимающем полупространство ($z{>}0$), действует изотропный точечный источник, испускающий в единицу объема за единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u{=}0$. Источник расположен

на расстоянии z_0 от границы $z{=}0$ с вакуумом. Поставить задачу для определения плотности замедления нейтронов при условии, что нейтроны из вакуума не возвращаются.

1.188. Поставить задачу для определения плотности потока тепловых нейтронов в бесконечном однородном замедлителе со слабым поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$), в котором действует точечный изотропный источник, испускающий Q_0 быстрых нейтронов в единицу времени с летаргией $u{=}0$.

1.189. Гомогенный реактор на тепловых нейтронах занимает область Ω (слой, шар, цилиндр и т.п.). Поставить в диффузионно-возрастном приближении задачу для определения критических размеров реактора, если

1) пространственное распределение нейтронов одинаково для всех летаргий, а распределение по энергиям одинаково в любых точках;

2) плотность потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, u)$ принимает на экстраполированной границе одни и те же значения при любой летаргии;

3) делением ядер быстрыми нейтронами можно пренебречь.

1.190. Решить предыдущую задачу с учетом деление ядер быстрыми нейтронами; сечения рассеяния Σ_{sT}, поглощения Σ_T, деления Σ_{fT} в тепловой области и сечения $\Sigma_s(u)$, $\Sigma_c(u)$, $\Sigma_f(u)$ для $u \in [0, u_\tau]$ заданы.

1.191. В твердом теле, занимающем область Ω, движутся нейтроны. Так как нейтроны не имеют заряда, то они взаимодействуют с ядрами посредством столкновений. При этом происходит либо рассеяние, либо поглощение, либо захват нейтрона ядром с последующим делением ядра и испусканием вторичных нейтронов. Одна из моделей, в рамках которой изучается движение нейтронов, базируется на следующих предположениях:

1) концентрация нейтронов мала по сравнению с концентрацией ядер, так что можно не учитывать столкновения нейтронов между собой;

2) кинетическая энергия нейтронов много больше kT, где T — абсолютная температура среды, т.е. можно пренебречь тепловым движением ядер, кристаллическими эффектами и считать ядра свободными;

3) скорости всех нейтронов одинаковы по абсолютной величине: $\mathbf{v}=v\mathbf{l}$, где l — единичный вектор;

4) деление ядра после захвата нейтрона сопровождается испусканием без запаздывания $\nu \geq 1$ вторичных нейтронов.

Пусть в момент времени t нейтрон находится в точке с координатой $\mathbf{r}$ и имеет скорость $v\mathbf{l}$. Совокупность точек $(\mathbf{r},\mathbf{l})$ образует 5-ти мерное фазовое пространство. Плотность нейтронов $n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ в этом пространстве в момент времени t называется функцией распределения нейтронов, т.е. $n\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{l}$ — количество нейтронов в момент времени t в элементе объема $d\mathbf{r}$, скорости которых принадлежат интервалу $v\,d\mathbf{l}$. Пусть далее $w_s(\mathbf{l}',\mathbf{l})\,d\mathbf{l}$ — вероятность того, что нейтрон со скоростью $v\mathbf{l}'$ приобретет после рассеяния скорость $v\mathbf{l}$ в интервале $v\,d\mathbf{l}$, $w_f(\mathbf{l}',\mathbf{l})\,d\mathbf{l}$ — вероятность испускания вторичного нейтрона со скоростью $v\mathbf{l}$ в интервале $v\,d\mathbf{l}$ в результате деления ядра, вызванного захватом нейтрона, скорость которого $v\mathbf{l}'$, Σ_s, Σ_c, Σ_f — соответственно сечения рассеяния, поглощения, захвата нейтрона с последующим делением составного ядра, $F(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ — плотность источников нейтронов.

Показать, что функция $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l},t) = vn(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mathbf{l}\nabla\Phi) + \Sigma\Phi = \int\limits_{\mathbf{l}'} g(\mathbf{r},\mathbf{l}',\mathbf{l})\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l}',t)\,d\mathbf{l}' + \frac{1}{v}F, \qquad (1.65)$$

где

$$g(\mathbf{r},\mathbf{l}',\mathbf{l}) = \Sigma_s w_s(\mathbf{l}',\mathbf{l}) + \nu\,\Sigma_f\,w_f(\mathbf{l}',\mathbf{l}),$$

$\Sigma=\Sigma_s+\Sigma_c+\Sigma_f$, которое называется односкоростным кинетическим уравнением Больцмана, или уравнением переноса нейтронов.

1.192. Поставить задачу для определения функции $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению (1.65) в выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей S при $t>0$, если начальное распределение нейтронов $\Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{l})$, а вне Ω нет источников нейтронов.

1.193. Плоскость $z=0$ является общей границей двух однородных сред с различными физическими свойствами (индекс 1 соответствует отрицательным $z<0$, индекс 2 – положительным). В точке с координатами $x=y=0$, $z=d>0$ находится изотропный источник, испускающий в единицу времени Q_0 нейтронов, абсолютная величина скорости которых v. Поставить стационарную задачу для определения функции $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l})$.

1.194. Показать,что если нейтроны после рассеяния и вторичные нейтроны после деления ядра равномерно распределены по направлениям, то уравнение переноса (1.65) принимает вид:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\mathbf{l}\nabla\Phi)+\Sigma\Phi=\frac{\beta}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{l}'}\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l}',t)\,d\mathbf{l}'+F, \qquad (1.66)$$

где $\beta=\Sigma_s+\nu\,\Sigma_f$.

1.195. В диффузионном приближении плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ и плотность потока $\Phi(\mathbf{r},t)$ нейтронов в среде с коэффициентом диффузии D связаны соотношением $\mathbf{j}=-D\,\nabla\Phi$ (пример 1.11.) Получить в этом приближении уравнение диффузии из кинетического уравнения (1.66).

1.196. Распределение нейтронов $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ в слое ($|z|<l$) зависит от переменных z, $\mu=\cos\theta$, где θ — угол между векторами $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{l}$, и от t, при этом выполнены условия задачи 1.194. В слое действуют источники, испускающие $F(z,\mu,t)$ нейтронов в единице объема за единицу времени. Поставить задачу для определения функции $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ при $t>0$, если начальное распределение нейтронов $\Phi_0(z,\mu)$. Слой граничит с вакуумом, вне слоя источников нейтронов нет.

1.197. В однородной среде, занимающей область Ω с кусочно-гладкой границей S, движутся нейтроны, скорости которых могут иметь любые значения. Сечения рассеяния, поглощения и захвата нейтрона с последующим делением ядра равны соответственно $\Sigma_s(v)$, $\Sigma_c(v)$, $\Sigma_f(v)$, где $v = |\mathbf{v}|$ — абсолютная величина скорости нейтрона. Вероятность того, что нейтрон со скоростью $\mathbf{v}'=v'\mathbf{l}'$ после рассеяния приобретет скорость $\mathbf{v}=v\mathbf{l}$ в интервале $d\mathbf{v}=dv\,d\mathbf{l}$ равна $w_s(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})\,d\mathbf{v}$, вероятность испускания вторичного нейтрона со скоростью $\mathbf{v}$ в интервале $d\,\mathbf{v}$ в результате деления, вызванного захватом нейтрона, скорость которого $\mathbf{v}'$, равна $w_f(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})\,d\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{v}')$ — среднее число вторичных нейтронов. В среде действуют источники нейтронов, плотность которых $F(\mathbf{r}, v, \mathbf{l}, t)$. Нейтронное поле описывается функцией $\Phi(\mathbf{r}, v, \mathbf{l}, t) = vn(\mathbf{r}, v, \mathbf{l}, t)$, где $n(\mathbf{r}, v, \mathbf{l}, t)$ — функция распределения нейтронов, т.е. плотность нейтронов в фазовом пространстве переменных $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$. Вывести уравнение переноса нейтронов и получить условие 1) на границе S раздела двух сред с различными физическими свойствами; 2) на границе с вакуумом.

1.3. Модели газо- и гидродинамики

Пример 1.13. Система уравнений газодинамики для идеального газа в одномерном случае. Акустическое приближение. Газ (или жидкость) называется идеальным, если можно пренебречь теплообменом между внутренними элементами газа (локально адиабатический процесс) и вязкостью.

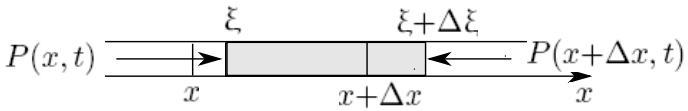

Рис. 1.9

Пусть газ заполняет трубку с площадью поперечного сече-

ния S (рис.1.9), где $\xi{=}\xi(x,t)$ — координата тонкого слоя газа (при $t{>}0$), который в положении равновесия (в момент времени $t{=}0$) имел координату x, $u(x,t)$ — отклонение слоя с равновесной координатой x в момент $t{>}0$ (см. пример 1.1.), $P(x,t)$ — давление газа, $\rho(x,t)$ — его плотность. Так как уравнение состояния связывает три термодинамические величины, то каждая из них (например энтропия, являющаяся при адиабатическом процессе постоянной величиной) выражается через ρ и P. Итак, нужно получить три уравнения для трех неизвестных функций ξ, ρ, P. Закон сохранения массы $\rho_0\Delta x{=}\rho\,\Delta\xi$ при $\Delta x \to 0$ принимает форму уравнения непрерывности $\rho_0{=}\rho\,\xi_x$. В газе без вязкости внутренние силы сводятся к силам давления, следовательно, уравнение второго закона Ньютона для элемента Δx газа запишется в виде Отсюда после применения формулы Лагранжа к правой части, деления на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получается уравнение движения Эйлера: $\rho_0 u_{tt}{=}{-}P_x$. Третьим является уравнение адиабаты. Так как $u(x,t){=}\xi(x,t){-}x$, то система уравнений газодинамики будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\rho_0 = \rho\,(1+u_x),\\ \rho_0 u_{tt} + P_x = 0,\\ P = P_0(\tfrac{\rho}{\rho_0})^{\gamma},\quad \gamma = \tfrac{C_P}{C_V}\,.\end{gathered} \tag{1.67}$$

$$\rho_0 S\Delta x\, u_{tt} = [-P(x+\Delta\, x,t) + P(x,t)\,]S.$$

Акустическим называется приближение, при котором величины $s{=}(\rho{-}\rho_0)/\rho_0$, и u_x достаточно малы: $|s|{\ll}1$, $|u_x|{\ll}1$. В этом приближении система (1.67) линеаризуется

$$S + u_x = 0, \tag{1.68}$$

$$\rho_0 u_{tt} + P_x = 0, \tag{1.69}$$

$$p = P_0\gamma s, \tag{1.70}$$

где $p = P - P_0$, и называется системой уравнений акустики. Из этой системы следует, что функция $u(x,t)$ (а также ρ и s) удо-

влетворяют волновому уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0}\,.$$

Функции ρ, s, u можно выразить через потенциал скоростей $\psi(x,t)$, который определяется соотношением

$$u_t = \psi_x. \tag{1.71}$$

Комбинация уравнений (1.69), (1.70)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 \psi_t + \gamma P_0\, s) = 0$$

преобразуется (интегрированием по x) в соотношение

$$\rho_0 \psi_t + \gamma P_0 s = f(t), \tag{1.72}$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Так как потенциал скоростей определен с точностью до слагаемого, градиент которого равен нулю, то замена

$$\psi \to \psi + \int_0^t f(\tau)\, d\tau + C,$$

где C — произвольная постоянная, превращает (1.72) в

$$s = -\frac{1}{a^2}\,\psi_t\,. \tag{1.73}$$

Результатом исключения функций s и u из уравнений (1.68), (1.71), (1.73) является уравнение для потенциала скоростей:

$$\psi_{tt} = a^2 \psi_{xx}.$$

Далее следует пример постановки задачи для идеального газа в акустическом приближении. В цилиндрической трубке ($0<x<l$)

с закрытыми концами находится идеальный газ, давление которого P_0 плотность ρ_0. В момент $t{=}0$ конец $x{=}l$ открывают. Поставить задачу для потенциала скоростей, если вне трубки находится тот же газ под давлением $P_0+\Delta P$, $|\Delta P|{\ll}P_0$.

На закрытом конце $u_t(0,t){=}0$ и в силу (1.71) $\psi_x(0,t){=}0$. Равенство давлений $P_0{+}p{=}P_0{+}\Delta P$ внутри и вне трубки на открытом конце влечет $\Delta P{=}p(l,t){=}\gamma P_0 s(l,t){=}\frac{-\gamma P_0}{a^2}\psi_t(l,t)$, откуда $\psi(l,t){=}-\frac{1}{\rho_0}\Delta P\,t{+}C_1$. Так как $s(x,0){=}0$, то $\psi_t(x,0){=}0$. Из равенства $u_t(x,0){=}0$ следует, что $\psi_x(x,0){=}0$, т.е. $\psi(x,0){=}C_2$. Так как $\psi(x,t)$ — непрерывная функция, то $C_1{=}\psi(l,0){=}C_2$. Потенциал $\psi(x,t)$ определен с точностью до аддитивной постоянной, что дает право выбрать $C_2{=}0$. Условия, которым удовлетворяет $\psi(x,t)$ формируют задачу:

$$\psi_{tt}=a^2\psi_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t,$$
$$\psi_x(0,t)=0,\quad \psi(l,t)=-\tfrac{1}{\rho_0}\Delta P\,t,$$
$$\psi(x,0)=\psi_t(x,0)=0\,.$$

Поставить задачи 1.198 – 1.207 для идеального газа в акустическом приближении; равновесные давление и плотность газа P_0 и ρ_0 соответственно.

1.198. Конец $x{=}l$ трубки $(0{<}x{<}l)$ с газом закрыт, а на конце $x{=}0$ находится легкий перемещающийся без трения поршень. В момент $t{=}0$ в результате продольного удара по поршню газ получает импульс I. Поставить задачу для отклонения $u(x,t)$.

1.199. Газ заполняет трубку $(0{<}x{<}l)$, конец $x{=}l$ которой открыт, а на конце $x{=}0$ находится подвижная перегородка. С момента времени $t{=}0$ перегородка движется по закону $u_0\sin\omega\,t$. Поставить задачу для скорости.

1.200. На конце $x{=}0$ трубки $(0{<}x{<}l)$ с газом находится подвижная перегородка. Конец $x{=}l$ закрыт поршнем (его масса равна

m), который закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k и перемещается без трения. С момента $t{=}0$ перегородка начинает двигаться со скоростью $v_0 \sin \omega t$. Поставить задачу для уплотнения $s(x,t)$.

1.201. В сечении $x{=}0$ трубки ($-l{<}x{<}l$) с газом, концы которой закрыты, находится легкий перемещающийся без трения поршень. Поршень медленно (изотермически) смещают на величину Δx ($|\Delta x|/l{=}\alpha{\ll}1$) и в момент $t{=}0$ отпускают без начальной скорости. Пренебрегая толщиной поршня, поставить задачу для давления.

1.202. Конец $x{=}0$ трубки ($0{<}x{<}l$) закрыт поршнем массы m, который закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k и перемещается без трения; на конце $x{=}l$ задано давление $P_0 + p_0(t)$, $p_0(0){=}0$. Площадь поперечного сечения трубки S_0, внешнее давление P_0, до момента $t{=}0$ газ находился в равновесном состоянии. Поставить задачу для давления.

1.203. Трубка ($0{<}x{<}l$) с закрытыми концами заполнена газом. С момента времени $t{=}0$ в сечении $x{=}x_0{\in}(0,\, l)$ действует источник того же газа мощности $Q(t)$. Поставить задачу для потенциала скоростей.

1.204. Часть ($x{>}0$) неограниченной трубки ($-\infty{<}x{<}\infty$) заполнена газом. В сечении $x{=}0$ находится поршень. С момента времени $t{=}0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью $v_0\,\mathbf{e_x}$. Поставить задачи для определения 1) потенциала скоростей газа; 2) давления в газе.

1.205. Конец полуограниченной трубки ($x{>}0$), заполненной газом, закрыт перегородкой. В момент времени $t{=}0$ перегородку убирают. Поставить задачи для определения 1) потенциала скоростей газа; 2) давления в газе, если вне трубки находится тот же газ, давление которого постоянно и равно P_1.

1.206. В сечении (x=0) неограниченной трубки ($-\infty<x<\infty$), заполненной одним и тем же газом, имеется неподвижная перегородка. Равновесные давление и плотность газа в трубке равны соответственно P_{10}, ρ_{10} при $x<0$ и P_{20}, ρ_{20} при $x>0$. В момент времени t=0 перегородку убирают. Поставить задачи для определения 1) потенциала скоростей газа; 2) давления в газе.

1.207. Тело, движущееся в газе, возбуждает в нем звуковые волны, т.е. является источником звука. Тело, совершающее гармонические колебательные или пульсационные движения по гармоническому закону, служит примером гармонического источника звука. Слой, граничные плоскости которого движутся в противофазе, неограниченный цилиндр или сфера, радиус которых зависит только от времени, представляют собой изотропные источники в одно-, двух- и трехмерном пространствах соответственно.

В идеальном газе с момента времени t=0 действует плоский изотропный источник звука (точечный источник в одномерном пространстве); отклонение давления от равновесного в точке, где находится источник, равно $p_0 \sin \omega t$. Поставить в акустическом приближении задачу для определения давления в газе, если равновесные давление и плотность равны P_0 и ρ_0 соответственно.

1.208. В неограниченной трубке ($-\infty<x<\infty$), площадь поперечного сечения которой S_1 при $x<0$, S_2 при $x>0$, распространяется звуковая волна $p=f(x-at)$, $p(x)$=0, $p'(x)=0$ при $x\geq 0$ ($p=P-P_0$ — давление в газе). Поставить задачу для определения давления.

Пример 1.14. Вывод системы уравнений гидродинамики идеальной жидкости (газа) в трехмерном пространстве. Состояние движущейся жидкости описывают следующие (достаточно гладкие) функции: $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ — скорость, $P(\mathbf{r},t)$ — давление, $\rho(\mathbf{r},t)$ — плотность; здесь $\mathbf{r}$ — координата фиксированной точки (координата Эйлера), t — время. Систему уравнений для определения $\mathbf{V}$, P, ρ формируют уравнение состояния, закон сохранения массы и уравнение движения. Уравнение состояния представля-

ет собой зависимость между какими-либо тремя термодинамические величины. Так как теплообмен между элементами жидкости отсутствует (локально адиабатический процесс), то уравнение состояния, связывающее давление, плотность и удельную энтропию, которая является постоянной, сводится к соотношению $\Phi(P,\rho)=0$. Например, для идеального газа это соотношение является уравнением адиабаты. Закон сохранения массы (1.32), где $w=\rho$, $\mathbf{q}=\rho\,\mathbf{V}$, $Q=0$, принимает форму уравнения непрерывности (или неразрывности) $\rho_t + div\,\rho\,\mathbf{V}=0$. Внутренними силами невязкой жидкости являются силы давления. На элемент $\Delta S \subset S$ действует сила $-P\mathbf{n}\,ds$ ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль), а на весь объем Ω — сила

$$-\int_S P\mathbf{n}\,ds = -\int_\Omega \nabla P\,d\mathbf{r};$$

преобразование интеграла по поверхности S в интеграл по Ω основано на формуле Остроградского. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ — объемная плотность сил, действующих на жидкость. Уравнение движения элемента жидкости, объем которого Ω

$$\int_\Omega \rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}\,d\mathbf{r} = -\int_\Omega \nabla P\,d\mathbf{r} + \int_\Omega \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$$

преобразуется, в виду произвольности Ω и непрерывности подынтегральных функций, в уравнение Эйлера

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{F}\,.$$

Частица жидкости перемещается вдоль траектории $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ со скоростью $\mathbf{V}=\dot{\mathbf{r}}$ поэтому

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\,\nabla)\,\mathbf{V}.$$

Вывод системы уравнений гидродинамики завершен:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \rho\, \mathbf{V} = 0, \tag{1.74}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\, \nabla)\, \mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\, \nabla P = \frac{1}{\rho}\, \mathbf{F}, \tag{1.75}$$

$$\Phi(\rho, P) = 0\,.$$

1.209. Вывести систему уравнений акустики

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial t} + div\, \mathbf{V} = 0, \\ &\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \\ &p = P_0 \gamma\, s, \end{aligned} \tag{1.76}$$

где $p{=}P{-}P_0$, $s{=}(\rho{-}\rho_0)/\rho_0$, $|p| \ll 1$, $|s| \ll 1$. Показать, что давление p (а также функции ρ и s) удовлетворяют волновому уравнению

$$p_{tt} = a^2 \Delta\, p, \qquad a^2 = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0}, \tag{1.77}$$

а скорость $\mathbf{V}$ — уравнению

$$\mathbf{V}_{tt} = a^2 \Delta\, \mathbf{V} + a^2 rot(rot\, \mathbf{V}(\mathbf{r}, 0)).$$

1.210. Пусть в момент $t{=}0$ поле скоростей газа потенциально, т.е. $\mathbf{V}{=}\nabla\psi$. Доказать, что в акустическом приближении 1) движение газа остается потенциальным при любом $t{>}0$; 2) $s{=}-\frac{1}{a^2}\psi_t$; 3) функции s, ψ, $\mathbf{V}$ удовлетворяют однородному волновому уравнению.

1.211. Конец $x{=}l$ трубки $(0{<}x{<}l)$ открыт, а конец $x{=}l$ закрыт поршнем; давление и плотность идеального газа, заполняющего трубку равны P_0 и ρ_0 соответственно. С момента времени $t{=}0$ поршень движется по закону $\mu(t)$. Поставить в акустическом приближении задачу для давления газа в трубке, если ее диаметр

мал по сравнению с длинной волны в газе, а площадь поперечного сечения $S(x)$ мало меняется на расстоянии порядка диаметра: $((\sqrt{S})_x \ll 1)$.

Поставить задачи 1.212 – 1.215 для потенциала скоростей идеального газа в акустическом приближении; равновесные давление и плотность газа P_0 и ρ_0 соответственно.

1.212. Сферический сосуд, радиус которого равен r_0, заполнен газом. С момента времени $t{=}0$ радиус сферы меняется по закону $r(t){=}r_0(1 + \alpha(\theta, \varphi) \sin \omega t)$, где $|\alpha| \ll 1$.

1.213. Длинный полый цилиндр, радиус которого r_0, заполненный газом, движется со скоростью $V_0\,\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор, перпендикулярный оси цилиндра. В момент времени $t{=}0$ цилиндр мгновенно останавливается.

1.214. В полом цилиндре ($r{<}r_0$, $0{<}\varphi{\le}2\pi$, $0{<}z{<}l$) находится газ. С момента времени $t{=}0$ основание $z{=}0$ цилиндра начинает двигаться по закону $z(r, \varphi, t){=}l\,\alpha(r, \varphi)\,\sin \omega t$, $|\alpha| \ll 1$; остальная поверхность цилиндра неподвижна.

1.215. Сфера, радиус которой r_0, заполнена газом. С момента $t{=}0$ в центре действует источник того же газа мощности $Q(t)$.

1.216. Идеальный газ заполняет все пространство, его плотность ρ_0 давление P_0. В начальный момент времени в газе возникает уплотнение $s_0(\mathbf{r})$ при нулевых начальных скоростях. Поставить задачу для определения функции $s(\mathbf{r}, t)$.

Пример 1.15. Твердое тело с гладкой поверхностью совершает малые гармонические колебания в пространстве, заполненном идеальным газом. Движение тела происходит в некотором фиксированном направлении, амплитуда колебаний мала по сравнению с размерами тела. Поставить в акустическом приближении задачу для определения установившегося давления в газе.

Если тело движется по закону $A\cos\omega t = \mathbf{Re}(A\,e^{i\omega t})$, то зависимость от времени всех величин, характеризующих газ, определяются множителем $e^{i\,\omega t}$:

$$P(\mathbf{r},t) = P_0 + \mathbf{Re}\,(p(\mathbf{r})\,e^{i\,\omega t}), \qquad \mathbf{V}(\mathbf{r},t) = \mathbf{Re}\,(\mathbf{v}(\mathbf{r})\,e^{i\,\omega t}).$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1.77) и во второе уравнение системы (1.76) приводит к уравнению Гельмгольца

$$\Delta\, p + k^2 p = 0, \qquad k = \frac{\omega}{a} \tag{1.78}$$

и соотношению

$$\nabla p = -i\,\rho_0 \omega\,\mathbf{v}\,. \tag{1.79}$$

В граничном условии

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} + i\,\rho_0\,\omega\,v_{\mathbf{n}}\right)\Big|_S = 0,$$

вытекающим из (1.79), границу S можно считать неподвижной, так как амплитуда колебаний мала по сравнению с размерами тела.

Среди решений уравнения (1.77) содержатся

$$P_1 = \frac{A_1}{r}\,e^{i\,(\omega t - kr)}, \qquad P_2 = \frac{A_2}{r}\,e^{i\,(\omega t + kr)},$$

что можно проверить подстановкой функций P_1 и P_2 в уравнение. Функция P_1 описывает расходящуюся сферическую волну и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P_1}{\partial r} + ikP_1 = -\frac{P_1}{r}.$$

Таким образом, при $r \to \infty$

$$P_1 = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\partial P_1}{\partial r} + ikP_1 = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.80}$$

Эти соотношения называются условиями излучения и служат для выделения расходящейся волны [72]. В данной задаче сходящаяся волна не может возникнуть. Функция P_2, описывающая сходящуюся сферическую волну, не удовлетворяет условию (1.80). Действительно,

$$\frac{\partial P_2}{\partial r} + ikP_2 = -\frac{P_2}{r} + 2ikP_2 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

Итак, если тело занимает ограниченную область Ω_1 с гладкой границей S, то определение давления $P(\mathbf{r},t)=P_0 + \mathbf{Re}\,(p(\mathbf{r})\,e^{i\,\omega t})$ сводится к решению внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \ \text{ в } \ \Omega = R^3/\overline{\Omega}_1,$$
$$\left(\tfrac{\partial p}{\partial n} + i\,\rho_0\omega\,v_n\right)\Big|_S = 0,$$
$$p = O(\tfrac{1}{r}), \quad \tfrac{\partial p}{\partial r} + i\,k\,p = o(\tfrac{1}{r}), \quad r \to \infty\,.$$

Поставить в акустическом приближении внешние краевые задачи 1.217– 1.219 для определения установившегося давления $P(\mathbf{r},t)=P_0 + Re(p(\mathbf{r})\,e^{i\omega t})$ в идеальном газе.

1.217. Сфера, радиус которой r_0, совершает малые гармонические колебания вдоль фиксированной оси по закону $A\sin\omega\,t$.

1.218. Пространство вне сферы заполнено газом; радиус сферы меняется по закону $r_0(1+\alpha\,\cos\omega\,t)$, $|\alpha|\ll 1$.

1.219. Длинный цилиндр, радиус которого r_0, совершает малые гармонические колебания в направлении постоянного вектора, перпендикулярного оси, по закону $A\,\cos\omega t$.

1.220. Пространство вне цилиндра заполнено газом; радиус цилиндра меняется по закону $r_0(1+\alpha\,\cos\omega\,t)$, $|\alpha|\ll 1$.

1.221. Плоская звуковая волна $P_0 e^{i(\omega t - kz)}$, где $k{=}\omega/a$, падает на неподвижный шар, радиус которого r_0. Поставить в акустическом приближении задачу для определения давления в рассеянной волне; давление и плотность невозмущенного газа P_0 и ρ_0 соответственно.

1.222. Идеальная жидкость заполняет полупространство ($z{>}0$) и граничит с воздухом ($z{<}0$), давление которого постоянно. Из воздуха на поверхность жидкости падает (перпендикулярно к поверхности) моделированная электромагнитная волна (например, лазерный луч). В жидкости интенсивность луча экспоненциально убывает с ростом величины z:

$$I(z,t) = I_0 f(t) e^{-\alpha z}, \quad z > 0,$$

где $f(t)$ — форма лазерного луча, α — коэффициент поглощения света. Следовательно, основная доля энергии луча поглощается тонким приграничным слоем, толщина которого $\sim 1/\alpha$. Из-за повышения температуры слой расширяется и возбуждает в жидкости звуковую волну. Математическое моделирование этого процесса основано на следующих допущениях (см.[12]).

1. Движение жидкости описывается системой уравнений акустики ((1.76), задача 1.209.), последнему из которых (уравнению состоянию) можно придать форму $P{=}c_0^2\rho'$, где c_0 — скорость звука в жидкости, $\rho'{=}\rho{-}\rho_0$. В уравнение состояния нужно внести слагаемое, учитывающее термоупругие напряжения. Так как в линейном приближении $\rho'{=}\rho_0\beta T'$, где β — коэффициент теплового расширения, T' — отклонение температуры от равновесной, то уравнение состояния запишется в виде

$$P = c_0^2(\rho' + \beta\rho_0 T').$$

2. Термодиффузия мало влияет на возбуждение звука, поэтому в уравнении теплопроводности можно пренебречь членом $k\Delta T'$.

Показать, что скорость жидкости $\mathbf{V}(z,t)=V(z,t)\mathbf{e}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \alpha^2 c_0^3 N f(t) e^{-\alpha z}, \quad z > 0$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = \alpha c_0 N f(t), \qquad N = \frac{\beta I_0}{\beta c_0 C},$$

где C — удельная теплоемкость жидкости.

1.223. Решить предыдущую задачу, если на поверхности жидкости находится тонкая прозрачная неподвижная пластинка, через которую проходит в жидкость лазерный луч.

Пример 1.16. Поставить задачу о потенциальном обтекании тела, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$. Выразить давление на поверхности тела через потенциал скоростей.

В данном случае потенциальность движения сохраняется во времени. Это следует из уравнения (1.75), которое при условии $div\,\mathbf{V}=0$ (см.(1.74)) и $\mathbf{F}=0$ запишется в форме

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} + [\,\omega\,\mathbf{V}\,] + \frac{1}{\rho_0}\nabla P = 0, \quad \omega = rot\,\mathbf{V}.$$

Применение операции rot ведет к уравнению $\omega_t + rot\,[\,\omega\,\mathbf{V}\,] = 0$, или в силу тождества $rot\,[\,\omega\,\mathbf{V}\,] = (\mathbf{V}\,\nabla)\,\omega - (\omega\,\nabla)\,\mathbf{V}$

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega\,\nabla)\,\mathbf{V}.$$

В классе функций $\omega \in C^1$ задача Коши для полученного уравнения с начальным условием $\omega(\mathbf{r},0)=0$ имеет единственное решение $\omega(\mathbf{r},t)=0$.

Пусть тело занимает в $\mathbf{R^3}$ область Ω_1 с кусочно-гладкой границей S. Так как $\rho=\rho_0$, $\mathbf{V}=\nabla\psi$, то из (1.74) следует, что $\Delta\Psi=0$. В точках S нормальные составляющие скорости твердого тела и жидкости равны, т.е.

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = (\mathbf{V}\,\mathbf{n})|_S.$$

На бесконечности скорость жидкости равна нулю, следовательно, $\psi(\mathbf{r})\to C$ при $r\to\infty$. Так как потенциал скоростей определен с точностью до аддитивной постоянной, то можно принять $C=0$.

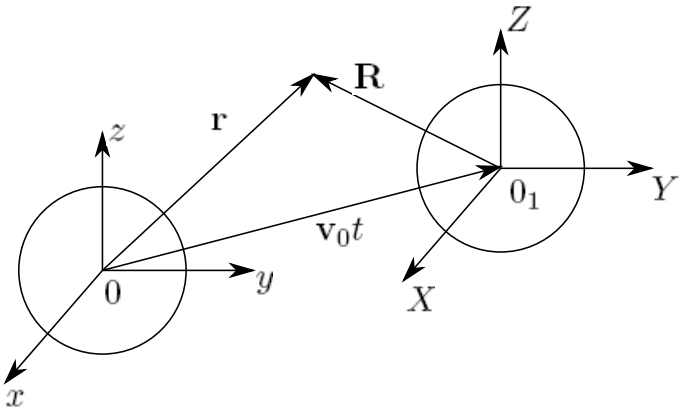

Рис. 1.10

В системе координат, начало которой связано с телом (рис.1.10),

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{V}_0 t,\ \psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r}+\mathbf{V}_0 t) = \Psi(\mathbf{r},t);$$

поскольку $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$ и т.д., то Ψ — решение задачи

$$\Delta\Psi = 0 \qquad \Omega = \mathbf{R_3}/\overline{\Omega_1},$$
$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_S = V_{0n},\ \lim_{R\to\infty}\Psi = 0.$$

В данном случае $rot\,\mathbf{V}=0$, поэтому $(\mathbf{V}\,\nabla)\mathbf{V}=\frac{1}{2}\nabla V^2$ и уравнение (1.75) при $\mathbf{F}=0$ преобразуется к виду

$$\nabla\left(\psi_t+\frac{1}{2}V^2+\frac{P}{\rho_0}\right)=0,$$

откуда

$$\psi_t+\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{\rho_0}P=f(t).$$

Так как на бесконечности $P=P_0,\ \psi=0,\ V=0,$ то $f(t)=P/\rho_0$ и

$$P=P_0-\frac{\rho_0\,V^2}{2}-\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Если задача для Ψ решена, то $\psi_t=-(\mathbf{V}_0\,\nabla\Psi)$ и давление на S

$$P|_S=P_0-\,\rho_0\left(\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2-(\mathbf{V}_0\,\nabla\Psi)\right)\Big|_S.$$

Поставить задачи 1.224 – 1.228 для потенциала скоростей идеальной несжимаемой жидкости.

1.224. Неподвижный цилиндр, радиус которого r_0, находится в стационарном плоскопараллельном потоке жидкости, скорость которой на бесконечности $V_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор, перпендикулярный оси цилиндра.

1.225. Шар, радиус которого r_0, движется в жидкости со скоростью $V(t)\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор. Выразить давление на поверхности шара через потенциал скоростей.

1.226. Радиус шара, находящегося в жидкости, меняется со временем по закону $r_0=r_0(t)$. Выразить давление на поверхности шара через потенциал скоростей.

1.227. В момент времени $t=0$ в жидкости возникает сферическая полость, внутри которой — вакуум, радиус полости r_0.

1.228. Вне твердого неподвижного шара, радиус которого r_0, на расстоянии d от центра расположен точечный источник жидкости мощности Q_0, действующий столь долго, что течение можно считать установившимся.

1.229. Линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q_0, расположен параллельно твердому неподвижному цилиндру(его радиус r_0) на расстоянии $d{>}r_0$ от его оси. Источник действует достаточно долго, так что движение жидкости можно считать установившимся.

Пример 1.17. Идеальная несжимаемая жидкость со свободной поверхностью заполняет бассейн конечной глубины, внешнее давление на поверхности P_0. Поставить задачу о потенциальном движении жидкости под действием силы тяжести.

Давление и скорость жидкости удовлетворяют уравнениям (1.74), (1.75), в которых $\rho{=}\rho_0$, $\mathbf{F}{=}\mathbf{g}$:

$$div\,\mathbf{V} = 0, \tag{1.81}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\,\nabla)\,\mathbf{V} + \nabla\frac{P}{\rho_0} = \mathbf{g} \tag{1.82}$$

Так как свойство потенциальности движения сохраняется во времени (пример 1.16.), то задачу естественно поставить для потенциала скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$. Функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\,\psi{=}0$, а граничные условия на свободной поверхности выражают следующие свойства: 1) внутреннее и внешнее давления на поверхности одинаковы; 2) при движении жидкости ее частицы не пересекают поверхность.

Для реализации первого условия нужно решить уравнение (1.82) относительно P. Поскольку $(\mathbf{V}\,\nabla)\mathbf{V}{=}\nabla V^2/2$ (при условии $rot\,\mathbf{V} = 0$), то в прямоугольной системе координат, начало которой находится на поверхности невозмущенной жидкости, а ось $0z$ направлена по $-\mathbf{g}$, уравнение (1.82) запишется в виде

$$\nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{\rho_0}P + g\,z\right) = 0,$$

откуда

$$P + \rho_0 \left(\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + g\, z \right) = (f(t) + C)\rho_0.$$

Если включить $f(t)$ в ψ (пример 1.13.), то при $C{=}P_0/\rho_0$

$$P = P_0 - \rho_0 \left(\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + g\, z \right). \tag{1.83}$$

Пусть $z{=}\zeta(x, y, t)$ — уравнение поверхности жидкости, тогда равенство давлений $P|_{z=\zeta}{=}P_0$ будет выполнено, если

$$\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + g\, z = 0, \qquad z = \zeta(x, y, t). \tag{1.84}$$

Второе условие означает, что нормальные компоненты v_n и V_n скоростей точки поверхности и соответственно жидкости в этой точке одинаковы. Дифференцирование по t тождества $F(x(t), y(t), z(t), t){=}0$, где $F(x, y, z, t) = z{-}\zeta(x, y, z, t)$, приводит к соотношению $(\mathbf{v}\,\nabla F){+}F_t{=}0$. Отсюда в силу $v_n{=}V_n$ следует второе граничное условие $(\mathbf{V}\,\nabla\mathbf{F}) + F_t = 0$ или

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial z} - (\nabla\psi\,\nabla\zeta), \qquad z = \zeta(x, y, t). \tag{1.85}$$

На дне бассейна нормальная компонента скорости жидкости равна нулю, и если поверхность дна задана уравнением $z{=}{-}h_0(x, y) \in C^1$, то

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + (\nabla\psi\,\nabla h_0) = 0, \qquad z{=}-h_0(x, y). \tag{1.86}$$

Совокупность уравнений для потенциала скоростей образуют нелинейную систему:

$$\begin{gathered} \Delta\,\psi(x, y, z, t) = 0, \\ (x, y) \in \Omega, \;\; -h_0(x, y) < z < \zeta(x, y, t), \\ \left.\begin{aligned} &\psi_t + \tfrac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + g\,\zeta = 0, \\ &\zeta_t + (\nabla\psi\,\nabla\zeta) - \psi_z = 0, \end{aligned}\right\} \quad z = \zeta(x, y, t), \\ \psi_z + (\nabla\psi\,\nabla h_0) = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_0(x, y). \end{gathered} \tag{1.87}$$

При $t{=}0$ должны быть заданы положение $\zeta(x,y,0){=}\zeta_0(x,y)$ свободной поверхности жидкости и скорость $\mathbf{V}(x,y,0,0){=}\nabla\psi_0(x,y)$ жидкости на поверхности; это приводит к начальным условиям для потенциала

$$\psi=\psi_0(x,y),\ \ \psi_t=-\frac{1}{2}(\nabla\psi_0)^2{-}g\zeta_0(x,y)\ \text{при}\ \ t=0\ \ \text{и}\ z=\zeta_0(x,y)$$

Необходимо также указать условия на границе области Ω — равенство нормальных компонент скоростей точки границы и жидкости в этой точке:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\alpha(M,t),\ \ M\in\partial\Omega,$$

где $\alpha(M,t)$ — известная функция.

В отличие от многих задач для уравнения Лапласа, при постановке которых задается одно условие на известной границе, в данном случае ставятся два условия, так как наряду с ψ неизвестно положение поверхности жидкости.

1.230. Твердое тело плавает на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (рис.1.11). Тело занимает область Ω_1, жидкость — область Ω, S_1 — их общая гладкая граница, S — свободная поверхность жидкости.

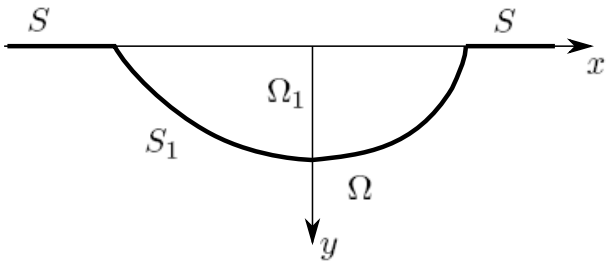

Рис. 1.11

Вследствие удара в момент времени $t = 0$, направленного вдоль $\mathbf{e}_g$, тело начинает двигаться поступательно. Поставить задачу для определения поля скоростей жидкости в момент времени $t = +0$, если в этот момент скорость тела $V_0\mathbf{e}_g$. Рассмотреть частные случаи: 1) Ω_1 — ограниченная область в $\mathbf{R^3}$ ($\Omega_1 \cup \Omega \cup S_1$ — полупространство); 2) тело представляет собой длинный цилиндр с поперечным сечением Ω_1 ($\Omega_1 \cup \Omega \cup S_1$ — полуплоскость).

Идеальная несжимаемая жидкость, глубина которой h, находится в состоянии равновесия под действием сил тяжести и постоянного внешнего давления P_0. Свободная поверхность жидкости — плоскость, перпендикулярная вектору ускорения свободного падения g. В результате внешнего воздействия на поверхности возникает возмущение, которое под влиянием поля тяжести распространяется по поверхности в виде волн, называемых гравитационными. Поставить задачи 1.231 – 1.234 для определения движения жидкости в гравитационной волне, если амплитуда колебаний A много меньше длины волны λ (малые колебания), а длина волны мала по сравнению с глубиной жидкости: $A \ll \lambda \ll h$.

1.231. Жидкость заполняет 1) неограниченный бассейн, глубина которого h_0; 2) полупространство $z<0$.

1.232. Жидкость находится в прямоугольном бассейне со сторонами l_1 и l_2, глубина которого h_0.

1.233. Жидкость заполняет прямолинейный бесконечно глубокий канал. Гравитационные волны обусловлены мгновенным изменением в момент времени $t=0$ внешнего давления, импульс которого $I(x)$, и начальным отклонением $\zeta(x,0)=\zeta_0(x)$ свободной поверхности жидкости от равновесного положения (система координат такая же, как и в примере 1.17, с осью Ox, направленной вдоль канала).

1.234. Две несмешивающиеся жидкости граничат по плоскости $z{=}0$. Одна из жидкостей имеет плотность ρ_2 и заполняет полупространство $z{<}0$, другая, плотность которой $\rho_1{<}\rho_2$, представляет собой слой ($0{<}z{<}h$). Рассмотреть случаи: поверхность $z{=}h$ 1) свободна; 2). ограничена неподвижной плоскостью.

1.235. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет канал с прямоугольным поперечным сечением; ширина канала постоянна и равна d, поверхность дна задана уравнением $z{=}{-}h_0(x)$ (используется та же координатная система, что и в примере 1.17. с осью $0x$, параллельной оси канала). Вдоль канала распространяются длинные гравитационные волны малой амплитуды (амплитуда A много меньше глубины канала, а глубина мала по сравнению с длиной волны λ): $A{\ll}h_0{\ll}\lambda$. Начальные и граничные условия зависят только от x, трение на стенках канала пренебрежимо мало. Пусть $z{=}\zeta(x,t)$ — уравнение поверхности жидкости. Показать, что 1) функция ζ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h_0(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right);$$

2) вдоль канала постоянной глубины h_0 могут распространяться волны $\zeta_1 = f_1(x-at)$ и $\zeta_2 = f_2(x+at)$ со скоростями a (прямая волна) и $-a$ (обратная волна) соответственно, сохраняющие форму, f_1 и f_2 — произвольные функции класса C^2, $a{=}\sqrt{gh_0}$.

1.236. Вывести уравнение для функции $\zeta(x,t)$ (см.задачу 1.235.), если площадь поперечного сечения канала $S_0(x)$, а ширина на уровне свободной поверхности $d(x)$; диаметр поперечного сечения (его форма любая) мал по сравнению с длиной волны.

1.237. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет бассейн, поверхность дна которого задана уравнением $z{=}{-}h_0(x,y)$ (система координат та же, что и в примере 1.17.) В жидкости возбуждаются длинные гравитационные волны малой амплитуды

A ($A \ll h_0 \ll \lambda$). Пусть $z=\zeta(x,y,t)$ — уравнение поверхности жидкости. Показать, что функция ζ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g\, div\,(h_0(x,y)\,\nabla\zeta). \tag{1.88}$$

1.238. В задаче 1.235 рассмотрены волны малой амплитуды. Показать, что для волн произвольной амплитуды (все остальные условия те же) функции $h = h_0 + \zeta$, $u=V_x$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &h_t + (u\,h)_x = 0,\\ &u_t + u\,u_x + g\,h_x = 0, \end{aligned} \tag{1.89}$$

называемых уравнениями мелкой воды.

1.239. Показать, что одномерное плоское движение идеального газа описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} &v_t + v\,v_x + \tfrac{2}{\gamma-1} c\,c_x = 0,\\ &c_t + \tfrac{\gamma-1}{2} c\,v_x + v\,c_x = 0, \end{aligned} \tag{1.90}$$

где $c=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$ — скорость звука в газе, v — скорость газа.

1.240. В длинной трубе ($-\infty<x<\infty$) с поршнем находится идеальный газ, давление и плотность которого P_0 и ρ_0 соответственно. С момента времени $t=0$ поршень движется по закону $x=\mu(t)$, $\mu(0)=0$, $\mu(t)\in C^1(t\geq 0)$. Поставить задачу о движении газа в области $x>\mu(t)$.

1.241. Двухмерное стационарное течение идеального газа на бесконечности (вверх по течению) представляет собой однородный плоскопараллельный поток, скорость газа в котором v_0, скорость звука c_0. При потенциальном обтекания заданного двухмерного профиля (9.1) структура потока меняется. Показать, что такое течение описывается системой уравнений

$$(v_x^2 - c^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + 2v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (v_y^2 - c^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0,$$

$$c^2 = c_0^2 - \tfrac{\gamma-1}{2}(v^2 - v_0^2). \tag{1.92}$$

1.242. Звезда белый карлик, один из компактных объектов (см. задачу 1.306), представляет собой шар из вырожденного электронного газа. Давление P и плотность rho газа связаны уравнением

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}},\ n > 0.$$

Состояние звезды устойчиво, если действие гравитационных сил в каждой точке уравновешивается силами давления.

1. Применяя классическую теорию тяготения, получить уравнение равновесия звезды

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(\frac{\rho}{r}\frac{dP}{dr}\Big) = -4\pi G\rho,$$

где G —гравитационная постоянная.

2. Показать, что в безразмерных переменных

$$\rho = \rho(0)\theta^n,\ r = a\xi,\ a = \Big[\frac{(n+1+K\rho(0)^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

функция $\theta(\xi)$ — решение задачи Коши для уравнения Лейна-Эмдена:

$$\begin{cases} \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n,\ 0 < \xi, \\ \theta(0) = 1,\ \theta' = 0. \end{cases}$$

Пример 1.18. Вывод системы уравнений Буссинеска. Хотя уравнения (1.87) моделируют идеализированную физическую систему, они представляют собой сложный объект для исследования. Поэтому изучаются различные предельные случаи, поддающиеся анализу. Одно из физически содержательных приближений получается при условии, что длина волны, распространяющейся в слое жидкости постоянной глубины h велика по сравнению с глубиной, т.е. $h/\lambda \ll 1$. Для реализации этого приближения удобно перейти к безразмерным переменным

$$\frac{x}{\lambda},\quad \frac{z+h}{h},\quad \frac{t}{t_0},\quad \frac{\zeta}{A},\quad \frac{\psi}{B}.$$

Здесь A — амплитуда волны, $t_0{=}\lambda/a$, $a{=}\sqrt{gh}$ — скорость распространения волны в линейном приближении (задача 1.235.); из второго уравнения системы (1.87.), записанного в новых переменных (они обозначены прежними символами),

$$\frac{B}{t_0}\psi_t + \frac{B^2}{2\lambda^2}\psi_x^2 + \frac{B^2}{2h^2}\psi_z^2 + g\,A\,\zeta = 0$$

следует, что $B{=}g\,t_0 A$. Введение безразмерных переменных преобразует систему (1.87) к виду

$$\left.\begin{array}{l} \beta\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0, \quad 0 < z < 1 + \alpha\zeta, \\ \psi_t + \frac{\alpha}{2}\psi_x^2 + \frac{\alpha}{2\beta}\psi_z^2 + \zeta = 0, \\ \zeta_t + \alpha\psi_x\zeta_x - \frac{1}{\beta}\psi_z = 0, \end{array}\right\} \quad z = 1 + \alpha\zeta, \qquad (1.93)$$
$$\psi_z|_{z=0} = 0,$$

где $\alpha{=}A/h$, $\beta{=}h^2/\lambda^2$ — безразмерные параметры.

Пусть

$$\psi(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,t) z^n.$$

Этот ряд будет формальным решением 1-го уравнения системы (1.93), если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n(x,t) z^{n-2} = 0,$$

откуда

$$(n+1)(n+2) f_{n+2} = -\beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}, \qquad n \in \mathbf{N}_0.$$

Из условия $\psi_z|_{z=0}{=}0$ следует, что $f_1{=}0$, поэтому $f_{2m+1}{=}0$ при $m \in \mathbf{N}_0$; остальные коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$(2m+1)(2m+2) f_{2m+2} = -\beta \frac{\partial^2 f_{2m}}{\partial x^2}, \quad m \in \mathbf{N})0. \qquad (1.94)$$

Если записать n тождеств (1.94) для $m{=}0, 1, 2, \ldots, n{-}1$ и каждое продифференцировать по x в зависимости от номера $2(n{-}m{-}1)$ раз, то это приведет к следующей системе:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\,\frac{\partial^{2(n-1)} f_2}{\partial^{2(n-1)} x} &= -\beta\,\frac{\partial^{2n} f_2}{\partial x^{2n}},\\ 3\cdot 4\,\frac{\partial^{2(n-2)} f_4}{\partial^{2(n-2)} x} &= -\beta\,\frac{\partial^{2(n-1)} f_2}{\partial x^{2(n-1)}},\\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ (2n-1)\cdot 2n\ f_{2n} &= -\beta\,\frac{\partial^2 f_{2(n-1)}}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Посредством почленного перемножения этих n тождеств получается соотношение

$$(2n)!\, f_{2n} = (-1)^n \beta^n \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}, \qquad f = f_0.$$

Таким образом,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}.$$

Граничные условия на свободной поверхности принимают вид

$$\zeta + f_t + \frac{\alpha}{2}\, f_x^2 - \\ -\frac{\beta}{2}\,(1+\alpha\zeta)^2\,(f_{xxt} + \alpha\, f_x\, f_{xxx} - \alpha\, f_{xx}^2) + O(\beta^2), \quad (1.95)$$

$$\zeta_t + ((1+\alpha\,\zeta)\, f_x)_x - \\ -\frac{\beta(1+\alpha\zeta)^2}{2}\,\left[\frac{1}{3}\,(1+\alpha\,\zeta)\, f_{xxxx} + \alpha\,\zeta_x\, f_{xxx}\right] + O(\beta^2)\,. \quad (1.96)$$

Пусть α и β — малые величины одного порядка; если в уравнениях (1.95) сохранить члены первого порядка по β и ввести

функцию $u{=}f_x$ то получится нелинейная система уравнений Буссинеска

$$\begin{aligned} &u_t + \alpha\, u\, u_x + \zeta_x - \tfrac{\beta}{2} u_{xxt} = 0, \\ &\zeta_t + \left[\,(1+\alpha\,\zeta)\,u\,\right]_x - \tfrac{\beta}{6} u_{xxx} = 0. \end{aligned} \tag{1.97}$$

Эта система описывает распространение нелинейных волн малой амплитуды на мелкой воде.

1.243. Вывести систему уравнений мелкой воды (1.89) из системы уравнений Буссинеска (1.97).

1.244. Показать, что волны малой амплитуды, распространяющиеся на мелкой воде только в одном направлении, описываются (в размерных переменных) уравнением КдФ

$$\zeta_t + a\left(1 + \frac{3\zeta}{2h}\right)\zeta_x + \frac{1}{6}h^2 a\,\zeta_{xxx} = 0, \tag{1.98}$$

где h — глубина жидкости, $a{=}\sqrt{gh}$ — скорость волны в линейном приближении.

Поставить задачи 1.245–1.248 для определения скорости $\mathbf{V}$ вязкой несжимаемой жидкости, пренебрегая действием массовых сил. Функция $\mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \nu\Delta\mathbf{V}, \tag{1.99}$$

где ν — кинематическая вязкость, скорость жидкости у твердой поверхности равна скорости соответствующей точке поверхности.

1.245. Жидкость заполняет пространство между параллельными плоскостями $x{=}0$ и $x{=}l$. Плоскость $x{=}0$ неподвижна, а плоскость $x{=}l$ движется с момента $t{=}0$ с постоянной скоростью $V_0\mathbf{e}_z$. Давление вдоль оси $0x$ постоянно.

1.246. Стационарный поток жидкости течет в трубе ($0<z<l$), поперечное сечение которой постоянно (область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$); давление на концах трубы $P(0)=P_1$ и $P(l)=P_2$, где P_1 и P_2 — постоянные величины.

1.247. Неподвижный полый цилиндр, радиус которого r_0, высота l, заполнен жидкостью. С момента $t=0$ цилиндр начинает вращаться около своей оси с постоянной угловой скоростью ω.

1.248. В полубесконечной трубе ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z$) течет стационарный поток жидкости, скорость которой в сечении $z=0$ постоянна и равна $u_0\mathbf{e}_z$. Считая, что $V_r \ll V_z$, $\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}$, линеаризовать систему уравнений гидродинамики, заменив множитель V_z в нелинейных членах уравнений средним по сечению значением скорости $\mathbf{V}$.

Пример 1.19. Движение жидкостей и газов в пористых средах называется фильтрацией. В теории фильтрации рассматриваются среды, размер пор в которых достаточно мал. Поэтому среду с заполняющей ее жидкостью или газом считают сплошной. Количественной характеристикой пористой среды служит коэффициент пористости m — отношение объема пор в выделенном элементе к объему этого элемента.

Фильтрация — медленный процесс, поэтому полагают, что температура среды равна температуре внешнего пространства (изотермическая фильтрация). Следовательно, для описания движения жидкости или газа достаточно задать скорость $V(\mathbf{r},t)$, плотность $\rho(\mathbf{r},t)$ и давление $P(\mathbf{r},t)$ (см. пример 1.14.) Одно из уравнений — уравнение непрерывности — следует из закона сохранения (1.32), где $w=m\rho$, $\mathbf{q}=\rho\mathbf{V}$, $Q=0$, и имеет вид

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + div\,\rho\mathbf{V} = 0. \qquad (1.100)$$

Второе уравнение связывает скорость фильтрации V и давление

P (внешние силы отсутствуют)

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\mu}\nabla P \tag{1.101}$$

и называется законом Дарси. Здесь k — коэффициент проницаемости среды, μ— коэффициент динамической вязкости жидкости. Вывод системы уравнений фильтрации завершается написанием уравнения состояния, которое в изотермическом случае имеет вид $\rho{=}\rho\,(P)$.

Если жидкость или газ находятся в поле внешних сил $\mathbf{F}$, то закон Дарси (1.101) неприменим. В этом случае используется уравнение Эйлера (1.75) при следующих допущениях: 1) для учета трения, обусловленного вязкостью, в уравнение (1.75) вводят слагаемое $\mathbf{F}_c$ — силу сопротивления, действующую на единицу объема жидкости, — и предполагают, что ее структура не зависит от внешних сил $\mathbf{F}$ (гипотеза Жуковского); 2) фильтрация мало отличается от равномерного движения, так что можно пренебречь инерционным членом $\rho\, d\mathbf{V}/dt$. Этой модели соответствует уравнение $\nabla P = \mathbf{F} + \mathbf{F}_c$; при $\mathbf{F}{=}0$ оно совпадает с (1.101), откуда $\mathbf{F}_c{=}-\frac{\mu}{k}\mathbf{V}$. Таким образом, скорость фильтрации в поле внешних сил связана с давлением соотношением

$$\mathbf{V} = \frac{k}{\mu}(\mathbf{F} - \nabla P), \tag{1.102}$$

частным случаем которого является закон Дарси (1.101). Подстановка V в форме (1.102) и $\rho{=}\rho(P)$ в (1.100) приводит к уравнению фильтрации

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = div\left(\frac{k\rho}{\mu}\nabla P\right) - div\left(\frac{k\rho}{\mu}\mathbf{F}\right).$$

1.249. Получить уравнение фильтрации жидкости в однородной пористой среде с учетом силы тяжести; μ, m, k и температура —постоянные величины.

1.250. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен жидкостью, начальное давление в которой P_0. Сечение $x=l$ представляет собой тонкую перегородку, расход жидкости (поток скорости) через единицу площади которой пропорционален разности давлений по обе стороны перегородки (коэффициент пропорциональности α задан). Поставить задачу для определения расхода q жидкости через единицу площади сечения $x=0$, если давление в этом сечении — заданная функция времени $P_1(t)$, давление за перегородкой — P_0. Внешние силы отсутствуют, μ, m, k и температура — постоянные величины.

1.251. Горизонтальный круговой пласт (толщина H, радиус r_2) с непроницаемой поверхностью заполнен жидкостью, начальное давление в которой P_0. В центре пласта пробита скважина радиуса $r_1<r_2$, давление в которой $P_1<P_0$. Поставить задачу фильтрации, если внешние силы отсутствуют, μ, m, k и температура — постоянные величины.

1.252. Так как реальные жидкости (вода, нефть) сжимаемы, то в процессе фильтрации происходит деформация среды. Она обусловлена изменением давления P и проявляется в изменении объема пор (объем твердых частиц пористой среды остается постоянным). Таким образом, в изотермическом случае величины ρ, μ, m, k зависят только от P. При фильтрации в естественных условиях жидкость является малосжимаемой и достаточно ограничиться уравнением состояния в линейном приближении

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{K_\rho}\right), \qquad \frac{|P - P_0|}{K_\rho} \ll 1,$$

где K_ρ — модуль объемного сжатия. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{K_\rho} \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для других величин (см.[5]):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{m_0}{K_m}\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{\mu}\right)\frac{k_0}{\mu_0 K_k}\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad \frac{|P-P_0|}{K_{m,k}} \ll 1.$$

Показать, что если внешние силы отсутствуют, то при сделанных предположениях уравнение фильтрации (оно называется также уравнением упругого режима, или уравнением пьезопроводности) имеет вид:

$$P_t = a^2 \Delta P, \qquad a^2 = \frac{k_0}{\mu_0 m_0}\left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_\rho}\right)^{-1}.$$

1.253. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен малосжимаемой жидкостью, начальное давление в которой P_0, давления в сечениях $x=0$ и $x=l$ постоянны и равны соответственно P_1 и P_0. Поставить задачу изотермической фильтрации.

1.254. Горизонтальный круговой пласт (толщина H, радиус r_2) с непроницаемыми основаниями заполнен малосжимаемой жидкостью, давление в которой P_0. Поверхность $r=r_2$ представляет собой тонкую перегородку, расход жидкости (поток скорости) через единицу площади которой пропорционален разности давлений по обе стороны перегородки (коэффициент пропорциональности α задан). После того, как в центре пласта пробурили скважину, радиус которой $r_1<r_2$, начался процесс изотермической фильтрации. Поставить задачу для определения расхода жидкости Q через поверхность скважины, если давление в ней $P_1<P_0$ давление вне пласта — P_0.

1.255. Газ движется в пористой среде; μ, m, k и температура — постоянные величины, внешние силы отсутствуют. Получить уравнение фильтрации

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = a^2 P \Delta P^2, \qquad a^2 \frac{k}{\mu m}. \tag{1.103}$$

1.256. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) заполнен газом; μ, m, k и температура — постоянные величины, внешние силы отсутствуют. Поставить задачу фильтрации, если начальное давление в пласте P_0, давление в сечении $x=0$ — заданная функция времени $P_1(t)$, а остальная поверхность непроницаема для газа.

1.257. В центре круглого горизонтального пласта (радиус r_2, толщина H) с непроницаемыми основаниями пробита скважина, радиус которой $r_1<r_2$. Пласт заполнен газом, начальное давление которого P_0. Считая фильтрацию изотермической, поставить задачу для определения расхода Q газа (потока скорости) через поверхность скважины, если давление в ней $P_1<P_0$, давление на внешней поверхности $r=r_2$ пласта P_0; μ, m, k — постоянные величины.

1.258. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен газом. Поставить задачу для определения плотности потока $\mathbf{q}$ газа через поперечное сечение пласта в процессе стационарной фильтрации, если давления при $x=0$ и $x=l$ равны соответственно P_1 и P_2; μ, m, k и температура T — постоянные величины.

1.259. Горизонтальный пласт с непроницаемыми основаниями, имеющий форму плоской линзы, радиус которой r_2, заполнен газом. В центре линзы пробита скважина, радиус которой $r_1<r_2$. Внешняя поверхность $r=r_2$ пласта представляет собой тонкую перегородку, расход газа (поток скорости) через единицу площади перегородки пропорционален разности давлений по обе ее стороны (коэффициент пропорциональности α задан). Поставить задачу для определения плотности потока $\mathbf{q}$ газа через поверхность скважины в процессе стационарной фильтрации, если давление в скважине P_1, давление вне пласта $P_2>P_1$; μ, m, k и температура T — постоянные величины.

1.260. Горизонтальный пористый пласт находится на непроницаемом основании (водоупоре). Часть пласта (по высоте) заполнена жидкостью, на свободную поверхность которой действует постоянное внешнее давление P_0. Из-за оттока жидкости (через стенки скважин и дренажных галерей) ее уровень понижается и возникает фильтрация под действием сил тяжести (безнапорная фильтрация). В системе координат, ось $0z$ которой направлена вертикально вверх, уравнение основания пласта $z{=}{-}H_0(x,)$, уравнение свободной поверхности $z{=}\zeta(x,y,t)$. Движение жидкости рассматривается в рамках следующей модели: 1) Давление меняется мало, поэтому пористая среда недеформируема (m, k — константы), а жидкость несжимаема; 2) Вертикальная компонента скорости много меньше ее горизонтальной компоненты, так что полное давление равно гидростатическому. Вывести уравнение безнапорнорй фильтрации (уравнение Буссинеска):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = a^2 div[(\zeta + H_0)\nabla\zeta], \qquad a^2 = \frac{2\rho g}{\mu m}.$$

1.261. Поставить задачу безнапорной фильтрации (см. предыдущую задачу) в тонком вертикальном пористом пласте ($0{<}x{<}l$) с непроницаемым основанием $z{=}0$, если начальная высота жидкости h_0, ее уровень в сечении $x{=}0$ меняется со временем по закону $h_1(t)$, $h_1(0){=}h_0$, уровень в сечении $x{=}l$ при любом $t{>}0$ равен h_0.

1.262. Поставить задачу безнапорной фильтрации (см. задачу 1.260.) в тонком пористом пласте ($r_1{<}r{<}r_2$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $0{<}z{<}h_0$) с непроницаемым основанием $z{=}0$, если начальная высота жидкости h_0, ее уровень в скважине — заданная функция времени $h_1(t)$, $h_1(0){=}h_0$, уровень на внешней границе $r{=}r_2$ при любом $t{>}0$ равен h_0.

1.263. Тонкий вертикальный пористый пласт ($0{<}x{<}l$) с непроницаемым основанием $z{=}0$ граничит со скважиной по плоскости $x{=}0$. Поставить задачу для определения формы свободной поверхности жидкости в процессе установившейся безнапорной

фильтрации (см. задачу 1.260.), если уровень жидкости в скважине равен H, а ее расход (поток скорости, направленный к скважине) через вертикальную полоску единичной ширины сечения $x{=}0$ равен q.

1.264. Тонкий горизонтальный пласт с непроницаемым основанием $z{=}0$ ограничен вертикальными цилиндрическими поверхностями $r{=}r_1$ (поверхность скважины) и $r{=}r_2{>}r_1$. Поставить задачу для определения формы свободной поверхности жидкости в процессе установившейся безнапорной фильтрации (см. задачу 1.260.), если уровень жидкости у поверхности $r{=}r_1$ равен H, а ее расход (поток скорости, направленный к скважине) через эту поверхность равен Q.

1.265. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0{<}x{<}l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен в момент времени $t{=}0$ нефтью на участке ($0{<}x{<}L_0$) и водой — на участке ($L_0{<}x{<}l$). Сечение $x{=}0$ граничит со скважиной, давление в которой P_1, давление в сечении $x{=}l$ равно $P_2{>}P_1$. В процессе фильтрации, обусловленной разностью давлений, происходит вытеснение нефти в скважину. Считая обе жидкости несжимаемыми, поставить задачу для определения координаты границы $L(t)$ между водой и нефтью. Характеристики нефти μ_1, k_1, воды — μ_2, k_2; коэффициент пористости пласта m и температура — постоянные величины.

1.266. Однородный горизонтальный пласт с непроницаемыми основаниями имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2. В центре линзы пробита скважина, радиус которой $r_1{<}r_2$. В момент времени $t{=}0$ часть линзы ($r_1{<}r{<}R_0$) заполнена нефтью, остальная часть — водой. В процессе фильтрации, обусловленной разностью давлений P_1 в скважине и $P_2{>}P_1$ на внешней поверхности $r{=}r_2$ пласта, нефть вытесняется в скважину. Считая обе жидкости несжимаемыми, поставить задачу для определения радиуса $R(t)$ поверхности раздела воды и нефти. Характеристики нефти

μ_1, k_1, воды — μ_2, k_2; коэффициент пористости m и температура — постоянные величины.

1.267. Горизонтальный пористый пласт с непроницаемыми основаниями имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2. В центре пласта пробита скважина, радиус которой $r_1<r_2$. В момент времени $t=0$ часть пласта ($r_1<r<R_0$) заполнена газом, остальная часть — водой, давление в пласте P_0. В процессе фильтрации, обусловленной разностью давлений P_0 на внешней поверхности $r=r_2$ пласта и $P_1<P_0$ в скважине, газ вытесняется в скважину. Считая воду несжимаемой, поставить задачу фильтрации. Характеристики нефти μ_1, k_1, воды μ_2, k_2;, коэффициент пористости m и температура — постоянные величины , величины давлений P_1 и P_2 не зависят от времени.

1.268. При движении газа в пористой среде с достаточно мелкими порами (например, в угольном пласте) происходит конденсация молекул на поверхности раздела двух фаз — сорбция (см.[31]). Масса M газа, адсорбированного в единице объема, является функцией давления и описывается эмпирической зависимостью Ленгмюра

$$M = \frac{abP}{1+aP},$$

где a и b — постоянные. Вывести уравнение изотермической фильтрации в недеформируемой среде:

$$\Delta P^2 = \frac{\mu}{k}\left[m + \frac{abRT}{(1+aP)^2}\right]\frac{1}{P}\frac{\partial P^2}{\partial t}, \tag{1.104}$$

T — температура, R — газовая постоянная.

1.269. В полуограниченном цилиндрическом угольном пласте ($0<x$) с непроницаемой боковой поверхностью движется газ. Поставить (в одномерном приближении) задачу изотермической фильтрации с учетом сорбции газа (см. предыдущую задачу), если начальное давление в пласте P_0, давление во внешней среде в любой момент времени $t>0$ постоянно и равно P_1.

1.270. В горизонтальном угольном пласте ($0<x$, $0<y$, $|z|<H$) с непроницаемыми основаниями $z=\pm H$ движется газ. Поставить задачу изотермической фильтрации с учетом сорбции газа (см. задачу 1.268.), если начальное давление в пласте P_0, давление во внешней среде при любом $t>0$ постоянно и равно P_1.

1.271. Горизонтальный угольный пласт ($0<|z|<H$) с непроницаемыми основаниями $z=\pm H$ заполнен газом, начальное давление которого P_0, давление вне пласта при $t>0$ равно P_1, где P_0 и P_1 — постоянные величины. В процессе выработки угля граница $y=0$ пласта перемещается параллельно оси $0x$ с постоянной скоростью V_0. Поставить задачу изотермической фильтрации с учетом сорбции газа (см. задачу 1.268.)

1.4. Модели электродинамики

Пример 1.20. 1. Вывод системы уравнений для тока и потенциала линии, единица длины которой обладает активным сопротивлением R, самоиндукцией (или индуктиностью) L, емкостью C (относительно земли), утечкой G (количество заряда, стекающего на землю в единицу времени, пропорционально разности потенциалов между линией и землей, G — коэффициент пропорциональности). Свойства линии зависят от параметров R, L, C, G. Различают несколько типов линий: кабель ($L=G=0$), линия без потерь ($R=G=0$), линия без искажений $RC=LG$; в последнем случае волны напряжения и тока распространяются вдоль линии без изменения формы.

2. Постановка задачи для потенциала и тока в линии ($0<x<l$) без искажения, к концу $x=0$ которой в момент $t=0$ подключается батарея с э.д.с. $E(t)$, а конец $x=l$ заземлен (рис.1.12); начальный ток и начальный потенциал заданы.

Решение п.1. Сила переменного тока частоты ν, а также потенциал зависят от x. Это связано с конечностью скорости c распространения электромагнитного поля: изменение тока в точке

x=0 достигает точки x=l не мгновенно, а через время τ=l/c. Если τ много меньше характерного времени, в течение которого меняется поле, т.е. времени порядка $1/\nu$, то можно пренебречь зависимостью от x (поле распространяется с бесконечной скоростью) и применить теорию квазистационарных токов. Если условие квазистационарности не выполнено, то закон Ома не применим. Например, в случае периодического поля существуют различные точки x_1 и x_2, потенциал которых в данный момент времени одинаков при ненулевом токе. В реальных линиях условие квазистационарности $l\nu \ll c$ не выполняется (длинные линии, широкий спектр частот). Поэтому рассматривают столь малый элемент линии, на котором поле квазистационарно, и полученные уравнения применяют ко всей линии. Условия правомерности такого подхода имеются в [71].

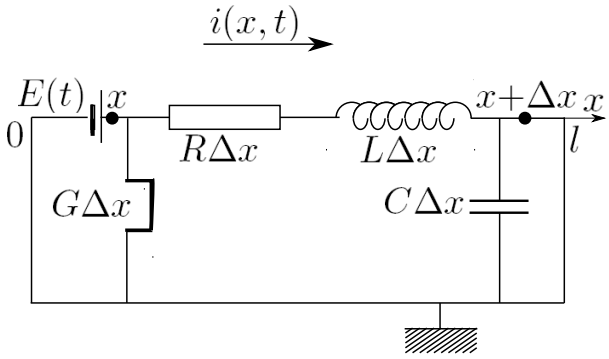

Рис. 1.12

Вывод системы уравнений для тока $i(x,t)$ и потенциала $u(x,t)$ линии основан на законе Ома для элемента Δx при условии квазистационарности и законе сохранения заряда. Уравнение закона Ома

$$u|_x - u|_{x+\Delta x} = iR\Delta x + i_t L\Delta x$$

после деления на $\Delta x\,\Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ и уравнение закона сохранения заряда (1.32), в котором

$w{=}Cu$, $q{=}i$, $Q{=}0$, составляют систему телеграфных уравнений:

$$\begin{aligned} &u_x + i_t L + i\,R = 0,\\ &i_x + u_t C + u\,G = 0\,. \end{aligned}$$

Решение п.2. Краевые условия в точке $x_0{=}0$ или $x_0{=}l$ выражают закон Ома для участка Δx цепи, примыкающего к x_0 и закон сохранения заряда для элемента Δx. Если в точке x_0 имеется батарея с э.д.с. $E(t)$, сопротивление R_0, индуктивность L_0, конденсатор C_0, включенные последовательно, то граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &i(x_0-0,t) = i(x_0+0,t),\\ &u(x_0-0,t) - u(x_0+0,t) + E(t) =\\ &\qquad = i(x_0,t)R_0 + i_t(x_0,t)L_0 + \frac{q(t)}{C_0}, \qquad (1.105)\\ &q(t) = q_0 + \int_0^t i(x_0,\tau)\,d\tau, \quad q_0 = C_0[\,u(x_0-0,0) - u(x_0+0,0)\,], \end{aligned}$$

q_0 — начальный заряд конденсатора, э.д.с. $E(t)$ берется со знаком плюс, если обусловленный ею ток течет в положительном направлении оси $0x$.

По условию, если $x_0{=}0$, то $R_0{=}L_0{=}1/C_0{=}0$, $u(-0,t){=}0$, а $u(+0,t){=}u(0,t)$, поэтому $u(0,t){=}E(t)$; если $x_0{=}l$, то $u(l,t){=}0$. Таким образом $i(x,t)$ и $u(x,t)$ являются решением задачи

$$\begin{aligned} &u_x + i_t L + iR = 0,\\ &i_x + u_t C + uG = 0, \end{aligned} \quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t) = E(t), \quad u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad i(x,0) = i_0(x).$$

Чтобы поставить задачу для потенциала, нужно исключить ток из уравнений, а также из граничных и начальных условий. Потенциал удовлетворяет уравнению

$$LCu_{tt} = u_{xx} - (RC + LG)u_t - RGu.$$

Задача для потенциала запишется в виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\beta u_t - \beta^2 u, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = E(t), \quad u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = -\beta\, u_0(x) - \tfrac{1}{C}\, i_0'(x),$$

где $a^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R}{L}$. Аналогично ставится задача для тока:

$$i_{tt} = a^2 i_{xx} - 2\beta i_t - \beta^2 i, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$i_x(0,t) = -GE(t) - CE'(t), \quad i_x(l,t) = 0,$$
$$i(x,0) = i_0(x), \quad i_t(x,0) = -\beta\, i_0(x) - \tfrac{1}{L}\, u_0'(x),$$

где $E'(t)$ — обобщенная производная (см. задачу 1.280.)

Поставить задачи 1.272 – 1.280 для определения потенциала в линии $(0<x<l)$ **при нулевых начальных условиях и задачу 1.281.**

1.272. Конец $(x=l)$ линии с параметрами L, C $(R=G=0)$ заземлен через конденсатор C_0, а к другому концу подключается батарея с э.д.с. $E(t)$.

1.273. Один конец $(x=l)$ линии с параметрами L, C $(R=G=0)$ заземлен, а к другому концу подключается через индуктивность L_0 батарея с э.д.с. $E(t)$.

1.274. Конец $x=0$ линии с параметрами L, C $(R=G=0)$ заземлен, а на другом конце находится конденсатор C_0 с зарядом q_0. В момент времени $t=0$ конец $x=0$ изолируют, а конденсатор заземляют.

1.275. Конец $x=0$ линии с параметрами L, C $(R=G=0)$ заземлен, а к концу $x=l$ в момент времени $t=0$ подключается через конденсатор C_0 батарея с постоянной э.д.с. E_0.

1.276. Конец $x=l$ линии с параметрами R, C $(L=G=0)$ заземлен через сопротивление R_0, а к другому концу в момент времени $t=0$ подключена батарея с э.д.с. $E(t)$.

1.277. Конец $x{=}0$ линии с параметрами R, C ($L{=}G{=}0$) заземлен через сопротивление R_1, а к другому концу подключается через сопротивление R_2 батарея с э.д.с. $E(t)$.

1.278. Конец $x{=}0$ линии без утечки подключается к батарее с э.д.с. $E(t)$, а другой конец заземляется через сопротивление R_0.

1.279. В точку $x_0 \in (0,\, l)$ линии с пренебрежимо малой индуктивностью помещают заряд q_0; концы линии заземлены.

1.280. Конец $x{=}l$ линии без искажения ($RC{=}LG$) заземлен через сопротивление R_0, а к другому концу подключается через индуктивность L_0 батарея с э дс $E(t)$. Рассмотреть частный случай: $E(t){=}E_0$.

1.281. Бесконечная линия ($-\infty{<}x{<}\infty$) составлена из двух различных частей; параметры линии $L(x){=}G(x){=}0$,

$$R(x) = \begin{cases} R_1, & x < 0, \\ R_2, & 0 < x, \end{cases} \qquad C(x) = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & 0 < x. \end{cases}$$

В момент времени $t{=}0$ потенциал равен $u_0(x)$.

1.282. Конец полуограниченной линии ($0{<}x$) заземлен через конденсатор, емкость которого C_0, начальный заряд q_0. Поставить задачу для определения заряда $q(t)$ конденсатора, если параметры линии 1. R, C ($L{=}G{=}0$); 2. L, C($R{=}G{=}0$).

Поставить задачи 1.283 – 1.288 для определения тока в линии.

1.283. Концы $x{=}0$ и $x{=}l$ линии с пренебрежимо малой индуктивностью ($L{=}0$) изолированы, потенциал линии постоянен и равен u_0. В момент времени $t{=}0$ конец $x{=}l$ заземляют.

1.284. Конец $x{=}0$ линии с параметрами R, C, G ($L{=}0$) заземлен через конденсатор C_0, а к концу $x{=}l$ в момент времени $t{=}0$ подключается через сосредоточенное сопротивление R_0 батарея с постоянной э.д.с. E_0.

1.285. Конец $x{=}0$ линии без утечки ($G{=}0$) заземлен, а к концу $x{=}l$ в момент времени $t{=}0$ подключается батарея с э.д.с. $E(t)$ через 1. сосредоточенное сопротивление R_0; 2. сосредоточенную индуктивность L_0. Рассмотреть случаи: 1. $E(t) = E_0\, sin\, \omega\, t$; 2. $E(t) = E_0$, где E_0 — постоянная величина.

1.286. Конец $x{=}0$ линии с параметрами R, C ($L{=}G{=}0$) заземлен, а к концу $x{=}l$ в момент времени $t{=}0$ подключается через сопротивление R_0 батарея с постоянной э.д.с. E_0.

1.287. К концу $x{=}0$ линии ($0{<}x{<}l$) с параметрами R, L, C, G подключается через сопротивление R_0 батарея с э.д.с. $E(t)$, а другой конец заземляется через конденсатор C_0.

1.288. Бесконечная линия ($-\infty{<}x{<}\infty$) составлена из двух различных частей; параметры линии $L(x){=}G(x){=}0$,

$$R(x) = \begin{cases} R_1, & x < 0, \\ R_2, & 0 < x, \end{cases} \qquad C(x) = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & 0 < x. \end{cases}$$

Начальные ток и потенциал соответственно равны $i_0(x)$ и $u_0(x)$.

1.289. Концы $x_0{=}0$, $x_N{=}N\,l$ линии заземлены, а к точкам с координатами $x_j{=}j\,l$, где $j{=}1, 2, \ldots, N{-}1$, подключаются конденсаторы переменной емкости $C(u){=}C(1 - \alpha u^n)$, $\alpha{>}0$, $n{>}0$ (рис.1.13); каждый из участков $(x_j,\, x_{j+1})$, $j{=}0, 1, \ldots, N-1$, обладает индуктивностью L_0, которую можно считать сосредоточенной, а остальные параметры равны нулю.

Показать также, что в приближении непрерывной модели (т.е. линии с непрерывно распределенными параметрами L, C) длинные волны, распространяющиеся только в одном направлении, описываются уравнением КдФ, если емкость конденсатора линейно зависит от напряжения, или мКдФ, если эта зависимость квадратична.

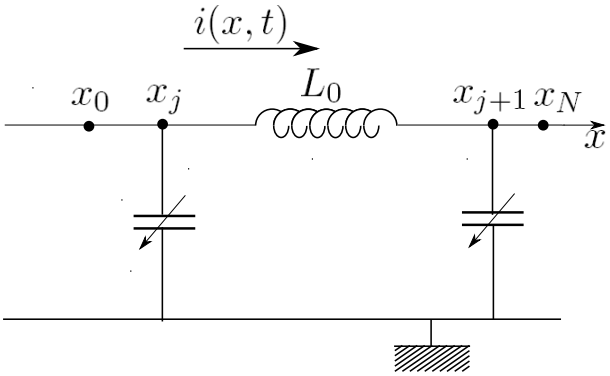

Рис. 1.13

Пример 1.21. Шар, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ, внесен в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Поставить задачу для определения результирующего поля $\mathbf{H}$ в пространстве.

Электромагнитное поле в однородной изотропной среде с проводимостью σ, диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ описывается системой уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} &rot\,\mathbf{H} = \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\ &rot\,\mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\ &div\mathbf{B} = 0,\\ &div\mathbf{D} = 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{1.106}$$

к которым присоединяются уравнения, характеризующие свойства среды,

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H},\ \ \mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E},\ \ \mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}\,. \tag{1.107}$$

Так как $\mathbf{E}$=0, $\mathbf{j}$=0, а $\mathbf{H}$ не зависит от времени (магнитостатика), то уравнения (1.106), (1.107) сводятся к системе

$$\begin{aligned} &rot\,\mathbf{H} = 0,\\ &div\,(\mu\,\mathbf{H}) = 0\,. \end{aligned}$$

Из условия потенциальности поля вытекает существование скалярного потенциала $u(\mathbf{r})$, так что $\mathbf{H}=-\nabla u$. Следовательно,

$$div\,(\mu\nabla u)=0.$$

На границе S раздела двух сред это уравнение неприменимо, так как функция μ разрывна на S. Роль уравнения выполняют условия "сшивки" функции u и ее нормальных производных, которые вытекают из граничных условий для векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$: тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{H}$ и нормальная составляющая вектора $\mathbf{B}$ непрерывны при переходе через границу S. Отсюда следует, что на S потенциал непрерывен, иначе поле $\mathbf{H}=-\nabla u$ было бы неограниченным (это условие эквивалентно непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля $\mathbf{H}$ на границе раздела двух сред). Непрерывность нормальной составляющей магнитной индукции $\mathbf{B}$ на границе приводит к непрерывности функции $(\mathbf{B}\,\mathbf{n}) = (-\mu\nabla u\,\mathbf{n}) = -\mu\,\frac{\partial u}{\partial n}$ на S. На больших расстояниях влияние шара мало, поэтому

$$\mathbf{H_0}\approx-\nabla u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial z}\approx -H_0 \quad\Longrightarrow\quad u\approx -H_0 z=-H_0 r\,\cos\theta$$

(константа интегрирования $C=0$). Таким образом, потенциал является решением задачи:

$$\Delta u=0,\quad 0<r<r_0,\ \ r_0<r,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$u|_{r_0-0}=u|_{r_0+0},\quad \mu_0\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0-0}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0+0},$$
$$|u|<\infty,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{u}{r}=H_0\cos\theta\,.$$

Поставить задачи 1.292 – 1.310 для определения электро- или магнитостатического поля.

1.290. В пространстве с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}\varepsilon_1, & 0<z,\\ \varepsilon_2, & z<0\end{cases}$$

расположен точечный заряд Q в точке M с координатами $x=y=0$, $z=h>0$. Рассмотреть частный случай $h=0$.

1.291. В пространстве с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}\varepsilon_1, & 0<y,\\ \varepsilon_2, & y<0\end{cases}$$

находится нить с зарядом q на единицу длины; нить параллельна оси $0z$ и пересекает плоскость $x0y$ в точке P с координатами $x{=}0$, $y{=}h>0$. Рассмотреть частный случай $h{=}0$.

1.292. Сферический слой ($r_1{<}r{<}r_2$), диэлектрическая проницаемость которого постоянна и равна ε, находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$.

1.293. Однородная труба ($r_1{<}r{<}r_2$) из магнетика с магнитной проницаемостью μ внесена в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, перпендикулярное к оси трубы.

1.294. Однородный шар, радиускоторого r_0, равномерно заряжен; плотность заряда ρ, диэлектрическая проницаемость ε.

1.295. На сфере, радиус которой r_0, расположен заряд, плотность которого равна $\sigma(\theta,\varphi)$.

1.296. Шар равномерно поляризован, радиус шара r_0, поляризация (дипольный момент единицы объема) $\mathbf{P}$ — постоянный вектор.

1.297. Точечный заряд Q расположен на расстоянии d от центра шара, радиус которого $r_0<d$, диэлектрическая проницаемость ε.

1.298. Тонкое кольцо, радиус которого r_0, равномерно заряжено; заряд кольца Q.

1.299. Радиус тонкого проводящего диска r_0, заряд Q.

1.300. Бесконечная равномерно заряженная нить с зарядом q на единицу длины расположена на расстоянии d от центра проводящего заземленного шара, радиус которого $r_0<d$.

1.301. Внутри проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0, на расстоянии d от центра расположен точечный электрический диполь, момент которого $p\,\mathbf{e}_r$.

1.302. Вне проводящего заземленного шара, радиус еоторого r_0, на расстоянии d от центра расположен точечный электрический диполь с моментом p, перпендикулярным к радиусу.

1.303. Проводящая плоскость $y{=}0$ заземлена. Равномерно заряженная бесконечная нить, дипольный момент единицы длины которой 1) $\mathbf{p}{=}p\,\mathbf{e}_y$; 2) $\mathbf{p}{=}p\,\mathbf{e}_x$, перпендикулярна к плоскости $x0y$ и пересекает ее в точке P с координатами $x{=}0$, $y{=}h$.

1.304. Поставить задачу для определения магнитного поля $\mathbf{H}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ равномерно намагниченного ферромагнитного шара, радиус которого r_0, намагниченность (магнитный момент единицы объема) $\mathbf{M}$.

1.305. Равномерно намагниченный шар, радиус которого r_0, диэлектрическая проницаемость ε, намагниченность $\mathbf{M}$, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega(\omega r_0 \ll c)$ около диаметра, параллельного вектору $\mathbf{M}$. Используя решение задачи 2.520, поставить задачу для определения электрического поля шара.

1.306. Конечным продуктом эволюции звезд является (в зависимости от массы звезды)один из трех компактных объектов:белый карлик, нейтрон звезда, черная дыра. Эти космические объекты израсходовали ядерное горючее, что привело к уменьшению радиуса, так как давление гравитационных сил не уравновешивается термодинамическим давлением.

Нейтронная звезда состоит в основном из нейтронов, образовавшихся в процессе сжатия в результате обратного β-распада. Давление гравитационных сил уравновешивается давлением нейтронного газа. Наиболее простая модель такой звезды — идеально проводящий намагниченный шар, радиус которого r_0, намагниченность $\mathbf{M}$, вращающийся с постоянной угловой скоростью

$\omega(\omega r_0 \ll c)$ около диаметра, параллельного вектору $\mathbf{M}$. Поставить задачу для определения электрического поля звезды.

1.307. На расстоянии d от центра однородного шара (радиус шара $r_0<d$, магнитная проницаемость μ_0) расположен точечный виток с током, магнитный момент которого $M\,\mathbf{e}_r$.

1.308. На поверхности полого цилиндра, радиус которого r_0, расположены диполи, плотность момента которых $p(\varphi)\,\mathbf{e}_r$.

1.309. Полый заземленный цилиндрический проводник, поперечным сечением (плоскостью $x0y$)которого является ограниченная односвязная область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, расположен в поле бесконечной нити, параллельной оси цилиндра; заряд единицы длины нити q_0, нить пересекает плоскость $x0y$ в точке $P(x_0, y_0)$. Рассмотреть слчсучаи: 1. $P \in \Omega$; 2. $P \overline{\in} \overline{\Omega}$.

1.310. Поперечное сечение (плоскостью $x0y$) цилиндрического (незаземленного) проводника — односвязная ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Вне цилиндра параллельно его оси расположена бесконечная нить; заряд единицы длины цилиндра q, линейная плотность заряда нити q_0, нить пересекает плоскость $x0y$ в точке $P(x_0, y_0)$.

1.311. На оси $0z$ прямоугольной системы координат $0xyz$ расположены точечные диполи $p\mathbf{e}_z$ и $-p\mathbf{e}_z$, координаты которых $(0;0;0)$ и $(0;0;l)$ соответственно. Предельное положение этой системы зарядов при $l \to 0$ и постоянстве произведения $4pl{=}D$ называется точечным квадруполем. Поставить задачу для определения электрического поля квадруполя.

Поставить задачи 1.312–1.317 для плотности заряда на проводнике.

1.312. Проводящий заземленный шар, радиус которого r_0, помещен в однородное электростатическое поле $\mathbf{E}$.

1.313. Проводящий (незаземленный) шар, радиус которого r_0, заряд Q_0, помещен в поле точечного заряда Q, расположенного на расстоянии $d>r_0$ от центра шара.

1.314. Внутри полого проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0, находится равномерно заряженная нить; нить параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстоянии d, линейная плотность заряда нити q.

1.315. Параллельно оси проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0, на расстоянии $d > r_0$ от оси находится нить с линейной плотностью заряда q.

1.316. Вне проводящего цилиндра, радиус которого r_0, заряд единицы длины (вдоль оси) q_0, находится равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда q; нить параллельна оси и отстоит от нее на расстоянии d.

1.317. На расстоянии d от заземленной проводящей плоскости находится точечный диполь, момент p которого перпендикулярен к плоскости и направлен от нее.

Пример 1.22. Прямой ток $\mathbf{J}=J\mathbf{e}_z$ параллелен оси однородного круглого цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$) с магнитной проницаемостью μ и расположен на расстоянии $d>r_0$ от оси. Поставить задачу для определения магнитного поля.

Так как поле $\mathbf{H}$ не зависит от времени, а поле $\mathbf{E}=0$ в области, где нет токов, то уравнения (1.106), (1.107) преобразуются к виду

$$\begin{array}{l} rot\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ div\,(\mu\,\mathbf{H}) = 0\,. \end{array} \tag{1.108}$$

В электродинамике вводится векторный потенциал $\mathbf{A}$ посредством соотношения $\mathbf{B}=rot\,\mathbf{A}$. Второе уравнение системы (1.108) становится тождеством, а первое принимает вид

$$rot\left(\frac{1}{\mu}\,rot\,\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,. \tag{1.109}$$

Если $\mathbf{A}$ — решение уравнения (1.109), то $\mathbf{A}+\nabla f$, где $f \in C^1$, также решение этого уравнения. Из множества решений выбирают такое, что $div\,\mathbf{A}$=0. Так как $rot\,rot\,\mathbf{A} = \nabla div\,\mathbf{A} - \Delta\,\mathbf{A} = -\Delta\,\mathbf{A}$, то в среде с постоянной магнитной проницаемостью уравнение (1.109) приводится к виду

$$\Delta\,\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}. \tag{1.110}$$

В прямоугольной системе координат, ось $0z$ которой направлена по оси цилиндра, вектор плотности тока параллелен оси $0z$, т.е. $\mathbf{j} = j\,\mathbf{e}_z$, а функции j и μ не зависят от z. Исходя из этого, решение уравнения (1.110) естественно отыскивать в виде $\mathbf{A}$=$A\,\mathbf{e_z}$ [2], тогда

$$\Delta A = -\frac{4\pi\mu}{c}\,j. \tag{1.111}$$

Если $\mu(x,y)$ — кусочно-постоянная функция, то в каждой однородной части среды функция $A(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.111). На поверхности S раздела двух сред, где S — кусочно-гладкая поверхность, это уравнение неприменимо, так как в (1.109) μ — разрывная функция. Эквивалентом уравнения для $A(x,y)$ служат граничные условия на S для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$: непрерывность тангенциальной составляющей H_τ и нормальной составляющей B_n. На поверхности S функция $A(x,y)$ должна быть непрерывной (иначе была бы неограничена индукция $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$). Из непрерывности на S тангенциальной составляющей H_τ следует непрерывность функции $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к S. В самом деле, так как вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен оси $0z$ и $rot\mathbf{A}$=$rot(A\,\mathbf{e}_z)$=$[\nabla A\mathbf{e}_z]$, то вектор τ перпендикулярен векторам $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{n}$, поэтому на S

$$H_\tau = (\mathbf{H}\,\tau) = \frac{1}{\mu}([\,\nabla A\,\mathbf{e}_z\,]\,\tau) = \frac{1}{\mu}([\,\mathbf{e}_z\,\tau\,]\,\nabla A) = \frac{1}{\mu}(\mathbf{n}\,\nabla A) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}.$$

[2] Если такое решение существует, то в силу единственности других решений нет.

Остается заметить, что на больших расстояниях от оси $0z$ влияние цилиндра мало, поэтому поле $\mathbf{H}$ определяется током, плотность которого $j = J\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d})$, так что $A{=}O(\ln r)$ (см.(10.16)). Задача для определения $A(x,y)$ является двухмерной и ставится следующим образом:

$$\begin{array}{cc} \Delta A = 0, & \Delta A = -\frac{4\pi J}{c}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \\ 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi & r_0<r,\ \ 0\le\varphi<2\pi, \\ |A|<\infty, & A=O(\ln r),\ r\to\infty, \end{array}$$

$$A|_{r_0-0} = A|_{r_0+0},$$
$$\tfrac{1}{\mu}\,\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0-0} = \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0+0}\ .$$

1.318. Получить уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}$ (см. пример 1.22.), если магнитная проницаемость среды $\mu(x,y)$ — произвольная функция класса C^1, плотность тока $\mathbf{j}{=}j(x,y)\,\mathbf{e_z}$.

1.319. Показать, что силовые линии двухмерного поля $\mathbf{B}(x,y)$ в однородной среде определяются уравнением $A(x,y)=C$.

Поставить задачи 1.320 – 1.338 для определения векторного потенциала.

1.320. По поверхности цилиндра ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) течет ток, линейная плотность которого $\mathbf{i}{=}i(\varphi)\mathbf{e}_z$, где $i(\varphi){\in}C$.

1.321. На поверхности цилиндра ($r{<}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) с магнитной проницаемостью μ находится прямой ток $\mathbf{J}{=}J\mathbf{e}_z$, расположенный в плоскости $\varphi{=}0$ параллельно оси $0z$; магнитная проницаемость внешней среды $\mu{=}1$.

1.322. По поверхности цилиндра ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) течет ток, линейная плотность которого $\mathbf{i}{=}i(z)\mathbf{e}_\varphi$, где $i(z){\in}C$.

1.323. Непроводящий цилиндр ($r{<}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) равномерно заряжен по объему, плотность заряда равна ρ. Цилиндр вращается около оси $0z$ с постоянной угловой скоростью $\omega\,\mathbf{e_z}$.

1.324. Круглый виток с током J плотно надет на бесконечный цилиндр, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ.

1.325. Бесконечный цилиндр (радиус r_0, магнитная проницаемость μ_1) находится в среде с проницаемостью μ_2. Параллельно его оси на расстоянии $d<r_0$ от нее расположен ток J.

1.326. Решить предыдущую задачу для полого цилиндра, магнитная проницаемость которого $\mu = 1$, а магнитная проницаемость внешней среды $\mu_2 = \infty$.

1.327. В среде с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется цилиндрическая полость (радиус полости r_0, $\mu = 1$). Внутри полости параллельно оси расположены два прямых тока J и $-J$, координаты которых $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$).

1.328. Неограниченный цилиндр, радиус которого r_0, магнитная проницаемость $\mu \gg 1$, находится в среде с магнитной проницаемостью $\mu=1$. Параллельно оси цилиндра на расстоянии $d>r_0$ от нее расположен прямой ток J.

1.329. Однородный магнетик с проницаемостью μ занимает полупространство ($z<0$) и граничит со средой, магнитная проницаемость которой $\mu=1$. На плоскости ($z=0$) находится круглый виток с током J; радиус витка r_0, координаты его центра $x=y=0$.

1.330. Однородный магнетик с проницаемостью μ заполняет полупространство ($y<0$). Параллельно границе магнетика (вне его) расположен ток $\mathbf{J}=J\mathbf{e}_z$, проходящий через точку $(x = 0, y = h)$.

1.331. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется воздушный зазор ($-\infty<x, z<\infty, -h<y<h$), внутри которого вдоль оси $0z$ течет ток $\mathbf{J}=J\mathbf{e}_z$.

1.332. В среде с проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется полость в форме двугранного угла ($0<r$, $0<\varphi<\alpha$); внутри угла параллельно ребру расположен прямой ток J, координаты которого $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$.

1.333. В среде с магнитной проницаемостью μ находится виток радиуса r_0 с током J.

1.334. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется сферическая полость (радиус полости r_0, магнитная проницаемость $\mu{=}1$). Внутри полости расположен круглый виток с током J; радиус витка $r_1{<}r_0$, его центр совпадает с центром полости.

1.335. Железный шар, радиус которого r_0, магнитная проницаемость $\mu \gg 1$, и виток радиуса $r_1{>}r_0$ с током J расположены так, что их центры совпадают.

1.336. По сфере ($r{=}r_0$, $0{<}\theta{<}\pi$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$) течет ток, линейная плотность которого $\mathbf{i} = i(\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$.

1.337. Равномерно заряженный непроводящий шар (радиус r_0, объемная плотность заряда ρ) вращается около диаметра с постоянной угловой скоростью ω.

1.338. На поверхности шара, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ, находится виток радиуса $r_1{<}r_0$ с током J.

Поставить задачи 1.339 – 1.341 для определения магнитного поля H.

1.339. На плоской границе ($y{=}0$) раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ (при $y{<}0$) и $\mu{=}1$ (при $y{>}0$) находится прямой ток $\mathbf{J}{=}J\mathbf{e}_z$, расположенный в плоскости $x{=}0$.

1.340. В среде с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется воздушный зазор, ограниченный плоскостями $y{=}0$ и $y{=}h$. В плоскости $y0z$ параллельно оси $0z$ расположен прямой ток $J\mathbf{e}_z$, расстояние которого от оси равно y_0, где $0{<}y_0{<}h$. Поставить задачу также и для векторного потенциала.

1.341. Соленоид представляет собой бесконечно длинный полый цилиндр, на котором плотно намотан (по спирали) тонкий провод; поперечное сечение цилиндра — односвязная ограниченная

область Ω с кусочно-гладкой границей $S{=}\partial\Omega$, число витков на единицу длины цилиндра N, ток в соленоиде J. Рассмотреть случай: Ω — круг радиуса r_0.

Пример 1.23. Постоянный ток J втекает в однородный шар, радиус которого r_0, проводимость σ, через точку поверхности с координатой $\theta = 0$ и вытекает через диаметрально противоположную точку. Поставить задачу для определения плотности тока в шаре.

Необходимые уравнения

$$rot\,\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}.$$

имеются в системе (1.106), (1.107), их надо дополнить уравнением закона сохранения заряда (уравнением непрерывности)

$$div\mathbf{j} = Q, \tag{1.112}$$

где Q — объемная плотность источников заряда (см.(1.32)). В виду потенциальности поля $\mathbf{E}{=}-\nabla u$, $\mathbf{j}{=}-\sigma\nabla u$. Из (1.112) следует, что потенциал u удовлетворяет уравнению

$$div\,\sigma\nabla u = -Q,$$

а соотношение

$$(\mathbf{j}\,\mathbf{n})|_S = -\sigma(\nabla u\,\mathbf{n})|_S$$

представляет собой граничное условие на поверхности шара. Итак, для определения плотности тока нужно найти потенциал $u(\mathbf{r})$ электрического поля, который (в данном случае $Q{=}0$) является решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$|u|_{r=0} < \infty, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \frac{J}{2\pi r_0^2\sigma}\left[\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta} - \frac{\delta(\theta-\pi)}{\sin\theta}\right].$$

Поставить задачи 1.335 — 1.354 для определения плотности постоянного тока.

1.342. Однородный шар, радиус которого r_0, проводимость σ_1, помещен в среду с проводимостью σ_2. На расстоянии $d>r_0$ от центра шара находится точечный источник тока J.

1.343. Однородный цилиндр, радиус которого r_0, проводимость σ_1, помещен в среду с проводимостью σ_2. Параллельно оси цилиндра на расстоянии $d<r_0$ от нее находится линейный источник тока, с единицы длины которого поступает ток J.

1.344. В полуограниченной пластинке, ширина которой $2H$, толщина $2d$ ($0<x$, $-H<y<H$, $-d<z<d$), течет постоянный ток J. Ток втекает через линию $y=0$ на торце $x=0$ и распределен вдоль нее равномерно.

1.345. В однородном изотропном слое ($0<y<H$) находится бесконечная нить, с единицы длины которой в единицу времени стекает заряд J. Нить расположена в плоскости $y0z$ параллельно оси $0z$ и отстоит от оси на расстояние y_0, где $0<y_0<H$.

1.346. Через пластинку ($|x| < l_1, |y| < l_2, 0 < z < h$) протекает ток J. Ток втекает через образующую ($x = -l_1, y = 0$), вытекает через образующую ($x = l_1, y = 0$) и распределен вдоль них равномерно.

1.347. Через круглую пластинку ($r < r_0, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < z < h$) протекает ток J, линейная плотность которого на входе (образующая $r = r_0, \varphi = \pi$) и на выходе(образующая $r = r_0, \varphi = 0$) постоянна.

1.348. В треугольную пластинку ($0<x<l$, $0<y<l-x$) втекает через грань $\{x, y : 0<x<l,\ x+y=l\}$ ток, плотность которого постоянна и равна j; грани $x=0$ и $y=0$ поддерживаются при постоянном потенциале u_0.

1.349. Через пластинку ($r<r_0$, $0\leq\varphi<\pi$, $|z|<h$) пропускают ток J, линейная плотность которого (по толщине пластинки) на входе (образующая $r=0$) и выходе (образующая $r=0$, $\varphi=\pi/2$) постоянна.

1.350. По тонкому проводящему диску ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$) течет ток J, втекающий и вытекающий соответственно через точки с координатами $r=r_1$, $\varphi=0$ и $r=r_1$, $\varphi=\pi$, где $0<r_1<r_0$.

1.351. В сплошной цилиндр ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $|z|<l$) втекает ток J через центр основания $z=-l$ и вытекает через центр другого основания $z=l$.

1.352. В сплошной цилиндр ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$) втекает ток J через точку с координатами $(r_0, 0, 0)$ и вытекает через точку с координатами $(r_0,\ 0,\ \pi)$.

1.353. В шаре, радиус которого r_0, течет постоянный ток J. Токовые контакты находятся в точках с координатами $r=r_0$, $\theta=\pi/2$, $\varphi=0$ (точка входа) и $r=r_0$, $\theta=0$ (точка выхода).

1.354. Ток J втекает в полушар ($r<r_0$, $0<\theta<\pi/2$, $0\leq\varphi<2\pi$) через центр основания и вытекает через точку с координатами $r=r_0$, $\theta=0$.

Пример 1.24. Поставить задачу для определения стационарной плотности тока $\mathbf{i}(P)$ на замкнутой гладкой поверхности S_0, на которой действуют источники: в единицу времени на единицу площади поверхности поступает $q(P)$ единиц заряда, P — точка поверхности S_0. Плотность $\mathbf{i}$ поверхностных токов равна количеству заряда, протекающего в единицу времени через единицу длины линии (принадлежащей S_0), перпендикулярной к току.

Сначала ставится задача для слоя, ограниченного поверхностями S_0 и $S_{0\delta}$. Поверхность $S_{0\delta}$ получается смещением точек поверхности S_0 на расстояние δ в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$. В слое имеются источники, в результате действия которых

в единицу объема слоя за единицу времени поступает Q единиц заряда. Затем осуществляется усреднение объемных величин по толщине слоя и переход к пределу при $\delta \to 0$:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta Q(P,\xi)\, d\xi = q(P) \tag{1.113}$$

Необходимые уравнения имеются в системе (1.106),(1.107):

$$rot\, \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\, \mathbf{E}.$$

К ним надо присоединить уравнение непрерывности (закон сохранения заряда) $div\, \mathbf{j}{=}Q$, которое следует из (1.32). В виду потенциальности поля $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad \mathbf{j} = -\sigma\, \nabla U,$$

следовательно,

$$div(-\sigma\, \nabla U) = Q.$$

Таким образом, потенциал U электрического поля в слое является решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta U = -\tfrac{1}{\sigma} Q, \\ \tfrac{\partial U}{\partial n}\big|_{S_0} = \tfrac{\partial U}{\partial n}\big|_{S_{0\delta}} = 0. \end{gathered} \tag{1.114}$$

Применение процедуры перехода к пределу (1.113) требует определенной подготовки. Пусть Ω — часть слоя, ограниченная поверхностями S, S_δ, Σ (рис.1.14). Объемный интеграл преобразуется с помощью формулы Остроградского, где $L = \partial S$:

$$\int\limits_\Omega \Delta U\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds{=} \int\limits_\Sigma \frac{\partial U}{\partial n}\, ds{=} \int\limits_L dl \frac{\partial}{\partial n} \int\limits_0^\delta U(P,\xi)\, d\xi,$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int\limits_\Omega \Delta U\, d\mathbf{r}{=} \int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}\, dl{=} \int\limits_S \Delta u\, ds.$$

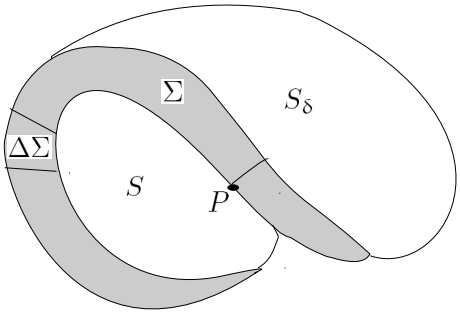

Рис. 1.14

Правая часть уравнения (1.114) преобразуется аналогично:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_S ds\int\limits_0^h Q(P,\xi)\,d\xi\Big)=-\frac{1}{\sigma}\int\limits_S q\,ds.$$

Результирующее равенство

$$\int\limits_S \Delta u\,ds=-\int\limits_S\frac{q}{\sigma}\,ds$$

является тождеством по S (оно верно для любого элемента поверхности $S\subset S_0$), поэтому (при условии непрерывности подынтегральных функций) из интегрального тождества следует уравнение $\Delta u=-q/\sigma$. Переход к поверхностным величинам в уравнении $\mathbf{j}=-\sigma\,\nabla U$

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Delta\Sigma}(\mathbf{j}\,\mathbf{n})dS=\lim_{\delta\to 0}\Big(-\frac{\sigma}{h}\int\limits_{\Delta\Sigma}(\nabla U\,\mathbf{n})\,ds\Big)$$

приводит к соотношению $\mathbf{i}=-\sigma\,\nabla u,$ которое выполняется на проводящей поверхности

Итак, в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2 задача ставится следующим образом:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right]=-\frac{q}{\sigma},$$

$$\mathbf{i}=-\sigma\left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}+\frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right),$$

где $(q_1,\ q_2)$ — координаты точки P на поверхности S, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — орты, $h_1,\ h_2$ — соответствующие коэффициенты Ламе. Стационарность токов обеспечивается условием

$$\int\limits_S q\,ds=0\,.$$

Дать постановку задач 1.355 – 1.362 для определения плотности постоянного тока на однородной поверхности, проводимость которой σ.

1.355. Ток J течет по полуограниченной цилиндрической поверхности ($r{=}r_0,\ 0{\le}\varphi{<}2\pi,\ 0{<}z$); ток втекает через точку поверхности с координатами $r{=}r_0,\ \varphi{=}\varphi_0,\ z{=}0$.

1.356. Ток J течет по бесконечно длинной цилиндрической оболочке ($r{=}r_0,\ 0{\le}\varphi{<}2\pi,\ -\infty{<}z{<}\infty$); ток втекает через точку с координатами $r{=}r_0,\ \varphi{=}0,\ z{=}0$.

1.357. Ток J течет по бесконечно длинной цилиндрической оболочке ($r{=}r_0,\ 0{\le}\varphi{<}\pi,\ -\infty{<}z{<}\infty$); ток втекает через точку, координаты которой $r{=}r_0,\ \varphi{=}\frac{\pi}{2},\ z{=}0$.

1.358. Цилиндрическая оболочка ($r{=}r_0,\ 0{\le}\varphi{<}\pi,\ |z|{<}l$) находится на заземленном проводящем основании, которому принадлежат образующие ($r=r_0, \varphi=0$) и ($r=r_0, \varphi=\pi$); ток J втекает в оболочку через точку с координатами $r{=}r_0,\ z{=}0,\ \varphi{=}\varphi_0$.

1.359. Решить предыдущую задачу для неограниченной цилиндрической оболочки ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$).

1.360. На проводящем заземленном основании ($z = 0$) находится цилиндрическая оболочка ($r{<}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $0{<}z{<}l$); ток J втекает в оболочку через точку ($r{=}r_0$, $\varphi{=}0$, $z{=}l$)).

1.361. В точку с координатой $\theta{=}0$ сферы, радиус которой r_0, втекает ток J, а через точку с координатами $\theta{=}\pi/2$, $\varphi{=}0$ вытекает.

1.362. По полусфере ($r{=}r_0$, $0{<}\theta{<}\pi/2$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$) течет ток J, втекающий через точку с координатой $\theta{=}0$ и вытекающий через точку с координатами $\theta{=}\pi/2$, $\varphi{=}0$.

Пример 1.25. Постановка задачи для определения магнитного поля в проводнике в квазистационарном приближении. Уравнение для магнитного поля $\mathbf{H}$ в однородной среде, в которой нет свободных зарядов ($\rho{=}0$), получается исключением $\mathbf{E}$ из системы (1.106), (1.107). Для этого достаточно применить операцию *rot* к первому уравнению системы (1.106) и выразить $\mathbf{E}$ через $\mathbf{H}$ с помощью остальных уравнений:

$$rot\, rot\, \mathbf{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Так как $rot\, rot\, \mathbf{H}{=}\nabla\, div\, \mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}{=} -\Delta\mathbf{H}$, то

$$\Delta\mathbf{H} = \frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \qquad (1.115)$$

Если проводимость среды мала, так что в первом уравнении системы (1.106) можно пренебречь током проводимости $\mathbf{j}$, то уравнение (1.115) становится волновым:

$$\mathbf{H}_{tt} = a^2\Delta\mathbf{H}, \qquad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\,\mu}\,.$$

Если проводимость среды велика и можно пренебречь током смещения $\mathbf{D}_t/(4\pi)$, то процесс распространения поля имеет диффузионный характер:

$$\mathbf{H}_t = a^2\Delta\mathbf{H}, \qquad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\,\sigma\,\mu}. \tag{1.116}$$

В случае периодического электромагнитного поля с частотой ω, т.е. $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathcal{E}(\mathbf{r})\,e^{i\,\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathcal{H}(\mathbf{r})\,e^{i\,\omega t}$, условие малости тока смещения по сравнению с током проводимости принимает вид:

$$\frac{1}{4\pi}|\mathbf{D}_t| \sim \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}|\mathbf{E}| \ll |\mathbf{j}| = \sigma|\mathbf{E}| \Longrightarrow \varepsilon\omega \ll \sigma.$$

Для металлов, проводимость которых достаточно велика, это условие выполняется практически для всех частот, применяемых в технике; оно нарушается в инфракрасной области спектра из-за дисперсии (ε и σ зависят от ω), где (по той же причине) неприменимы и уравнения Максвелла).

Поля и токи частоты ω называются квазистационарными в области Ω_l с диаметром l, если $l\omega \ll c$. В этом приближении возмущения электромагнитного поля распространяются в пределах Ω_l мгновенно (см. пример 1.20.) Поэтому переменный ток в проводнике с размерами l создает вблизи проводника в каждый момент времени такое же магнитное поле, как и постоянный ток, плотность которого равна плотности переменного тока в этот момент. Таким образом, в некоторой окрестности проводника можно использовать (в каждый момент времени) уравнение для статического поля $rot\,\mathbf{H}$=0. Это уравнение применяют во всем внешнем пространстве, если задача состоит в определении поля только в проводнике. На поверхности проводника должны быть непрерывны тангенциальная компонента $\mathbf{H}$ и нормальная компонента $\mathbf{B}$.

Бесконечный цилиндрический проводник с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l_1, |y|<l_2$) находится в продольном магнитном поле $\mathbf{H}_0=\mathcal{H}_\mathbf{0}\exp(i\,\omega\,t)\mathbf{e}_z$. [3] Задача для определения

[3] В действительности поле имеет вид $\mathcal{H}_\mathbf{0}\cos\omega t$ (или $\mathcal{H}_0\sin\omega t$); комплекс-

установившегося поля в проводнике в квазистационарном приближении ставится следующим образом.

Установившееся магнитное поле $\mathbf{H} = \mathcal{H}\, e^{i\omega t}\mathbf{e}_z$ вне проводника удовлетворяет уравнениям $rot\,\mathbf{H}{=}0$, $div\,\mathbf{H}{=}0$ и условию $\mathbf{H}(\infty){=}\mathbf{H}_0$, т.е.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \mathcal{H} = \mathcal{H}_0, \;\; r = \sqrt{x^2+y^2},$$

откуда $\mathcal{H}{=}\mathcal{H}_0$. Поле в проводнике удовлетворяет уравнению (1.116) и условиям "сшивки"на поверхности:

$$\Delta\mathcal{H} - \frac{4\pi i\mu\sigma\omega}{c^2}\,\mathcal{H} = 0, \quad -l_1 < x < l_1, \;\; -l_2 < y < l_2,$$

$$\mathcal{H}(\pm l_1, y) = \mathcal{H}(x, \pm l_2) = \mathcal{H}_0.$$

1.363. Проводящий слой ($-l{<}x{<}l$) находится в продольном магнитное поле $\mathcal{H}_0 \exp(i\,\omega\, t)$. Поставить в квазистационарном приближении задачу для определения установившегося магнитного поля в слое.

1.364. Неограниченный проводящий цилиндр, радиус которого r_0, помещен в продольное магнитное поле $\mathcal{H}_0 \exp(i\,\omega\, t)$. Поставить в квазистационарном приближении задачу для определения установившегося магнитного поля и плотности токов Фуко в цилиндре.

Поставить задачи 1.365 – 1.366 для определения магнитного поля в однородном проводнике, пренебрегая токами смещения.

1.365. Бесконечный цилиндр, радиус которого r_0, находится в продольном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, которое включается в момент времени $t{=}0$ и остается равным $\mathbf{H}_0$ вне цилиндра при $t{>}0$.

ная форма записи удобна при выполнении линейных операций, после завершения которых нужно отделить действительную (или мнимую) часть в полученных выражениях.

1.366. Проводник занимает полупространство ($z>0$). В момент времени $t=0$ в области $z<0$ включается магнитное поле $\mathbf{H}_0$, параллельное плоскости $z=0$, и остается равным $\mathbf{H}_0$ при $z<0$, $t>0$.

Поставить задачи 1.367–1.369 для плотности переменного тока частоты ω в однородном проводнике, характеристики которого ε, μ, σ, при условии $\varepsilon\omega \ll \sigma$ (задачи о скин-эффекте).

1.367. В полупространстве ($z>0$) в направлении оси $0x$ течет ток, амплитуда которого (на единицу длины оси $0y$) J.

1.368. В слое ($|z|<l$) в направлении оси $0x$ течет ток, амплитуда которого (на единицу длины оси $0y$) равна J.

1.369. По цилиндрическому проводнику, радиус которого r_0, течет ток, амплитуда тока равна J.

1.370. В полностью ионизованном газе (плазме), который состоит из ионов (заряд Ze, масса m, плотность n) и электронов (заряд $-e$, масса m_e, плотность n_e), распространяются одномерные ионно-акустические волны, т.е. колебания плотности ионов. Электронный газ описывается уравнением состояния $p_e=k_B n_e T_e$, где p_e — давление, k_B — постоянная Больцмана, T_e — температура электронов (мера энергии); уравнение состояния ионов, энергия которых мала, $p=0$. В предположении отсутствия токов в плазме 1) показать, что ее состояние описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial n}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \\ &\tfrac{\partial v}{\partial t} + v\tfrac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{Ze}{m}E, \\ &eEn_e + k_B T_e \tfrac{\partial n_e}{\partial x} = 0, \\ &\tfrac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(Zn - n_e), \end{aligned} \tag{1.117}$$

где v — скорость ионов, E — электрическое поле в плазме; 2) записать систему уравнений (1.117) в безразмерных переменных (они обозначены прежними символами)

$$\frac{x}{L}, \quad t\omega_0, \quad \frac{n}{n_0}, \quad \frac{n_e}{Zn_0}, \quad \frac{k_B T_e}{eL}E, \quad \frac{v}{\omega_0 L}, \tag{1.118}$$

где

$$L = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi Z e^2 n_0}}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n_0 Z^2 e^2}{m}}.$$

Здесь L — дебаевская длина для плазмы, ω_0 — ионная плазменная частота, n_0 — равновесная плотность; 3) вывести систему уравнений для ионно-акустических волн в локально нейтральной плазме.

1.371. Ленгмюровскими волнами в двухкомпонентной плазме (задача 1.370.) называются колебания электронной составляющей при условии, что скорости ионов пренебрежимо малы. Показать, что одномерные ленгмюровские волны моделируются системой уравнений (индекс e у величин n, T, v опущен)

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial n}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \\ &\tfrac{\partial v}{\partial t} + v\tfrac{\partial v}{\partial x} + \tfrac{k_B T}{mn}\tfrac{\partial n}{\partial x} = -\tfrac{e}{m}E, \\ &\tfrac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(Zn_0 - n) \end{aligned} \tag{1.119}$$

и записать эту систему в безразмерных переменных (1.118).

1.372. Показать, что в двухкомпонентной плазме (задача 1.370.) могут распространяться уединенные ионно-акустические волны, которые описываются уравнением КдФ.

1.373. Часть пространства, ограниченная замкнутой идеально проводящей поверхностью S, называется резонатором. Поставить задачу для определения собственных электромагнитных колебаний в резонаторе.

1.374. Показать,что 1) произвольное электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3), \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$$

является суперпозицией полей

$$\begin{aligned} &\mathbf{E^{(1)}} = (E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, E_3^{(1)}), \quad &&\mathbf{H^{(1)}} = (H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, 0) \\ &\mathbf{E^{(2)}} = (E_1^{(2)}, E_2^{(2)}, 0), &&\mathbf{H^{(2)}} = (H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, H_3^{(2)}); \end{aligned}$$

2) в ортогональной криволинейной системе координат (q_1, q_2, q_3) с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3, где $h_1{=}1$, а отношение h_2/h_3 не зависит от q_1, компоненты электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = e^{i\omega t}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3), \quad \mathbf{H} = e^{i\omega t}(0, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$$

(поле электрического типа) выражаются через функцию u по формулам

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} + k^2 u, & \mathcal{E}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2}, & \mathcal{E}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3}, \\ \mathcal{H}_1 = 0, & \mathcal{H}_2 = \frac{ik}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}, & \mathcal{H}_3 = -\frac{ik}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}, \end{array}$$

где u — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] + k^2 u = 0,$$

а компоненты электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = e^{i\omega t}(0, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3), \quad \mathbf{H} = e^{i\omega t}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$$

(поле магнитного типа) выражаются через функцию v по формулам

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_1 = 0, & \mathcal{E}_2 = -\frac{ik}{h_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}, & \mathcal{E}_3 = \frac{ik}{h_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}, \\ \mathcal{H}_1 = \frac{\partial^2 v}{\partial q_1^2} + k^2 v, & \mathcal{H}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_2}, & \mathcal{H}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_3}, \end{array}$$

где v удовлетворяет тому же уравнению, что и функция u.

Поставить задачи 1.375 – 1.377 для определения собственных электромагнитных колебаний в резонаторе, используя функции u и v, введенные в предыдущей задаче.

1.375. Резонатор — конечный цилиндр ($r{<}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $0{<}z{<}l$).

1.376. Резонатор представляет собой цилиндрический сектор ($r{<}r_0$, $0{<}\varphi{<}\alpha{<}2\pi$, $0{<}z{<}l$).

1.377. Резонатор представляет собой сферу, радиус которой r_0.

1.378. Внутри полого цилиндрического проводника могут распространяться электромагнитные волны. Подобная система называется волноводом. Волна, в которой либо оба вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, либо только один из векторов перпендикулярны направлению распространения волны, называется соответственно поперечной волной (TEM-волной), поперечной электрической волной (TE-волной) или поперечной магнитной волной (TM-волной). Поставить задачи для определения TE- и TM-волн в идеально проводящем волноводе, поперечным сечением которого служит односвязная область Ω, и показать, что TEM-волну такой волновод не пропускает.

1.379. Поставить задачу для определения $TE-$ и $TM-$волн, распространяющихся в пространстве между проводящими плоскостями $x{=}0$ и $x{=}l$.

1.380. Диэлектрический волновод с оптическим диапазоном называется оптическим волноводом, или световодом. Он состоит из цилиндрического стержня (сердцевины) и оболочки, показатели преломления которых $n_1{=}\sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2{=}\sqrt{\varepsilon_2}{=}Const{<}n_1$ соответственно, а магнитная проницаемость $\mu{=}1$. Изменение показателя преломления по поперечному сечению волновода (профиль показателя преломления) определяет волноводы со ступенчатым профилем показателя преломления ($n_1{=}Const$) и градиентные волноводы (n_1 непрерывно уменьшается от наибольшего значения на оси до значения n_2 на границе с оболочкой).

Благодаря полному внутреннему отражению на границе с оболочкой, в волноводе могут распространяться электромагнитные волны (направляемые моды). Поставить задачу для определения TE-мод

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,z,t) &= e^{i(\beta z-\omega t)}(0,\,\mathcal{E}_y(x),\,0),\\ \mathbf{H}(x,z,t) &= e^{i(\beta z-\omega t)}(\mathcal{H}_x(x),\,0,\,\mathcal{H}_z(x))\end{aligned} \tag{1.120}$$

и TM-мод

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,z,t) &= e^{i(\beta z-\omega t)}(\mathcal{E}_x(x),\,0,\,\mathcal{E}_z(x)),\\ \mathbf{H}(x,z,t) &= e^{i(\beta z-\omega t)}(0,\,\mathcal{H}_y(x),\,0)\end{aligned} \tag{1.121}$$

в плоском симметричном волноводе со ступенчатым профилем показателя преломления

$$n(x)=\begin{cases} n_1, & |x|\le l,\\ n_2, & |x|\ge l.\end{cases}$$

Показать, что 1) монохроматическая волна, распространяющаяся в направлении $0z$, есть суперпозиция TE- и TM-мод. 2) моды, для которых $\beta{>}kn_1$, плоский симметричный волновод не пропускает.

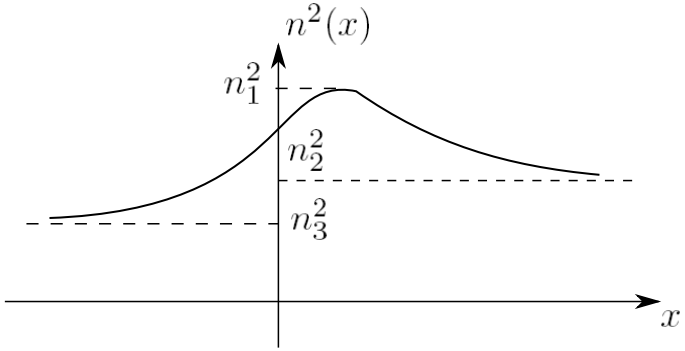

Рис. 1.15

1.381. Технология изготовления оптических волноводов включает различные физические процессы (например, диффузию, имплантацию ионов); в результате получается волновод с градиентным профилем показателя преломления. Поставить задачу для определения TE- и TM-мод вида (1.120), (1.121) в плоском волноводе, профиль показателя преломления которого

$$n(x)=\begin{cases} n_1(x), & |x|\le l,\\ n_2=Const, & |x|\ge l.\end{cases}$$

1.382. Поставить задачу для определения электромагнитного поля в TE- и TM-модах вида (1.120) и (1.121), распространяющихся в плоском волноводе с асимметричным профилем показателя преломления (рис.1.15).

1.383. В оптике используются круглые стеклянные волноводы, состоящие из сердцевины с показателем преломления n_1 и толстой оболочки, показатель преломления которой $n_2<n_1$ (ступенчатые оптические волокна). 1. Показать, что любая мода с аксиально симметричным полем, распространяющаяся в ступенчатом волокне, является суперпозицией TE-мод

$$\mathbf{E}(r,z,t) = e^{i(\beta z-\omega t)}(\mathcal{E}_r(r),\,0,\,\mathcal{E}_z(r)),$$
$$\mathbf{H}(r,z,t) = e^{i(\beta z-\omega t)}(0,\,\mathcal{H}_\varphi(r),\,0)$$

и TM-мод

$$\mathbf{E}(r,z,t) = e^{i(\beta z-\omega t)}(0,\,\mathcal{E}_\varphi(r),\,0),$$
$$\mathbf{H}(r,z,t) = e^{i(\beta z-\omega t)}(\mathcal{H}_r(r),\,0,\,\mathcal{H}_z(r))$$

и поставить задачи для их определения. 2. Доказать, что моды, для которых $\beta<kn_2$ или $\beta>kn_1$, в ступенчатом волокне распространяться не могут.

1.384. 1. Поставить задачу для определения электромагнитного поля волны

$$\mathbf{E}(r,\varphi,z,t) = \mathcal{E}(r,\varphi)\,e^{i(\beta z-\omega t)},\quad \mathbf{H}(r,\varphi,z,t) = \mathcal{H}(r,\varphi)\,e^{i(\beta z-\omega t)},$$

распространяющейся в ступенчатом оптическом волокне, профиль показателя преломления которого

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & 0 < r < r_0 \\ n_2, & r_0 < r, \end{cases}$$

где $n_2<n_1$. 2. Показать на примере волны (1.123), что в ступенчатом волокне не распространяются волны, для которых $\beta<kn_2$ или $\beta>kn_1$.

1.385. При расчете волоконно-оптических линий связи необходимо учитывать расплывание сигнала из-за дисперсии, которая обусловлена зависимостью показателя преломления от частоты (частотная дисперсия), зависимостью постоянной распространения моды от частоты (внутримодовая, или волноводная, дисперсия), различием групповых скоростей разных мод (межмодовая дисперсия). Для уменьшения межмодовой дисперсии используют градиентные волокна с α-профилем показателя преломления

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2(1-2\Delta f(r), & 0<r<r_0, \\ n_2^2, & r_0<r, \end{cases} \qquad (1.122)$$

$$2\Delta = \frac{n_1^2-n_2^2}{n_1^2}, \qquad f(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}.$$

Показатель степени α выбирают так, чтобы разность оптических путей различных мод была минимальна.

Доказать, что в световоде с α -профилем амплитуды электромагнитного поля волны

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(r,\varphi,z,t) = \mathcal{E}(r)\, e^{i(\beta z + m\varphi - \omega t)}, \\ &\mathbf{H}(r,\varphi,z,t) = \mathcal{H}(r) e^{i(\beta z + m\varphi - \omega t)}, \end{aligned} \qquad m \in \mathbf{N}, \qquad (1.123)$$

удовлетворяют при $r<r_0$ уравнениям

$$\mathcal{E}_z'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta^2 s^2 f'}{k^2 n^2 b^2}\right)\mathcal{E}_z' + \left(\frac{b^2}{r_0^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)\mathcal{E}_z = -i\frac{\beta\, m\, s^2 f'}{k\, n^2 b^2 r}\mathcal{H}_z, \qquad (1.124)$$

$$\mathcal{H}_z'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{s^2 f'}{b^2}\right)\mathcal{H}_z' + \left(\frac{b^2}{r_0^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)\mathcal{H}_z = i\frac{\beta\, m\, s^2 f'}{k\, b^2 r}\mathcal{E}_z, \qquad (1.125)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{r_0^2}{b^2}\left(i\beta\,\mathcal{E}_z' - \frac{k\,m}{r}\mathcal{H}_z\right), \\ \mathcal{H}_r &= \frac{r_0^2}{b^2}\left(\frac{k\,m\,n^2}{r}\mathcal{E}_z + i\beta\mathcal{H}_z'\right), \\ \mathcal{E}_\varphi &= -\frac{r_0^2}{b^2}\left(\frac{\beta\,m}{r}\mathcal{E}_z + ik\mathcal{H}_z'\right), \\ \mathcal{H}_\varphi &= \frac{r_0^2}{b^2}\left(i\,k\,n^2\mathcal{E}_z' - \frac{\beta\,m}{r}\mathcal{H}_z\right), \end{aligned} \qquad (1.126)$$

где

$$\begin{array}{ll} q^2=(k^2n_1^2-\beta^2)r_0^2, & s^2=k^2(n_1^2-n_2^2)r_0^2, \\ b^2=q^2-f\,s^2, & k=\frac{\omega}{c}\,. \end{array} \tag{1.127}$$

1.386. Широкое практическое применение имеют оптические волокна с небольшой (не более 1%) относительной разностью показателей преломления сердцевины и оболочки (слабонаправляющие оптические волокна). Показать, что амплитуды электромагнитного поля волны вида (1.123), распространяющейся в слабонаправляющем оптическом волокне с α-профилем показателя преломления (1.122), определяются при $r<r_0$ выражениями:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_r i\psi_j, & \mathcal{E}_\varphi=\pm\psi_j, & \mathcal{E}_z=-\frac{1}{kn_1}\left(\psi_j'\pm\frac{m\pm1}{r}\psi_j\right), \\ \mathcal{H}_r=\mp n_1\psi_j, & \mathcal{H}_\varphi=in_1\psi_j, & \mathcal{H}_z=\mp\frac{i}{k}\left(\psi_j'\pm\frac{m\pm1}{r}\psi_j\right), \end{array}$$

где $\psi_j(r)$ — решение уравнения

$$\psi_j''+\frac{1}{r}\psi_j'+\left(\frac{q^2-s^2f}{r_0^2}-\frac{(m\pm1)^2}{r^2}\psi_j\right)=0, \qquad j=1,2, \tag{1.128}$$

верхний знак соответствует j=1, нижний — j=2, q, s, k определены выражениями (1.127).

1.387. В слабонаправляющем градиентном волноводе с профилем показателя преломления $n(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=x\,\mathbf{e}_x+y\,\mathbf{e}_y$ распространяется волна

$$\mathbf{E}=\mathcal{E}(\mathbf{r})e^{i(\beta z-\omega t)}, \quad \mathbf{H}=\mathcal{H}(\mathbf{r})e^{i(\beta z-\omega t)}\,. \tag{1.129}$$

Показатель преломления мало меняется на расстояниях порядка длины волны. Доказать, что компоненты

$$\mathcal{E}_\nu=\mathcal{E}_x\mathbf{e}_x+\mathcal{E}_y\mathbf{e}_y, \quad \mathcal{H}_\nu=\mathcal{H}_x\mathbf{e}_x+\mathcal{H}_y\mathbf{e}_y$$

выражаются через $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$ посредством формул

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_\nu=\frac{i}{k^2n^2-\beta^2}(\beta\nabla\mathcal{E}_z-k[\mathbf{e}_z\,\nabla\mathcal{H}_z]), \\ \mathcal{H}_\nu=\frac{i}{k^2n^2-\beta^2}(\beta\nabla\mathcal{H}_z+kn^2[\mathbf{e}_z\,\nabla\mathcal{E}_z]), \end{array} \tag{1.130}$$

а каждая из компонент $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$ является решением уравнения

$$\Delta\psi + (k^2n^2 - \beta^2)\psi = 0. \tag{1.131}$$

Пример 1.26. Постановка задачи для электромагнитного поля точечного заряда q, движущегося в вакууме со скоростью $v_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор.

Электромагнитное поле точечного заряда описывается системой уравнений (1.106), (1.107):

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1.132}$$

$$rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1.133}$$

$$div\,\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{1.134}$$

$$div\mathbf{H} = 0\,. \tag{1.135}$$

Эту систему удается преобразовать посредством введения потенциалов — векторного $\mathbf{A}$ и скалярного u. Пусть $\mathbf{H}{=}rot\,\mathbf{A}$, тогда уравнение (1.135) выполняется тождественно, а из уравнения (1.132), записанного в виде $rot(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{A}_t) = 0$, следует, что $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{A}_t = -\nabla u$. Введенные таким образом потенциалы определены неоднозначно: замены $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f + C_1$ и $u \to u - \frac{1}{c}f_t + C_2$ не влияют на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому функции $\mathbf{A}$ и u можно связать дополнительным условием

$$div\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}u_t = 0,$$

которое выбрано так, чтобы уравнения для потенциалов были наиболее простыми. Эти уравнения получаются подстановкой

$$\mathbf{E} = -\nabla u - \frac{1}{c}\mathbf{A}_t, \qquad \mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} \tag{1.136}$$

в (1.134) и (1.133):

$$u_{tt} = c^2\Delta u + 4\pi c^2\rho,$$

$$\mathbf{A}_{tt} = c^2\Delta\mathbf{A} + 4\pi c\mathbf{j}\,.$$

В данном случае $\rho = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$, $\mathbf{j} = q\,\mathbf{v}_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$, $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$, так что

$$u_{tt} = c^2\Delta u + 4\pi c^2 q\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t),$$
$$A_{tt} = c^2\Delta A + 4\pi c q\mathbf{v}_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t),$$

при этом каждая из функций $A(\mathbf{r}, t)$ и $u(\mathbf{r}, t)$ при любом t должна удовлетворять условиям излучения (1.80).

1.388. Момент точечного электрического диполя меняется по закону $\mathbf{p}_0\, f(t)\,\eta(t)$, $f(0)=0$, $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор. Поставить задачу для определения электромагнитного поля диполя.

1.389. Момент точечного электрического диполя меняется со временем по закону $\mathbf{p}_0 \exp(i\omega t\,)$, где $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор. Поставить задачу для определения установившегося электромагнитного поля диполя.

1.390. Поставить задачу для определения установившегося электромагнитного поля точечного магнитного диполя с моментом $\mathbf{M}_0 \exp(i\omega t)$, где $\mathbf{M}_0$—постоянный вектор.

1.391. Бесконечный цилиндр (радиус r_0, μ=1) находится в магнитном поле $\mathbf{H}_0 \exp(i\omega t)$, перпендикулярном оси цилиндра. Поставить в квазистационарном приближении задачу для определения установившегося магнитного поля в цилиндре.

1.392. Шар, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ=1, находится в магнитном поле $\mathbf{H}_0 \exp(i\omega t)$. Поставить в квазистационарном приближении задачу для определения установившегося магнитного поля в шаре.

Пример 1.27. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). При воздействии электромагнитного поля $\mathbf{E}$ на изотропный диэлектрик в нем происходит смещение электронов в молекулах (поляризация диэлектрика), в результате чего возникает дипольный

момент с объемной плотностью $\mathbf{P}{=}\alpha\mathbf{E}$. Линейная зависимость между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ моделирует процесс поляризации диэлектрика, если поле E мало по сравнению с внутримолекулярными полями, в противном случае коэффициент поляризации α зависит от E. Для небольших полей эту зависимость можно аппроксимировать разложением $\alpha(E) = \alpha_1 + \alpha_2 E + \alpha_3 E^2$. Так как это соотношение должно быть инвариантно относительно преобразования координат $\mathbf{r}'{=}-\mathbf{r}$ и замены $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$, то $\alpha_2{=}0$, следовательно,

$$\mathbf{P} = \alpha_1 \mathbf{E} + \alpha_3 E^2 \mathbf{E}. \tag{1.137}$$

В средах с быстро протекающими электронными процессами формула (1.137) верна и для переменного электромагнитного поля, так как поляризация $\mathbf{P}$ в момент времени t определяется полем $\mathbf{E}$ в этот же момент.

Пусть линейно поляризованная монохроматическая волна (вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ направлен по оси $0x$, волна распространяется вдоль оси $0z$) падает на однородный изотропный диэлектрик. Поле волны описывается уравнениями (1.106), (1.107) и уравнением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Результатом исключения $\mathbf{H}$ является уравнение

$$rot\, rot\, \mathbf{E} + \beta\, \mathbf{E}_{tt} + \gamma (E^2 \mathbf{E})_{tt} = 0, \tag{1.138}$$

где $\beta = (1 + 4\pi\alpha_1)/c^2$, $\gamma{=}4\pi\alpha_3/c^2$. В линейном приближении уравнение (1.138) имеет вид $\Delta\mathbf{E} - \beta\, \mathbf{E}_{tt} = 0$ и описывает волну

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \mathcal{E} e^{i(kz - \omega t)}, \tag{1.139}$$

амплитуда $\mathcal{E}(x, y)$ которой является решением уравнения Гельмгольца $\Delta\mathcal{E} + (k^2 - \beta)\, \mathcal{E} = 0$. Такая модель справедлива для малых колебаний и применима к задачам классической оптики (обычные источники света создают поля небольшой интенсивности). Если колебания не слишком малы (например, возбуждаются источниками лазерного излучения), то надо учитывать нелинейные эффекты. В этом случае амплитуда $\mathcal{E}$ является функцией $x,\ y,\ z,$

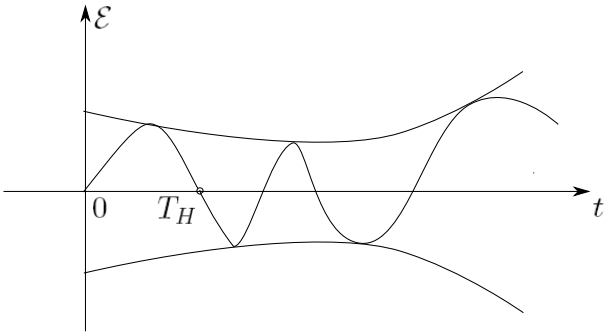

Рис. 1.16

t и представляет собой огибающую несущей волны (ршс. 1.16/ Для практики интересны процессы в слабо нелинейных системах (прозрачные диэлектрики, плазма) обусловленные распространением волн малой амплитуды, огибающая которых близка к $\mathcal{E}(x,y)$ и является медленно меняющейся функцией переменных z и t (период T несущей волны много меньше периода T огибающей, или $\lambda \ll \lambda_o$). В некоторых задачах нелинейной оптики (например, в задаче о самофокусировке) рассматривается волна, распространяющаяся вдоль оси $0z$, поле $E\mathbf{e}_x$ которой не зависит от y и медленно меняется в зависимости от x. В этом случае

$$\begin{aligned} div\mathbf{D} &= div\,[(1+4\pi\alpha_1)\mathbf{E} + 4\pi\alpha_3 E^2\mathbf{E}] = \\ &= (1+4\pi\alpha_1+4\pi\alpha_3 E^2) div\,\mathbf{E} + 8\pi\alpha_3(\mathbf{E}\,\nabla E)\mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

и, так как $(\mathbf{E}\nabla E)$=0, то $div\mathbf{E}$=0. Следовательно, уравнение (1.138) преобразуется в

$$\Delta E - \beta\, E_{tt} = \gamma (E^3)_{tt}\,. \tag{1.140}$$

При выводе уравнения для огибающей используется метод многомасштабных разложений теории возмущений (см.[51]). Различие в масштабах величин $T_{\text{н}}$, $\lambda_{\text{н}}$ и $T_{\text{о}}$, $\lambda_{\text{о}}$, а также медленную

зависимость от x можно учесть с помощью положительного параметра $\varepsilon \ll 1$, полагая $\mathcal{E}{=}\mathcal{E}(\varepsilon\mathbf{r}, \varepsilon t)$. Это значит, что аргументами функции $\mathbf{E}$, определенной выражением (1.139), являются величины $\mathbf{r},\ t,\ R_1{=}\varepsilon\,\mathbf{r},\ T_1{=}\varepsilon\,t$, которые следует считать независимыми, так как невозможно отделить ε от $\mathbf{r}$ (или ε от t). В общем случае наряду с $\mathbf{r}$ и t вводятся переменные $\mathbf{R}_n{=}\varepsilon^n\mathbf{r},\ T_n{=}\varepsilon^n t,\ n \in\ bfN$, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial X_2} + \ldots.$$

В соответствии с методами теории возмущений решение уравнения (1.140) записывается в виде ряда (пример 1.7.)

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \ldots\,. \tag{1.141}$$

После подстановки разложения (1.141) в (1.140) и приравнивания к нулю коэффициентов при ε, ε^2, $\varepsilon^3, \ldots$, получается цепочка уравнений

$$\Delta E_1 - \beta E_{1tt} = 0, \tag{1.142}$$
$$\Delta E_2 - \beta E_{2tt} - 2\left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial z \partial Z_1} - \beta\frac{\partial^2 E_1}{\partial t \partial T_1}\right), \tag{1.143}$$
$$\begin{aligned}\Delta E_3 - \beta E_{3tt} - 2\left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z \partial Z_1} - \beta\frac{\partial^2 E_2}{\partial t \partial T_1}\right) - \\ -2\left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial x \partial X_2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial z \partial Z_2} - \beta\frac{\partial^2 E_1}{\partial t \partial T_2}\right) - \\ -\left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial Z_1^2} - \beta\frac{\partial^2 E_1}{\partial T_1^2}\right) + \gamma\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Уравнение (1.142) представляет собой линейное приближение уравнения (1.140) и имеет решение

$$E_1 = \mathcal{E}(X_1, Z_1, T_1, \ldots,)e^{i\theta} + c.c.,$$

где $\theta = kz - \omega t + \delta$, $k^2 = \beta\,\omega^2$, с.с. означает комплексно сопряженное первое слагаемое. Подстановка E_1 в уравнение (1.143) преобразует его к виду

$$\Delta E_2 - \beta \frac{\partial^2 E_2}{\partial n^2} - 2i\left(k\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} + \beta\omega\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_1}\right)e^{i\theta} + c.c.$$

Это уравнение имеет возрастающее с ростом θ решение $\theta \exp i\theta$, что противоречит физическому смыслу. Поэтому члены в правой части, порождающие такое решение (их называют секулярными), должны быть равны нулю:

$$k\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} + \beta\omega\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_1} = 0\,.$$

При этом условии функция $E_2{=}E_1$ удовлетворяет уравнению (1.143), а для E_3 получается уравнение

$$\Delta E_3 - \beta\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial X_1^2} + 2ik\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} + 2i\beta\omega\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2} + 3\gamma\omega^2|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}\right)e^{i\theta} - \\ -9\gamma\omega^2\mathcal{E}^3 e^{3i\theta} + c.c.$$

Условие отсутствия секулярных членов

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial X_1^2} + 2i\left(k\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} + \beta\omega\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2}\right) + 3\gamma\omega^2|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = 0$$

представляет собой НУШ; в переменных $\xi{=}X_1$, $\eta{=}Z_2{-}T_2/\sqrt{\beta}$, $\tau{=}T_2$ оно принимает вид:

$$2i\beta\omega\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \xi^2} + 3\gamma\omega^2|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = 0. \qquad (1.144)$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \varepsilon \mathcal{E}(X_1, Z_1, T_1, Z_2, T_2)e^{i\theta} + c.c. + O(\varepsilon^2),$$

где $\mathcal{E}$ — решение НУШ.

1.393. Привести НУШ (1.144) к каноническому виду

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0\,. \tag{1.145}$$

1.394. Доказать, что в двухкомпонентной плазме может распространяться одномерная ленгмюровская волна (задача 1.371.) с медленно меняющейся огибающей, удовлетворяющей НУШ.

1.395. Показать, что в слабонелинейной системе, которая модулируется уравнением) КдФ (1.26); 2) мКдФ (1.28) могут распространяться волны с медленно меняющейся амплитудой, удовлетворяющей НУШ.

1.396. Показать, что в нелинейной системе, описываемой уравнением СГ (1.29) при условии $|u| \ll 1$, могут распространяться волны с медленно меняющейся огибающей, которая удовлетворяет НУШ.

1.5. Ответы

1.1. Указания. п.1. Уравнение движения внутреннего элемента $\Delta x \Delta S$ стержня: $\rho \Delta x \Delta S v_t = \sigma \Delta S|_{x+\Delta x} - \sigma \Delta S|_x$. Деформация $\varepsilon(x,t) = u_x(x,t)$, скорость элемента стержня $v(x,t) = u_t(x,t)$, где $u(x,t)$ — отклонение от положения равновесия в момент $t > 0$ сечения, равновесная координата (при $t = 0$) которого равна x (пример 1.1.) п.3. Напряжение $\sigma = E u_x$, где E — модуль Юнга (пример 1.1.) **1.2.** Решение п.2. Нужно проверить, что функция, определенная посредством (1.11) удовлетворяет уравнению (1.9):

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial x}\sigma\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -\tfrac{\partial}{\partial t}h(u_x) - \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial x}\sigma(u_x) = -h'(u_x)u_{xt} - \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} = \\ = -h'(u_x)(u_t)_x - \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} = -h'(u_x))(-h(u_x)_x - \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} = \\ = (h'(u_x)^2 u_{xx} - \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} = \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} - \tfrac{1}{\rho}\sigma'(u_x)u_{xx} = 0.\end{aligned}$$

1.3. $\frac{\partial u}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x, \ 0 < t,$
$u(0,t) = \mu(t), \ \ u(0,t) = u_t(0,t) = 0.$

Решение.Так как при малых деформациях $\sigma(u_x) = E\,u_x$, то в случае однородного стержня $h(u_x) = a\,u_x$, где $a = \sqrt{E/\rho}$, уравнение (1.10) становится линейным: $u_t + a\,u_x = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любая гладкая функция $\phi(x - at)$, представляющая собой прямую волну, т.е. волну, распространяющуюся в положительном направлении оси $0x$. Уравнение (1.14) описывает обратную волну. При движении торца возникает только

прямая волна, следовательно, функция $u(x,t)$ — решение уравнения (1.10). Из начальных условий следует, что $u_x(0,0) = u_t(0,0)$, откуда $h(0) = 0$ и $C_1 = 0$. **1.8.** $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \ \ ESu_x(l,t) = F(t), \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.9. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = 0, \ \ ESu_x(l,t) + ku(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{F_0}{ES}(l - x + \tfrac{ES}{k}), \quad u_t(x,0) = 0.$$
Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$ — решение стационарной задачи:
$$u_0'' = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$ESu_0'(0) = -F_0, \ \ ESu_0'(l) + ku_0(l) = 0.$$
1.10. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$ESu_x(0,t) - k[u(0,t) - u_0] = 0, \ \ u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.11. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$ESu_x(0,t) - ku(0,t) = -F(t), \ \ u_x(l,t) = 0, \ \ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.12. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = \tfrac{I}{\rho S}\delta(x).$$
Указание. В результате удара сечение x=0, имеющее нулевую массу, получает конечный импульс, поэтому начальную скорость сечений стержня следует отыскивать в виде: $u_t(x,0)$=$A\,\delta(x)$; константа A определяется условием: $(\rho, u_t(x,0)) = I$.

1.13. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$ESu_x(0,t) = -F_1(t), \ \ ESu_x(l,t) = F_2(t),$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.14. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = -\tfrac{F_0 x}{ES}, \ \ u_t(x,0) = 0.$$
Указание. Начальные отклонения $u(x,0) = u_0(x)$ сечений стержня от положения равновесия можно найти либо из закона Гука, либо решая стационарную задачу
$$u_0'' = 0, \ \ 0 < x < l, \ u_0(0) = 0, \quad u_0'(l) = \tfrac{F_0}{ES}$$
1.16. $$(l_0 - x)^2 u_{tt} = a^2 \tfrac{\partial}{\partial x}[(l_0 - x)^2 \tfrac{\partial u}{\partial x}], \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = -\tfrac{F_0 l_0^2 (l-x)}{ES_0(l_0-l)(l_0-x)}, \ \ u_t(x,0) = 0.$$
Указание. Начальные смещения сечений стержня определяются функцией $u_0(x)$, которая является решением стационарной задачи:
$$\tfrac{d}{dx}(l_0 - x)^2 \tfrac{du_0}{dx} = 0, \quad 0 < x < l, \ u_0'(0) = -\tfrac{F_0}{ES_0}, \ \ u_0(l) = 0.$$
1.15. $$(l_0 + x)u_{tt} = a^2 \tfrac{\partial}{\partial x}[(l_0 + x)\tfrac{\partial u}{\partial x}], \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{F_0}{2\pi pE} \ln\left(1 + \tfrac{x}{l_0}\right), \ \ u_t(x,0) = 0, \quad a^2 = \tfrac{E}{\rho}.$$

Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$, определяющая начальные смещения сечений стержня, является решением стационарной задачи:

$$\tfrac{d}{dx}(l_0+x)\tfrac{du_0}{dx} = 0, \quad 0 < x < l,\ u_0(0) = 0,\ \ u_0'(l) = \tfrac{F_0}{2\pi pE(l_0+l)}.$$

1.17.
$$(l_0-x)u_{tt} = a^2\tfrac{\partial}{\partial x}(l_0-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \tfrac{l_0F_0}{ES_0}\ln\tfrac{l_0-x}{l_0-l},\ \ u_t(x,0) = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0){=}u_0(x)$, определяющая начальные смещения сечений стержня, является решением стационарной задачи:

$$\tfrac{\partial}{\partial x}(l_0-x)\tfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l,\ ES_0u'(0) = -F_0,\ \ u_0(l) = 0.$$

1.18.
$$(l_0-x)u_{tt} = a^2\tfrac{\partial}{\partial x}(l_0-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0,\ \ ES_0(1-\tfrac{l}{l_0})u_x(l,t) + k[u(l,t) - \mu(t)] = 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.19.
$$(l_0-x)^2u_{tt} = a^2\tfrac{\partial}{\partial x}(l_0-x)^2\tfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = 0,\ \ ES_0(1-\tfrac{l}{l_0})^2u_x(l,t) + ku(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{l_0^2F_0}{ES_0}\left(\tfrac{1}{l_0-l} - \tfrac{1}{l_0-x}\right) + \tfrac{F_0}{k},\ \ u_t(x,0) = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0){=}u_0(x)$ является решением стационарной задачи:

$$\tfrac{\partial}{\partial x}(l_0-x)^2\tfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$ES_0u_0'(0) = -F_0, \quad ES(l)u_0'(l) + ku_0(l) = 0.$$

1.20.
$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x).$$

Указание. Вариация функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(\tfrac{\rho Su_t^2}{2} - \tfrac{ESu_x^2}{2}\right)dxdt$$

осуществляется на функциях $u + \alpha\chi$, где $\chi(x,t_1) = \chi(x,t_2) = 0$ (в эти моменты времени система находится в точках реальной траектории), при $x = 0$ и $x = l$ никаких условий для $\chi(x,t)$ не ставится (вариационная задача со свободной границей). **1.21.** Указание. Внутренняя потенциальная энергия элемента Δx струны пропорциональна удлинению $\sqrt{1+u_x^2}\,\Delta x - \Delta x$ элемента; потенциальная энергия единицы длины струны равна

$$\tfrac{T(x)\left(\sqrt{1+u_x^2}\,\Delta x - \Delta x\right)}{\Delta x} \approx \tfrac{1}{2}T(x)u_x^2(x,t),$$

а кинетическая энергия $\rho u_t^2/2$. Соответствующий функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(\tfrac{\rho u_t^2}{2} - \tfrac{Tu_x^2}{2}\right)dxdt.$$

1.22.
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + g, \quad -l < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$u(-l,t) = u(l,t) = 0,\ u|_{t=0} = \tfrac{\rho g}{2T}(l^2-x^2) + \tfrac{F_0}{2T}(l-|x|),\ \ u_t|_{t=0} = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$, описывающая начальные отклонения,

является решением стационарной задачи задачи

$$u_0''(x) = -\tfrac{\rho g}{T}, \quad -l < x < 0, \;\; 0 < x < l,$$
$$u_0(-l) = u_0(l) = 0, \; u_0(+0) - u_0(-0) = 0, \; Tu'(+0) - Tu'(-0) = -F_0.$$

1.23. $u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad -l < x < l, \;\; 0 < t,$

$$u(-l,t) = u(l,t) = 0, \qquad \begin{array}{l} 1.\; u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = \tfrac{I}{2\rho r_0}\eta(r_0 - |x|); \\ 2.\; u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = \tfrac{I}{\rho}\delta(x - x_0). \end{array}$$

1.24. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$

$$u(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) = \tfrac{F(t)}{T}, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.25. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0\tfrac{x}{l}, \quad u_t(x,0) = 0.$$

1.26. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$

$$u(0,t) = 0, \;\; -Tu_x(l,t) = Mu_{tt}(l,t)0,$$
$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < l, \\ \frac{I}{M}, & x = l. \end{cases}$$

1.27. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - g, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$

$$u(0,t) = 0, \;\; Tu_x(l,t) + Mu_{tt}(l,t) = -Mg,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{\rho g x^2}{2T} - \frac{mgx}{T} + \frac{F_0 x}{T}, & 0 \le x \le x_0, \\ \frac{\rho g x^2}{2T} - \frac{mgx}{T} + \frac{F_0 x_0}{T}, & x_0 \le x \le l, \end{cases}$$

где m — суммарная масса струны и кольца. Указание. Функция $u(x,0)$=$u_0(x)$, описывающая начальные отклонения, является решением стационарной задачи

$$u_0'' = \tfrac{\rho g}{T} - \tfrac{F_0}{T}\delta(x - x_0), \;\; 0 < x < l,$$
$$u_0 = 0, \quad u_0'(l) = -\tfrac{Mg}{T},$$

эквивалентная форма которой (см.(10.15))

$$u_0''(x) = 0, \quad 0 < x < x_0, \;\; x_0 < x < l,$$
$$u_0(0) = 0, \quad u_0'(l) = -\tfrac{Mg}{T},$$
$$u_0(x_0 + 0) - u_0(x_0 - 0) = 0, \; Tu'(x_0 + 0) - Tu'(x_0 - 0) = -F_0.$$

Последние два условия выражают непрерывность струны и статическое равновесие точки $x = 0$.

1.28. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \;\; 0 < t,$

$$(u_x - h\,u)|_{x=0} = -h\,u_0 \sin \omega t, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \;\; h = \tfrac{k}{T}.$$

1.29. Задача имеет две (эквивалентные) постановки:

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{F_0}{\rho}\delta(x - vt)$, $-\infty < x < \infty, \;\; 0 < t,$ $u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$ $u(vt + 0, t) - u(vt - 0, t) = 0,$ $u_x(vt + 0, t) - u_x(vt - 0, t) = -\frac{F_0}{\rho(a^2 - v^2)}.$

Указание. Условия "сшивки" (т.е. граничные условия в точке приложе-

ния силы) в постановке 2 можно получить либо из дифференциального уравнения в постановке 1 после перехода к переменным $\xi{=}x{-}vt$, $\tau{=}t$ и применения формулы (10.15) обобщенного дифференцирования, либо с помощью 2-го закона Ньютона (изменение количества движения равно импульсу действующей силы) для элемента струны $\Delta x{=}x_2{-}x_1$, где $x_1 = vt_1$, $x_2 = vt_2$, (рис.1.17)

$$\rho\, u_{1t}\Delta x - \rho\, u_{2t}\Delta x = T_0 u_{2x}\Delta t - T_0 u_{1x}\Delta t + F_0\Delta t.$$

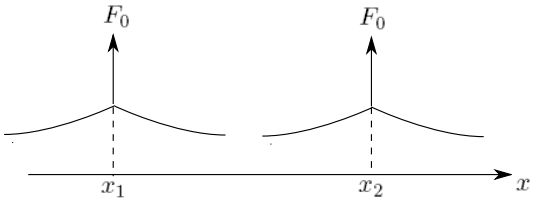

Рис. 1.17

1.30. $$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha\, u_t, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x).$$

1.32.

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $a^2 = \frac{GJ}{K}$, G — модуль сдвига, K — момент инерции единицы длины вала относительно его оси, J — полярный момент инерции поперечного сечения вала.

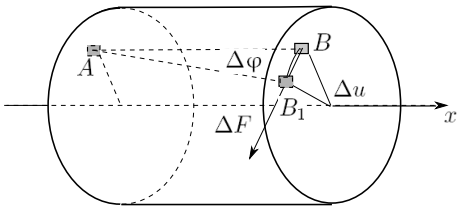

Рис. 1.18

Решение. При малых смещениях параллелепипеда под действием поперечной силы F, равномерно распределенной по сечению, деформация сдвига $\varphi = \frac{F}{GS}$, где G модуль сдвига, характеризующий физические свойства материала, S - площадь сечения. При повороте сечения с координатой

$x+\Delta x$ на угол Δu относительно сечения с координатой x (рис.1.18) происходит сдвиг параллелепипеда AB на угол $\Delta\varphi = \Delta F/(G\Delta S)$. Так как углы малы, то $r\Delta u = \Delta x\,\Delta\varphi$. Выражение для момента сил, действующих в сечении с координатой $x+\Delta x$,

$$M = \int_S r dF = \tfrac{\Delta u}{\Delta x} G \int_S r^2 ds = GJ\tfrac{\Delta u}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ преобразуется в $M(x,t) = GJu_x(x,t)$. Условие малости крутильных колебаний: $|r_0 u_x| \ll 1$. Из уравнения вращательного движения для элемента Δx вала $K\Delta x u_{tt} = M(x+\Delta x,t) - M(x,t)$ после деления на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получается уравнение крутильных колебаний. Для вывода уравнения вариационным методом следует заметить, что потенциальная энергия сдвига параллелепипеда AB_1

$$\tfrac{\Delta F \Delta\varphi \Delta x}{2} = G\tfrac{\Delta x}{2}\left(\tfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 r^2 \Delta S.$$

1.33. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$u(0,t) = u_0 \sin\omega t, \quad |u(x,t)| < \infty, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.34. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$1.\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0; \quad 2.\ u(0,t) = 0, \quad GJu_x(l,t) + ku(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x).$$

1.35. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$GJu_x(0,t) - ku(0,t) = 0, \quad GJu_x(l,t) = M, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.36. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad GJu_x(l,t) + ku(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{M}{k}\left(1 + \tfrac{kl}{GJ}\right) - \tfrac{Mx}{GJ}, \quad u_t(x,0) = 0.$$

1.37. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{M_0}{GJL}\begin{cases} (l-x_0)x, & 0 \le x \le x_0, \\ x_0(l-x), & x_0 \le x \le l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$ — решение задачи:

$$u_0'' = 0, \quad 0<x<x_0, \quad x_0<x<l,$$
$$u_0(0) = u_0(l) = 0,$$
$$u_0(x_0+0) - u_0(x_0-0) = 0, \quad u_0'(x_0+0) - u_0'(x_0-0) = -\tfrac{M_0}{GJ}.$$

1.38. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x, \quad 0<t,$$
$$GJu_x(0,t) - ku(0,t) = -ku_0 \sin\omega t, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.39. $$u_{tt} = g\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}], \quad 0<x<l, \quad 0<t,$$
$$u(0,t) = 0, \quad |u(l,t)| < \infty,$$
$$u(x,0) = -\tfrac{F_0}{\rho g}\begin{cases} \ln(1-\frac{x}{l}), & 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ \ln\frac{1}{2}, & \frac{l}{2} \le x \le l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$ — решение задачи:

$$\tfrac{d}{dx}\left(1-\tfrac{x}{l}\right)\tfrac{du_0}{dx}=0,\quad 0<x<\tfrac{l}{2},\ \ \tfrac{l}{2}<x<l,$$
$$u_0(0)=0,\ \ |u_0(l)|<\infty,$$
$$u_0(\tfrac{l}{2}+0)-u_0(\tfrac{l}{2}-0)=0,\ \ u_0'(\tfrac{l}{2}+0)-u_0'(\tfrac{l}{2}-0)=-\tfrac{2F_0}{\rho g l}.$$

1.40. $$u_{tt}=g\tfrac{\partial}{\partial x}(l-x)\tfrac{\partial u}{\partial x},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=\tfrac{p_0x(x-2l)}{2\rho S},\ \ u_t(x,0)=0.$$

Указание. Начальные отклонения точек струны определяется функцией $u(x,0)=u_0(x)$, которая является решением стационарной задачи:

$$\tfrac{d}{dx}(l-x)\tfrac{du_0}{dx}+\tfrac{p_0}{\rho g}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=0,\quad |u_0(l)|<\infty,\ \text{либо}\ \lim_{x\to l}(l-x)u_0'(x)=0.$$

1.41. $$u_{tt}=g\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}]+\omega^2u,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x).$$

1.42. $$\rho(x)u_{tt}=\tfrac{\partial}{\partial x}T(x)\tfrac{\partial u}{\partial x}u,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),\quad T(x)=g\textstyle\int_0^x\rho(\xi)d\xi.$$

1.43. $$(l-x)^2u_{tt}=a^2\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)^2\tfrac{\partial u}{\partial x}],\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=v_0t,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0.$$

1.44. $$(l-x)^2u_{tt}=a^2\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)^2\tfrac{\partial u}{\partial x}]-(l-x)^2g,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\begin{cases}0, & x=0,\\ -v_0, & 0<x\le l.\end{cases}$$

1.45. $$(l-x)u_{tt}=a^2\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}],\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$ES_0u_x(0,t)=-F(t),\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

1.46. $$(l-x)u_{tt}=a^2\tfrac{\partial}{\partial x}[(l-x)\tfrac{\partial u}{\partial x}]+(l-x)g,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u_x(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=\tfrac{q\rho l}{2E}x\left(1-\tfrac{x}{2l}\right),\ \ u_t(x,0)=0.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи:

$$\tfrac{d}{dx}(l-x)\tfrac{du_0}{dx}+(l-x)g=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=0,\ \ |u_0(l)|<\infty.$$

1.47. $$u_{tt}=\tfrac{\omega^2}{2}\tfrac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)\tfrac{\partial u}{\partial x}],\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ |u(l,t)|<\infty,\quad u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x).$$

1.48. $$u_{tt}=2gl\sqrt{1-\tfrac{x}{l}}\tfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-\tfrac{x}{l}}\tfrac{\partial u}{\partial x},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\quad \lim_{x\to l}\sqrt{1-\tfrac{x}{l}}u_x(x,t)=0,$$
$$u(x,0)=u_0(1-\sqrt{1-\tfrac{x}{l}}),\quad u_t(x,0)=u_1(x).$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи:

$$\tfrac{d}{dx}\sqrt{1-\tfrac{x}{l}}\tfrac{du_0}{dx}=0,\quad 0<x<l,\ u_0(0)=0,\ \ u_0(l)=u_0.$$

1.49. $\rho(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}T(x)\frac{\partial u}{\partial x}$, $0 < x < l_i$, $l_1 < x < l$ $0 < t$,

$$u(0,t) = 0, \quad |u(l,t)| < \infty,$$

$$u(l_1 + 0, t) = u(l_1 - 0, t), \quad u_x(l_1 + 0, t) = u_x(l_1 - 0, t),$$

$$u(x,0) = u_0 \begin{cases} \frac{\ln(1-\frac{m_1}{m}\frac{x}{l_1})}{\ln\frac{m_2}{m}}, & 0 \le x \le l_1, \\ 1, & l_1 \le x \le l, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0,$$

$$T(x) = g \begin{cases} m - \rho_1 x & 0 \le x \le l_1, \\ (l-x)\rho_2, & l_1 \le x \le l, \end{cases} \quad m = m_1 + m_2,\ m_1 = \rho_1 l_1,\ m_2 = \rho_2 l_2,\ l_2 = l - l_1.$$

1.50.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

$$u(0,t) = 0, \quad ESu_x(l,t) + mu_{tt}(l,t) = F(t), \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.51.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

$$ESu_x(0,t) - mu_{tt}(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \begin{cases} v, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le l. \end{cases}$$

1.52.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

$$ESu_x(0,t) - ku(0,t) = 0, \quad ESu_x(l,t) + mu_{tt}(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = u_0\tfrac{kx+ES}{kl+ES}, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Указание. Функция $u(x,0)$=$u_0(x)$ — решение задачи:

$$u_0''(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$ESu_0'(0) - ku(0) = 0, \quad u_0(l) = u_0.$$

1.53.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < l, \quad 0 < t,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = \mu(t),$$

$$u(x_0 + 0, t) - u(x_0 - 0, t) = 0, \quad u_x(x_0 + 0, t) - u(x_0 - 0, t) = \tfrac{m}{ES}u_{tt}(x_0, t),$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.54. $\rho(x)u_{tt} = Tu_{xx}$, $-l < x < l$, $0 < t$, $\rho(x) = \rho_0 + m\,\delta(x)$,

$$u(-l,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ \rho(x)u_t(x,0) = I\delta(x),$$

1.55. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - g$, $-l < x < 0$, $0 < x < l$, $0 < t$, $\mathbf{e}_u = -\mathbf{e}_g$,

$$u(-l,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(+0,t) = u(-0,t), \quad T_0 u_x(+0,t) - T_0 u_x(-0,t) - mg = mu_{tt}(0,t),$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.56. $u_{tt} = gl\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{M}{m_0} - \frac{x}{l})\frac{\partial u}{\partial x}]$, $0 < x < l$, $0 < t$, $m_0 = \rho_0 l$, $M = m_0 + m$,

$$u(0,t) = 0, \quad gu_x(l,t) + u_{tt}(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0\tfrac{ln(1-\frac{m_0 x}{Ml})}{ln\frac{m}{M}}, \quad u_t(x,0) = 0,$$

Указание. Функция $u(x,0) = u_0(x)$ — решение задачи:

$$\tfrac{d}{dx}[(\tfrac{M}{m_0} - \tfrac{x}{l})\tfrac{du_0}{dx}] = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u_0(0) = 0, \quad u_0(l) = u_0.$$

1.58. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \quad K_0 u_{tt}(l,t) + GJ u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{M}{GJ} x, \ \ u_t(x,0) = 0.$$

1.59. $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \ \ x_0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = -\tfrac{M(t)}{GI}, \quad u_x(l,t) + \tfrac{K}{GJ} u(l,t) = 0,$$
$$u(x_0 + 0, t) - u(x_0 - 0, t) = 0,$$
$$u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) = \tfrac{K_0}{GJ} u_{tt}(l,t),$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.60. Задачу можно поставить в двух (эквивалентных) формах.

Постановка 1.
$$\rho(x) u_{tt} = \tfrac{\partial}{\partial x} E(x) \tfrac{\partial u}{\partial x}, \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, \ 0 < x < x_0, \\ \rho_2, \ x_0 < x < l, \end{cases} \qquad E(x) = \begin{cases} E_1, \ 0 < x < x_0, \\ E_2, \ x_0 < x < l. \end{cases}$$

Постановка 2.
$$u_{tt} = \tfrac{E_1}{\rho_1}, u_{xx}, \qquad u_{tt} = \tfrac{E_2}{\rho_2} u_{xx},$$
$$0 < x < x_0, \ \ 0 < t, \quad x_0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0,$$
$$u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t), \ \ E_2 u_x(x_0 + 0, t) = E_1 u_x(x_0 - 0, t),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x).$$

Замечание. Решение задачи методом разделения переменных (глава 3) основано на построении системы собственных функций, которые формируют ряд, представляющий функцию $u(x,t)$; для отыскания собственных функций используется постановка в форме 2. Постановка в форме 1 выявляет неочевидное свойство собственных функций: они ортогональны на промежутке $(0;l)$ с весом $\rho(x)$.

1.61. $$u_{tt} = a_1^2 u_{xx}, \qquad u_{tt} = a_2^2 u_{xx}, \qquad a_i^2 = \tfrac{T}{\rho_i}, \ i = 1,2,$$
$$0 < x < x_0, \ 0 < t, \quad x_0 < x < l, \ 0 < t,$$
$$T u_x(0,t) = -F(t), \qquad u(l,t) = 0,$$
$$u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t), \quad u_x(x_0 + 0, t) = u_x(x_0 - 0, t),$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

1.62. $$u_{tt} = a_1^2 u_{xx}, \qquad u_{tt} = a_2^2 u_{xx}, \qquad a_i^2 = \tfrac{G_i J_i}{K_i}, i = 1,2,$$
$$0 < x < x_0, \ 0 < t, \quad x_0 < x < l, \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t), \quad G_2 J_2 u_x(x_0 + 0, t) = G_1 J_1 u_x(x_0 - 0, t).$$
$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = 0,$$

где начальный профиль струны определяется выражением:

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0\frac{G_2J_2x}{G_1J_1(l-x_0)+G_2J_2x_0}, & 0\le x\le x_0,\\ u_0\frac{G_2J_2x_0+G_1J_1(x-x_0)}{G_1J_1(l-x_0)+G_2J_2x_0}, & x_0\le x\le l,\end{cases}$$

Указание. Начальная функция $u_0(x)$ — решение задачи:

1.63.
$$u_0'=0,\quad 0<x<x_0,\ \ x_0<l,$$
$$u_0(0)=0,\quad u_0(l)=u_0,$$
$$u_0(x_0+0)=u_0(x_0-0),\quad G_2u_0'(x_0+0)=G_1u_0'(x_0-0).$$
$$u_{1tt}=a_1^2u_{1xx},\qquad u_{2tt}=a_2^2u_{2xx},$$
$$-l<x<0,\ \ 0<t<\tau,\qquad 0<x,\ \ 0<t<\tau,$$
$$u_{1x}(-l,t)=0,\qquad |u_2(x,t)|<\infty,$$
$$u_1(x,0)=0,\ \ u_{1t}(x,0)=v,\quad u_2(x,0)=u_{2t}(x,0)=0,$$
$$u_1(0,t)=u_2(0,t),\quad E_1S_1u_{1x}(0,t)=E_2S_2u_{2x}(0,t),$$
$$u_{1x}(0,t)<0,\ \ 0<t<\tau,\quad u_{1x}(0,\tau)=0.$$

1.64.
$$u_{1tt}=a_1^2u_{1xx},\qquad u_{2tt}=a_2^2u_{2xx},$$
$$-l_1<x<0,\ \ 0<t<\tau,\qquad 0<x<l_2,\ \ 0<t<\tau,$$
$$u_{1x}(-l_1,t)=0,\qquad u_{2x}(l_2,t)=0,$$
$$u_1(x,0)=0,\ \ u_{1t}(x,0)=v_1,\quad u_2(x,0)=0,\ \ u_{2t}(x,0)=v_2,$$
$$u_1(0,t)=u_2(0,t),\quad E_1S_1u_{1x}(0,t)=E_2S_2u_{2x}(0,t),$$
$$u_{1x}(0,t)<0,\ \ 0<t<\tau,\quad u_{1x}(0,\tau)=0.$$

1.65. 1.$u(P,t)=\mu(P,t)$; 2.$T(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=F(P,t)$; 3.$-T(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=k(P)u(P,t)$; 4. $-T(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=\alpha(P)u(P,t)$; $P\in\partial\Omega$. На рис.1.19 изображен элемент S' поверхности мембраны в момент времени $t>0$, $L'=\partial S'$ — кусочно-гладкий контур, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$ — векторы в касательной плоскости к S' в точке P', $\mathbf{l}'$ — касательный вектор к контуру L', вектор $\mathbf{n}'$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{l}'$, $\mathbf{N}$ —нормальный вектор к поверхности S' в точке P', γ - угол между вектором $\mathbf{N}$ и осью $0z$; геометрический объект без штриха — проекция на плоскость $x0y$ геометрического объекта со штрихом. Любой вектор в плоскости, касательной к S', составляет с плоскостью $x0y$ угол, косинус которого мало отличается от единицы, поэтому скалярное произведение

$$\mathbf{l}'\mathbf{n}'=l_x'n_x'+l_y'n_y'+l_z'n_z'=l_xn_x+l_yn_y=\mathbf{ln},$$

т.е. векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$ взаимно перпендикулярны. Согласно геометрическому смыслу производной $tg\,\gamma=\lim\limits_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta n}=\frac{\partial u}{\partial n}$, следовательно, проекция силы натяжения на ось $0u$ равна $T\frac{\partial u}{\partial n}$. Теперь имеются все данные,чтобы написать уравнение движения элемента S :

$$\int\limits_S \rho u_{tt}dS=\int\limits_L T\frac{\partial u}{\partial n}dl+\int\limits_S Fds,$$

или, огласно формуле Остроградского, $\int\limits_S(\rho u_{tt}-div(T\nabla u)-F)dS=0$.

Полученное равенство является тождеством по S, из которого следует (при условии непрерывности подынтегральной функции) уравнеие колебаний мембраны $\rho u_{tt} = div(T\nabla u) + F$.

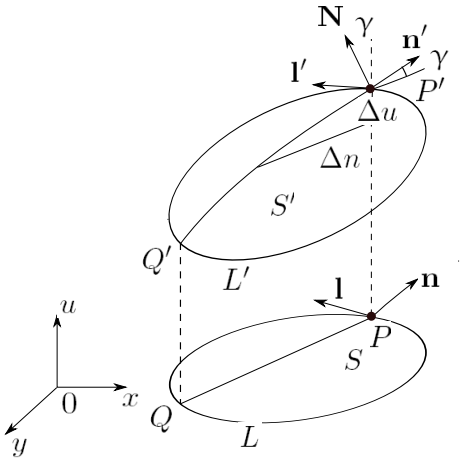

Рис. 1.19

1.67. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad (x,y) \in \Omega, \ \ 0 < t,$
$T\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = F, \quad u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0.$

1.68. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad (x,y) \in \Omega, \ \ 0 < t,$
$(T\frac{\partial u}{\partial n} + ku)|_{\partial\Omega} = 0, u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad u_t(x,y,0) = u_1(x,y).$

1.69. $u_{tt} = a^2\Delta u + \frac{f_0}{\rho}\sin\omega t, \quad 0 < x < l_1, \ \ 0 < y < l_2, \ \ 0 < t,$
$u(0,y,t) = u(l_1,y,t) = 0, \quad u_y(x,0,t) = u_y(x,l_2,t) = 0,$
$u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0.$

1.70. $u_{tt} = a^2\Delta u + \frac{F(x,t)}{\rho}\delta(x), \quad |x| < l_1, \ \ |y| < l_2, \ \ 0 < t,$
$u(\pm l_1, y, t) = u(x, \pm l_2, t) = 0, \ u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0.$

1.71. $u_{tt} = a^2\Delta u + \frac{F(t)}{\rho l_1}\delta(y - \frac{l_2}{l_1}x), \quad 0 < x < l_1, \ \ 0 < y < l_2, \ \ 0 < t,$
$u(0,y,t) = u(l_1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,l_2,t) = 0,$
$u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0.$

1.72. $u_{tt} = a^2\Delta u + \frac{F_0}{2\rho r_0 r}\cdot[\delta(\varphi) + \delta(\varphi - \pi)], \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$
$|u| < \infty, \ \ u(r_0,\varphi,0) = 0, \qquad u(r,\varphi,0) = u_t(r,\varphi,0) = 0.$

1.73. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u(r_0,t) = 0, \qquad u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = \frac{I}{\pi\rho r_1^2}\eta(r_1 - r).$

1.74. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u(r_0, \varphi, t) = 0, \qquad u(r, \varphi, 0) = 0,$
$u_t(r, \varphi, 0) = \frac{I}{\rho}\frac{\delta(r-r_1)}{r} \cdot \delta(\varphi - \varphi_1).$

1.75. 1. $\rho u_{tt} = div(T\nabla u) - ku; \quad$ 2. $\rho u_{tt} = div(T\nabla u) - \alpha u_t.$

1.76. $\Delta u + \frac{p(y)}{T_0}\delta(x) = 0, \quad -l_1 < x < l_1, \ \ -l_2 < y < l_2,$
$u(x, -l_2) = u(x, l_2) = 0,$
$u_x(-l_1, y) - \frac{k}{T_0}u(-l_1, y) = 0, \ \ u_x(l_1, y) + \frac{k}{T_0}u(l_1, y) = 0.$

1.77. $\Delta u + g = 0, \quad 0 < x < x_0, \ \ x_0 < x < l_1, \ \ 0 < y < l_2,$
$u(0, y) = u(l_1, y) = u(x, 0) = u(x, l_2) = 0,$
$u(x_0 + 0, y) = u(x_0 - 0, y), \ \ u_x(x_0 + 0, y) = u_x(x_0 - 0, y).$

1.78. $\Delta u = -\frac{F_0}{T_0}\frac{\delta(r-r_1)}{r_1} \cdot \sin\varphi, \ \ 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u| < \infty, \quad u(r_0, \varphi) = 0, \quad u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi).$

1.79. $\Delta u = -\frac{F_0}{T_0 r r_0} \cdot \delta(\varphi - \frac{\pi}{2}), \ \ 0 < r < r_0, \ \ 0 < \varphi < \pi,$
$|u| < \infty, \quad u(r_0, \varphi) = 0, \quad u(r, 0) = u(r, \pi) = 0.$

1.80. $\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 < \varphi < \pi,$
$u(r, \varphi) = 0, \ \ |u(r, \varphi)| < \infty, \ \frac{\partial u}{\partial \varphi}\big|_{\varphi=0} = -\frac{F_0 r}{2r_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\big|_{\varphi=\pi} = \frac{F_0 r}{2r_0}.$

1.81. $\Delta u = -\frac{p}{T}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < y < l - x,$
$u(0, y) = u(x, 0) = u(x, l - x) = 0.$

1.82. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < y < l - x,$
$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \ \ u_x(x, l - x) + u_y(x, l - x) = p\sqrt{2}.$

1.83. В полярных координатах
$\Delta u = -\frac{\rho}{T}g, \ r < r_0, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad |u(r, \varphi)| < \infty, \ u(r_0, \varphi) = f(\varphi).$

1.84. $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0,$
$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$

1.85. $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
1. $u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0;$
2. $u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0,$
$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$

1.86. $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = g, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0,$
$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

1.87. $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = \frac{F_0(t)}{\rho S}\delta(x - x_0), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

1.88. $(l_0-x)^2u_{tt}+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(l_0-x)^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),$$
$$a^2=\frac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\frac{4l_1l_2^3}{3}.$$

1.89. $\rho S u_{tt}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}EJ\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$$u(0,t)=u_x(0,t)=0,\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0,$$
$$1.\ u_{xx}(l,t)=0,\ \ u_{xxx}(l,t)=-\frac{F(t)}{EJ(l)};$$
$$2.\ u(l,t)=0,\ \ u_{xx}(l,t)=\frac{M(t)}{EJ(l)}.$$

Указание. Действие — это сумма функционала (1.20) и одного из слагаемых
$$\int_{t_1}^{t_2}F(t)u(l,t)\,dt\qquad\text{или}\qquad\int_{t_1}^{t_2}M(t)u_x(l,t)\,dt.$$
После преобразований (см. пример 1.1) получаются соотношения
$$1.\ \int_{t_1}^{t_2}\left[-EJ(l)u_{xx}(l,t)\xi_x(l,t)+\left(\frac{\partial(EJu_{xx})}{\partial x}\Big|_{x=l}+F(t)\right)\xi(l,t)\right]dt=0$$
либо
$$2.\ \int_{t_1}^{t_2}\left[-EJ(l)u_{xx}(l,t)+M(t)\right]\xi_x(l,t)\,dt=0,$$
из которых следуют граничные условия.

1.90. $u_{tt}+a^2u_{xxxx}=-\frac{M_0(t)}{\rho S}\delta'(x-x_0),\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0,\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

1.91. $u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$$u_{xx}(0,t)=u_{xxx}(0,t)=u(l,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=\frac{F_0}{6EJ}(2l+x)(l-x)^2,\ \ u_t(x,0)=0,$$
$$a^2=\frac{EJ}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J=\frac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ является решением следующей стационарной задачи:
$$u_0^{IV}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0''(0)=0,\quad u_0'''(0)=\frac{F_0}{JE},\quad u_0(l)=u_0'(l)=0.$$

1.92. $u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$$u_{xx}(0,t)=u_{xxx}(0,t)=u(l,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=-\frac{M_0(l-x)^2}{2EJ},\ \ u_t(x,0)=0,$$
$$a^2=\frac{EJ}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J=\frac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи:
$$u_0^{IV}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0''(0)=-\frac{M_0}{EJ},\quad u_0'''(0)=0,\quad u_0(l)=u_0'(l)=0.$$

1.93. $$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=\tfrac{M_0}{6lEJ}x(l-x)(2l-x),\ \ u_t(x,0)=0,$$
$$a^2=\tfrac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\tfrac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$, описывающая начальные отклонения, является решением стационарной задачи:
$$u_0^{IV}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=0,\ \ u_0''(0)=-\tfrac{M_0}{JE},\quad u_0(l)=u_0''(l)=0.$$

1.94. $$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u_x(0,t)=u(l,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x_0+0,t)-u(x_0-0,t)=0,$$
$$u_x(x_0+0,t)-u_x(x_0-0,t)=0,$$
$$u_{xx}(x_0+0,t)-u_{xx}(x_0-0,t)=0,$$
$$u_{xxx}(x_0+0,t)-u_{xxx}(x_0-0,t)=-\tfrac{m}{EJ}u_{tt}(x_0,t),$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),$$
$$a^2=\tfrac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\tfrac{4l_1l_2^3}{3}.$$

1.95. $$(l_0-x)^2u_{tt}+\tfrac{a^2}{l_0^2}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(l_0-x)^4\tfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=-\tfrac{l_0F_0x^2[(l_0+2l)x-3l_0l]}{6EJ_0(l_0-x)^2},\ \ u_t(x,0)=0,$$
$$a^2=\tfrac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\tfrac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$, описывающая начальные отклонения, является решение стационарной задачи:
$$\tfrac{d^2}{dx^2}(l_0-x)^4\tfrac{d^2u_0}{dx^2}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=u_0'(0)=0,\quad u_0''(l)=0,\ \ u_0'''(l)=-\tfrac{F_0}{6EJ_0}.$$

1.96. $$(l_0-x)u_{tt}+\tfrac{a^2}{l_0^2}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(l_0-x)^3\tfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=\tfrac{l_0^3M_0}{lEJ_0}\left[\ln\left(1-\tfrac{x}{l_0}\right)-\tfrac{x}{l}\ln\left(1-\tfrac{l}{l_0}\right)-\tfrac{x(l-x)}{2(l_0-l)(l_0-x)}\right],$$
$$u_t(x,0)=0,\qquad a^2=\tfrac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\tfrac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи:
$$\tfrac{d^2}{dx^2}(l_0-x)^3\tfrac{d^2u_0}{dx^2}=0,\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=u_0''(0)=0,\quad u_0(l)=0,\ \ u_0''(l)=\tfrac{M_0}{J(l)E}.$$

1.97. $(l_0-x)u_{tt}+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(l_0-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{p_0 l_0(l_0-x)}{\rho},\quad 0<x<l,\quad 0<t,$

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0,$$

$$u(x,0)=A\left[\frac{(l_0-x)^4-l_0^4}{72}-\frac{(l_0-l)^2x^2}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{l_0^3+6(l_0-l)^3}{18}x+\frac{(l_0-l)^3(l_0-x)}{3}\ln\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\right],$$

$$u_t(x,0)=0,\quad A=\frac{p_0 l_0 S_0}{EJ_0},\ \ a^2=\frac{EJ_0}{\rho S_0},\ \ S_0=4l_1l_2,\ \ J_0=\frac{4l_1l_2^3}{3}.$$

Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи:

$$\frac{d^2}{dx^2}(l_0-x)\frac{d^2u_0}{dx^2}=\frac{p_0S_0}{EJ_0}(l_0-x),\quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=u_0'(0)=0,\quad u_0''(l)=u_0'''(l)=0.$$

1.98. Решение. Момент $M(x)$ равен моменту сил (1.19):

$$-\int_S Eu_{xx}\zeta^2\,ds=-JEu_{xx}.$$

1.99.
$$u_{tt}+a^2\Delta^2u=0,\ \ (x,y)\in\Omega,\ 0<t,$$
$$u|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,$$
$$u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=\frac{I}{\rho h}\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0).$$

1.100.
$$\Delta^2u=\frac{F(x,y)}{D},\quad |x|<l_1,\ |y|<l_2,$$
$$u(\pm l_1,y)=u_x(\pm l_1,y)=u(x,\pm l_2)=u_y(x,\pm l_2)=0.$$

1.101.
$$u_{tt}+a^2\Delta^2u=\frac{F(t)}{2\pi\rho h}\cdot\frac{\delta(r)}{r},\quad 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<t,$$
$$|u|<\infty,\ \ u|_{r=r_0}=0,\ \ \left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{\sigma}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_0}=0,\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$$

1.102.
$$\Delta^2u=\frac{F(x,y)}{D},\quad |x|<l_1,\ |y|<l_2,$$
$$u(\pm l_1,y)=u_{xx}(\pm l_1,y)=u(x,\pm l_2)=u_{yy}(x,\pm l_2)=0.$$

1.107. Указание. В уравнении движения n-го маятника

$$md^2\theta_n''=k(\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1})-mgd\sin\theta_n$$

ввести непрерывную по n функцию $\theta(x,t)$, полагая $\theta_n(t)=\theta(nl,t)$, и устремить l к нулю при постоянном значении $kl^2=K$.

1.108.
$$i\hbar\Psi_t=-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\Psi,\ \ -\infty<x<\infty,\ 0<t,$$
$$\Psi(x,0)=\Psi_0(x),\ \ \|\Psi\|=1.$$

1.109.
$$i\hbar\Psi_t=-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx},\qquad i\hbar\Psi_t=-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx}+U_0,$$
$$0<x<l,\ \ 0<t,\qquad l<x,\ \ 0<t,$$
$$\Psi(0,t)=0,\ \ \Psi(l-0,t)=\Psi(l+0,t),\ \ \Psi_x(l-0,t)=\Psi_x(l+0,t),$$
$$\Psi(x,0)=\Psi_0(x),\ \ \|\Psi\|=1.$$

1.110.
$$\Psi_t=\frac{i\hbar}{2I}\Psi_{\varphi\varphi},\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<t,$$
$$\Psi(\varphi+2\pi)=\Psi(\varphi),\ \ \Psi(\varphi,0)=\Psi_0(\varphi),\ \ \|\Psi\|=1.$$

1.111. $$\Psi_t = \tfrac{i\hbar}{2I}\Delta_\omega \Psi,\ \ 0<\theta<\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,,\ \ 0<t,$$
$$\Psi\in C(S_1),\quad \Psi(\theta,\varphi,0)=\Psi_0(\theta,\varphi),\ \ \|\Psi\|^2=\int\limits_{S_1}|\Psi(\theta,\varphi,t)|^2 ds=1,$$

Δ_ω — угловая часть оператора Лапласа. Указание. Оператор Гамильтона $\mathcal{H}=\frac{\mathcal{L}^2}{2I}$, где $\mathcal{L}^2=-\hbar^2\Delta_\omega$ — оператор квадрата момента.

1.112. $$\Psi_t=\tfrac{i\hbar}{2m}\left(\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial\Psi}{\partial r}+\tfrac{1}{r^2}\Delta_\omega\Psi\right),$$
$$0<r<r_0,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,,\ \ 0<t,$$
$$|\Psi|<\infty,\quad \Psi(r,\theta,\varphi+2\pi,t)=\Psi(r,\theta,\varphi,t),\quad \Psi(r_0,\theta,\varphi,t)=0,$$
$$\Psi(r,\theta,\varphi,0)=\Psi_0(r,\theta,\varphi),\quad \|\Psi\|^2=\int\limits_B|\Psi|^2 d\mathbf{r}=1,\ \ B-\text{шар радиуса } r_0.$$

1.113. $$\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial\psi}{\partial r}+\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\tfrac{2mE}{\hbar^2}=0,\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$\psi(r_1,\varphi)=\psi(r_2,\varphi)=0,\ \ \psi(r,\varphi+2\pi)=\psi(r,\varphi),\ \ \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\psi^2 r\,dr=1.$$

1.114. $$\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial\psi}{\partial r}+\tfrac{1}{r^2}\Delta_\omega\psi+U_0e^{-\frac{r}{a}}\psi+\tfrac{2mE}{\hbar^2}\psi=0,$$
$$0<r<\infty,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$|\psi|<\infty,\ \ \psi(r,\theta,\varphi+2\pi)=\psi(r,\theta,\varphi),\ \ \int\limits_{\mathbf{R}^3}\psi^2\mathbf{dr}=1,$$

Δ_ω —угловая часть оператора Лапласа.

1.115. $C\rho S u_t=\frac{\partial}{\partial x}kS\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha(u-\mu)+FS.$
Указание. Уравнение теплового баланса для элемента Δx стержня:
$$C(x)\rho(x)S(x)\Delta x(u|_{t+\Delta t}-u|_t)=(q(x,t)S(x)-q(x+\Delta x,t)S(x+\Delta x))\Delta t-$$
$$-\alpha(x)(u-\mu(x,t))\Delta x\,\Delta t+F(x,t)S(x)\Delta x\,\Delta t.$$

1.116. $$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\quad u(x,0)=u_0(x).$$

Указание. Задача является частным случаем задачи, рассмотренной в примере 1.9: Ω — слой $(0<x<l)$, температура зависит от переменных x и t. Другой подход состоит в написании уравнений теплового баланса для внутреннего элемента стержня и для элементов, примыкающих к концам (см. указание к решению предыдущей задачи).

1.117. $$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=h\,\mu(t),\quad u(x,0)=0,\quad h=\alpha/k.$$

1.118. $$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$-ku_x(0,t)=q(t),\quad u(l,t)=\mu(t),\quad u(x,0)=0.$$

1.119. $$u_t=a^2u_{xx}+\tfrac{Q(t)}{\rho CS}\cdot\delta(x-x_0),\ \ 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=0.$$

1.120.
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = \mu_1, \quad u(l,t) = \mu_2,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \mu_1 + \left(\mu_2 - \mu_1 + \frac{Q_0(l-x_0)}{kS}\right)\frac{x}{l}, & 0 \le x \le x_0, \\ \mu_2 + \left(\mu_1 - \mu_2 + \frac{Q_0 x_0}{kS}\right)\frac{l-x}{l}, & x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Указание. Задача для определения начальной температуры $u(x,0) = u_0(x)$:
$$u_0'' = 0, \quad 0 < x < x_0, \ \ x_0 < x < l,$$
$$u_0(0) = \mu_1, \ \ u_0(l) = \mu_2,$$
$$u_0(x_0+0) - u_0(x_0-0) = 0, \ \ u_0'(x_0+0) - u_0'(x_0-0) = -\tfrac{Q_0}{k}.$$

1.121.
$$C(x)u_t = kSu_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$C(x)u_x(x,0) = u_0 C_0 \delta(x), \ \ C(x) = \rho\, CS + C_0\delta(x).$$

1.122.
$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) - hu(0,t) = -h\mu_0, \quad u_x(l,t) = 0, \ u(x,0) = \mu_0 + \tfrac{q}{kh}(1+hx).$$

1.123.
$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \ \ x_0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x_0-0) = u(x_0+0), \quad -kSu_x(x_0-0) + kSu_x(x_0+0) = C_0 u_t(x_0,t),$$
$$u(x,0) = \mu_0 + \tfrac{q}{k}x.$$

1.124.
$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad v_0 t < x, \ \ 0 < t,$$
$$u(v_0 t, t) = \mu(t), \quad u(x,0) = 0, \quad |u(x,t)| < \infty$$

1.125.
$$C\rho S u_t = \tfrac{\partial}{\partial x}(kS\tfrac{\partial u}{\partial x}) - \alpha u, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

1.126.
$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u-\mu), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = h\mu(l,t), \quad u(x,0) = 0.$$

1.127.
$$u_t = a_1^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \ \ 0 < t, \quad u_t = a_2^2 u_{xx}, \quad x_0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = \mu(t),$$
$$u(x_0-0,t) = u(x_0+0,t), \quad k_1 u_x(x_0-0,t) = k_2 u_x(x_0+0,t), \qquad u(x,0) = u_0.$$

1.128.
$$u_t = a^2 u_{xx} + \tfrac{Q(t)}{C\rho S}\delta(x - v_0 t), \quad -\infty < x < \infty, \ \ 0 < t,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0.$$

1.129.
$$(l_0 - x)^2 u_t = a^2 \tfrac{\partial}{\partial x}\left[(l_0-x)^2 \tfrac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$-ku_x(0,t) = q_1(t), \quad -ku_x(l,t) = q_2(t), \quad u(x,0) = u_0(x).$$

1.130.
$$(l_0 - x)^2 u_t = a^2 \tfrac{\partial}{\partial x}\left[(l_0-x)^2 \tfrac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = \mu_0, \quad u_x(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = \mu_0 + \tfrac{q_0(l_0-l)^2 x}{k l_0 (l_0 - x)}.$$

1.131. $(l_0-x)u_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l_0-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$
$u_x(0,t)-hu(0,t) = -h\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \qquad u(x,0)=u_0(x).$

1.132. $(l_0-x)u_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l_0-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$
$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=\frac{Q_0}{4k}\left[x(2l_0-x)-l(2l_0-l)\frac{ln(1-\frac{x}{l_0})}{ln(1-\frac{l}{l_0})}\right].$

Задача для определения начальной температуры $u(x,0)=u_0(x)$:

$$\frac{d}{dx}(l_0-x)\frac{du_0}{dx} = -\frac{Q_0}{k}(l_0-x), \quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=u_0(l)=0.$$

1.133. $(l_0-x)^2u_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l_0-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$
$u(0,t)=0, \;\; |u(l,t)|<\infty, \;\; u(x,0)=\mu_0\left(1-\frac{I_1(\beta\sqrt{1-\frac{x}{l}})}{I_1(\beta)\sqrt{1-\frac{x}{l}}}\right),$

$\beta = 2\sqrt{\frac{2\alpha_0 l\sqrt{r_0^2+l^2}}{kr_0}}$. Указание. Функция $u_0(x,0)=u_0(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\left(1-\tfrac{x}{l}\right)u'' - 2u' - \tfrac{\beta^2}{4l^2}(u-\mu) = 0, \quad 0<x<l,$$
$$u_0(0)=\mu, \quad |u(l)|<\infty.$$

Уравнение преобразуется в модифицированное уравнение Бесселя последовательными заменами: $v=u-\mu$, $\xi=\sqrt{1-\frac{x}{l}}$, $w=\frac{v}{\xi}$ (см. (2.98)).

1.134. $(l_0+x)u_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}(l_0+x)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\sqrt{x+l+l_0/2}\,(u_1-u),$
$0<x<l, \;\; 0<t,$
$u_x(0,t)-hu(0,t) = -hu_1, u_x(l,t)+hu(l,t)=hu_2,$
$u(x,0)=u_0(x), \;\; a^2=\frac{k}{C\rho}, \;\; \beta=\frac{2\alpha}{\rho C\sqrt{p}}, \;\; h=\frac{\alpha}{k}.$

1.135. $u_t = a^2\Delta u, \quad 0<r<r_0, \;\; 0\le\varphi<2\pi, \;\; 0<t,$
$|u|<\infty, \;\; u_r(r_0,\varphi,t)+hu(r_0,\varphi,t)=h\mu(\varphi,t), \qquad u(r,\varphi,0)=0.$

1.136. $u_t = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}, \quad r_1<r<r_2, \;\; 0\le\varphi<2\pi, \;\; 0<t,$
$u(r_1,t)=\mu_0, \quad ku_r(r_1,t)=q(t), \qquad u(r,0)=u_0.$

1.137. $u_t = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}, \quad r_1<r<r_2, \;\; 0\le\varphi<2\pi, \;\; 0<t,$
$u_r(r_1,t)=0, \quad u_r(r_2,t)+h\,u(r_2,t)=0,$
$u(r,0)=\frac{Q}{2k}\left[\frac{r_2^2-r^2}{2}+r_1^2 ln\frac{r}{r_2}+\frac{k}{hr_2}(r_2^2-r_1^2)\right].$

Указание. Функция $u(r,0)=u_0(r)$ — решение задачи:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{du_0}{dr}+\frac{Q}{k}=0, \quad r_1<r<r_2,$$
$$u_0'(r_1)=0, \;\; u_0'(r_2)+hu_0(r_2)=0.$$

1.138. $u_t = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}, \quad r_1<r<r_2, \;\; 0\le\varphi<2\pi, \;\; 0<t,$
$2\pi r_1 k\,u_r(r_1,t) = C_0u_t(r_1,t), \quad u(r_2,t)=0, \quad u(r,0)=u_0.$

1.139. $u_t = a^2\Delta u, \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0,$
$-4\pi k r_1^2 u_r(r_1) = -4\pi k r_2^2 u_r(r_2) = Q(t), \quad u(r,0) = 0.$

1.140. $u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{C\rho}\frac{\delta(r-r_1)}{r^2}\cdot\frac{\delta(\theta-\theta_1)}{\sin\theta}\cdot\delta(\varphi-\varphi_1),$
$0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u_r(r_0,\theta,\varphi,t) + hu(r_0,\theta,\varphi,t) = 0, \qquad u(r,\theta,\varphi,0) = 0.$

1.141. $u_t = a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r}, \quad r_0 < r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 < t,$
$\frac{3k}{r_0}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} + Q(t) = \rho_0 C_0\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=r_0}, \; u(r,0) = \begin{cases} u_0, & r < r_0, \\ u_1(r), & r > r_0. \end{cases}$

1.142. $u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{4\pi r_0 l C\rho}\eta(r_0 - r)\cdot\eta(l-|z|)\cdot\delta(t),$
$0 < r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty \quad \lim\limits_{r\to\infty} u(\mathbf{r},t) = 0, \qquad u(r,\varphi,z,0) = 0.$

1.143. $u_t = a^2\Delta u - (\mathbf{v}\,\nabla u) + \frac{Q}{2lC\rho}\frac{\delta(r)}{2\pi r}\cdot\delta(l-|z|)\cdot\delta(t),$
$0 < r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad \lim\limits_{r\to\infty} u(\mathbf{r},t) = 0, \qquad u(r,\varphi,z,0) = 0, \quad (\mathbf{v}\,\mathbf{e}_z) = 0.$

1.144. $\Delta u(x,y,z,) = 0, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < z < l_3,$
$u_x(0,y,z) = -\frac{q}{kl_2l_3}, \quad u_z(x,y,0) = \frac{q}{kl_1l_2},$
$u_x(l_1,y,z) = u_y(x,0,z) = u_y(x,l_2,z) = u_z(x,y,l_3) = 0.$

1.145. $\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad -\pi \le \varphi < \pi,$
$\left(k\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u\right)\big|_{r=r_0} = q_0\cos\varphi\cdot\eta(\tfrac{\pi}{2} - |\varphi|), \quad |u| < \infty, \quad \mathbf{q} = -q\,\mathbf{e}_x.$

1.146. $\Delta u + \frac{Q}{k}\frac{\delta(r-d)}{2\pi r^2}\cdot\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta} = 0, \quad r_0 < r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u_r(r_0,\theta,\varphi) = 0, \quad \lim\limits_{r\to\infty}(r,\theta,\varphi) = 0.$

1.147. Гиперболическое уравнение теплопроводности $u_t + t_r u_{tt} = \frac{r}{C\rho}\Delta u$ в первом случае становится классическим уравнением теплопроводности $u_t = a^2\Delta u$, $a^2 = \frac{k}{C\rho}$, во втором случае — волновым уравнением $u_{tt} = V^2\Delta u$, где $V = \sqrt{\frac{k}{C\rho t_r}}$ — скорость распространения температуры.

1.148. $u_t = Du_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$
$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = h\mu_1, \qquad u(x,0) = u_0(x).$

1.149. $u_t = D\,u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$
$u_x(0,t) - h\,u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0.$

1.150. $u_t = Du_{xx} - vu_x, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u(x,0) = u_0(x),$

1.151. $u_t = D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u\,, \quad 0 < r < r_0 \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,, \;\; 0 < t\,,$
$|u| < \infty\,, \quad u(r_0,t) = 0\,, \qquad u(r,0) = u_0\,, \quad \alpha > 0.$

1.152. $u_t = D\Delta u, \quad r_1 < r < r_2, \;\; t > 0,$
$u(r,0) = \frac{Q}{4\pi D r}.$

Указание. Начальная концентрация $u_0(r)$=$u(r,0)$ — решение задачи:
$\Delta u_0(r) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \; -4\pi D r_1^2 u_0'(r_1) = -4\pi D r_2^2 u_0'(r_2) = Q.$

1.153. $u_t = D\Delta u + Q(t)\cdot\frac{\delta(r-r_0)}{r^2}\cdot\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\cdot\delta(\varphi-\varphi_0),$
$r_1 < r < r_2, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \;\; 0 < t,$
$u(r_1,\theta,\varphi,t) = 0, \quad u_r(r_2,\theta,\varphi,t) + hu(r_2,\theta,\varphi,t) = h\mu_0,$
$u(r,\theta,\varphi,0) = 0.$

1.154. $u_t = D\Delta u - \alpha u, \quad r_0 < r, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,, \;\; 0 < t\,,$
$\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = -\frac{q(\theta,\varphi,t)}{D}, \;\; |u| < \infty, \;\; u|_{t=0} = 0.$

1.155. $u_t = D\Delta u - \alpha u, \quad r_0 < r, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,, \;\; 0 < t\,,$
$\big(\frac{\partial u}{\partial r} - hu\big)\big|_{r=r_0} = -hu_0(t), \;\; |u| < \infty, \;\; u|_{t=0} = 0.$

1.156. $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \beta u + Q_0\frac{\delta(r)}{2\pi r} = 0\,, \quad |u(\infty)| < \infty\,.$

1.157.
$$u_t = D_1 u_{xx}\,, \qquad -l_1 < x < 0\,, \;\; 0 < t\,, \qquad u_x(-l_1,t) = 0\,,$$
$$u_t = D_2 u_{xx}\,, \qquad 0 < x < l_2\,, \;\; 0 < t\,, \qquad u_x(l_2,t) = 0\,,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_1\,, & -l_1 < x < 0\,, \\ u_2\,, & 0 < x < l_2\,, \end{cases}$$
1. $\frac{u(-0,t)}{c_1} = \frac{u(+0,t)}{c_2}\,, \quad D_1 u_x(-0,t) = D_2 u_x(+0,t)\,;$
2. $\alpha[\frac{u(-0,t)}{c_1} - \frac{u(+0,t)}{c_2}] = D_1 u_x(-0,t) = D_2 u_x(+0,t)\,, \quad \alpha > 0\,.$

1.159. $u_t + Q'(u)u_x + \beta u = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \;\; 0 < t\,,$
$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad |u| < \infty\,.$

Указание. См.вывод уравнения (1.32).

1.160. $\frac{1}{v}\Phi_t = D\Delta\Phi - \Sigma_c\Phi + F, \;\; -\infty < x,y,z < \infty, \; 0 < t,$
$\Phi(\mathbf{r},0) = vu_0(\mathbf{r}).$

1.161. $\frac{1}{v}\Phi_t = D\Phi_{xx} - \Sigma_c\Phi, \;\; -l < x < l, \; 0 < t,$
$\frac{1}{2}\Phi(-l,t) - D\Phi_x(-l,t) = 0, \quad \frac{1}{2}\Phi(l,t) + D\Phi_x(l,t) = 0,$
$\Phi(x,0) = vu_0(x).$

1.162. $\frac{1}{v}\Phi_t = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \Sigma_c\Phi + Q_0\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \;\; r < \tilde{r}_0, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 < t,$
$\Phi(\tilde{r}_0,t) = 0, \;\; \Phi(r,0) = 0.$

1.163. $\frac{1}{v}\Phi_t = D\Delta\Phi - \Sigma_c\Phi + Q\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z-z_0),$
$-\infty < x,y < \infty, \; 0 < z, \; 0 < t,$
$\frac{1}{2}\Phi(x,y,0,t) - D\Phi_z(x,y,0,t) = 0, \quad \Phi(\mathbf{r},0) = vu_0(\mathbf{r}).$

1.164. $\frac{1}{v}\Phi_t = D\Delta\Phi - \Sigma_c\Phi,\ \ 0 < r < r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < t,$
$\left(\frac{1}{2}\Phi(\mathbf{r},t) + D\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_0} = 0,\ \ \Phi(\mathbf{r},0) = vu_0(\mathbf{r}),\ \ |\Phi| < \infty.$

1.165. $\frac{1}{v}\Phi_t = D_1\Delta\Phi - \Sigma_{c1}\Phi,\qquad \frac{1}{v}\Phi_t = D_2\Delta\Phi - \Sigma_{c2}\Phi,$
$r < r_0,\ \ 0 < t,\qquad r_0 < r,\ \ 0 < t,$
$\Phi(\mathbf{r},0) = vu_0(\mathbf{r}),\qquad \Phi(\mathbf{r},0) = 0,$
$\Phi|_{r_0-0} = \Phi|_{r_0+0},\quad D_1\frac{\partial\Phi}{\partial r}\big|_{r_0-0} = D_2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\big|_{r_0+0},\ \ |\Phi| < \infty.$

Указание. Условия на границе раздела вытекают из непрерывности односторонних плотностей тока нейтронов (закон сохранения нейтронов) на границе раздела двух сред:

$$\left(\tfrac{1}{2}\Phi - D_1\tfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\Big|_{r_0-0} = \left(\tfrac{1}{2}\Phi - D_2\tfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\Big|_{r_0+0},$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\Phi + D_1\tfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\Big|_{r_0-0} = \left(\tfrac{1}{2}\Phi + D_2\tfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\Big|_{r_0+0}.$$

1.166. $\Delta\Phi - \frac{1}{L^2}\Phi = 0,\ \ x \ne x_0,$
$\Phi(+0) - \Phi(-0) = -\frac{q_0}{D},\ \ |\Phi| < \infty,$
$L = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma_c\Sigma_s}} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}}$ – длина диффузии.

Физический смысл величины L можно уяснить на примере задачи:

$$\Phi_{xx} - \tfrac{1}{L^2}\Phi = 0,\quad 0 < x,\quad |\Phi| < \infty.$$

Плотность потока нейтронов $\Phi = Cexp(-x/L)$. Следовательно, L — длина, на которой плотность потока уменьшается в e раз.

1.167. $\Delta\Phi - \frac{1}{L^2}\Phi = 0,\ \ 0 < x < \tilde{l},\qquad .$
$\frac{1}{4}\Phi(0) - \frac{D}{2}\Phi_x(0) = q_0,\ \ \Phi(\tilde{l}) = 0$

1.168. $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{L^2}\Phi = 0,\quad 0 < r,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\lim\limits_{r\to 0}\left(2\pi r D\frac{d\Phi}{dr}\right) = -q_0,\quad |\Phi(\infty)| < \infty.$

1.169. $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{L^2}\Phi = 0,\quad 0 < r,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ < \theta < \pi,$
$\lim\limits_{r\to 0}\left(4\pi r^2 D\frac{d\Phi}{dr}\right) = -Q_0,\quad \Phi(\tilde{r}_0) = 0.$

1.170. $\Delta\Phi - \frac{1}{L_1^2}\Phi = 0,\qquad \Delta\Phi - \frac{1}{L_2^2}\Phi = -\frac{Q_0}{D_2}\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z - z_0),$
$-\infty < x, y < \infty,\ \ z < 0,\qquad -\infty < x, y < \infty,\ \ 0 < z,$
$\Phi|_{z=-0} = \Phi|_{z=+0},\quad D_1\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=-0} = D_2\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=+0},$
$\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(\mathbf{r}) = 0,$

где $D_i = \frac{1}{3\Sigma_{si}},\quad L_i = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_{si}\Sigma_{ci}}},\quad i = 1, 2.$ См. указание к задаче 1.165.

1.171. $\Delta\Phi - \frac{1}{L^2}\Phi = -\frac{F(\mathbf{r})}{D},\ \ (x, y, z) \in \Omega,$
$\left(\frac{1}{2}\Phi + D\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,\qquad \mathbf{n}$— внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

1.172. $\Delta\Phi - \frac{1}{L^2}\Phi = 0$ в $\Omega,\quad \left(\frac{1}{4}\Phi + \frac{D}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\Big|_S = \frac{1}{4}\Phi_0,\quad \mathbf{n}$ — внешняя нор-

маль к $\partial\Omega$. Указание. В единицу времени через элементарную площадку $\Delta S \subset S = \partial\Omega$ проходит

$$\tfrac{\Delta S}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

нейтронов, скорость которых составляет углы от θ до $\theta + d\theta$ с направлением внутренней нормали к S. **1.173.** Решение. В объеме $d\mathbf{r}'$ в единицу времени рождается $\nu\Sigma_f \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ быстрых нейтронов. Если бы поглощение отсутствовало, то в тепловую область попало бы

$$\nu\Sigma_f \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

нейтронов. На самом деле их будет меньше на величину

$$\int\limits_\Omega \Big[\int\limits_\Omega \nu\Sigma_f \Phi(\mathbf{r}' w(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', E_0, E_\tau) d\mathbf{r}' \Big] (1-\varphi) w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) d\mathbf{r}'' =$$

$$= \nu\Sigma_f (1-\varphi) \int\limits_{\mathbf{R}^3} \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} w(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', E_0, E_\tau) w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_r, E_\tau) d\mathbf{r}'' =$$

$$= \nu\Sigma_f (1-\varphi) \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

В проделанной выкладке равенства не являются точными из-за замены областей интегрирования Ω на $\mathbf{R}^3$ и обратно. Подобная замена мало влияет на результат при достаточно больших размерах реактора.

Таким образом, в единице объема (в точке $\mathbf{r}$) в единицу времени появляется число нейтронов, равное (см.(1.38))

$$Q(\mathbf{r}) = \nu\Sigma_f \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \nu\Sigma_f (1-\varphi) \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' =$$
$$= \nu\Sigma_f \varphi \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = k_\infty \Sigma_a \int\limits_\Omega w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

1.174. Решение. Плотность потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r}) > 0$ и монотонно убывает к границе реактора, следовательно, функция $\Phi(\mathbf{r})$ существенно меняется на длине порядка размера реактора R, а функция $w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau)$ — на длине порядка $\sqrt{\tau}$. Так как $R \gg \sqrt{\tau}$, то $\Phi(\mathbf{r})$ мало меняется на длине $\sqrt{\tau}$. Кроме того функция $w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) = w(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, E_0 - E_\tau)$ достаточно быстро убывает с ростом $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$. В связи с этим в интеграле, входящем в уравнение (1.49), можно $\Phi(\mathbf{r})$ представить разложением

$$\Phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i') \left. \tfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{r}} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (x_i - x_i')(x_j - x_j') \left. \tfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{r}}$$

и проинтегрировать по $\mathbf{R}^3$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) d\mathbf{r}' = 1, \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^3} (x_i - x_i') \, w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) d\mathbf{r}' = 0,$$
$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} (x_i - x_i')(x_j - x_j') \, w(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E_0, E_\tau) \, d\mathbf{r}' \overline{|x_i - x_i'|^2} \delta_{ij} = \tfrac{1}{3} \overline{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \tfrac{\overline{r^2}}{3}$$

и уравнение (1.49) примет вид

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi + k_\infty\Sigma_a\Phi + \frac{\overline{r^2}}{6}k_\infty\Sigma_a\Delta\Phi = 0.$$

Если ввести $\tau{=}\frac{\overline{\mathbf{r}^2}}{6}$ и вспомнить, что коэффициент диффузии $D{=}L^2\Sigma_c$, то Φ будет решением уравнения

$$\Delta\Phi + \tfrac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty\tau}\Phi = 0.$$

Лапласиан $\Delta\Phi$ равен по порядку величины Φ/R^2. Сравнение с уравнением (1.50) показывает, что $\alpha{\sim}1/R$. Из неравенств $1/\alpha \gg L$, $1/\alpha \gg \sqrt{\tau}$ и из того, что $k_\infty{\sim}1$ вытекает оценка $k_\infty - 1 = \alpha\sqrt{l^2+\tau} \ll 1$.

1.175. $\Delta\Phi(\mathbf{r}) + \alpha^2\Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} = (x,y,z) \in \Omega,$

1. $\Phi|_{\tilde{S}} = 0$ 2. $\left(\frac{1}{2}\Phi + D\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\Big|_S = 0,$

$\Phi(\mathbf{r}) > 0, \ \mathbf{r} = (x,y,z) \in \Omega, \ \mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S.

1.176. $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\Phi}{dr} + \alpha^2\Phi = 0, \quad \tilde{r}_1 < r < \tilde{r}_2$

$\Phi(\tilde{r}_1) = \Phi(\tilde{r}_2) = 0, \quad \tilde{r}_{1,2} = r_{1,2} \pm \delta, \ \ \delta = 0,71\lambda_s.$

1.177. $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} + \alpha^2\Phi = 0, \quad r_1 < r < r_2$

$\Phi'(r_1) = 0, \quad \frac{1}{2}\Phi(r_2) + D\Phi'(r_2) = 0, \ \Phi(r) > 0, \quad r_1 < r < r_2.$

1.178. $\Delta\Phi + \alpha_C^2\Phi = 0, \qquad \Delta\Phi - \frac{1}{L_R^2}\Phi = 0,$

$|x| < l_1, \ |y| < l_2, \ |z| < l_3, \qquad |x| < l_1, \ |y| < l_2, \ l_3 < |z| < l,$

$\Phi(\pm\tilde{l}_1, y, z) = \Phi(x, \pm\tilde{l}_2, z) = 0, \qquad \Phi(\pm\tilde{l}_1, y, z) = \Phi(x, \pm\tilde{l}_2, z) = 0,$

$\Phi(x,y,\pm\tilde{l}) = 0,$

$\Phi(x,y,l_3-0) = \Phi(x,y,l_3+0), \quad \Phi(x,y,-l_3+0) = \Phi(x,y,-l_3-0),$

$D_C\frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=l_3-0} = D_R\frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=l_3+0}, \quad D_C\frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=-l_3+0} = D_R\frac{\partial\Phi}{\partial z}\big|_{z=-l_3-0},$

$L_R^2{=}\frac{D_R}{\Sigma_c^R}$, $D_R{=}\frac{1}{3\Sigma_s^R}$, $D_C{=}\frac{1}{3\Sigma_s^C}$, величина α_C определена в задаче 1.174.

1.179. $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} + \alpha_C^2\Phi = 0, \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{L_R^2}\Phi = 0,$

$0 < r < r_0, \qquad r_0 < r < \tilde{r}_1,$

$|\Phi(0)| < \infty, \qquad \Phi(\tilde{r}_1) = 0,$

$\Phi(r_0 - 0) = \Phi(r_0 + 0), \quad D_C\ \frac{d\Phi}{dr}\big|_{r_0-0} = D_R\ \frac{d\Phi}{dr}\big|_{r_0+0},$

$\Phi(r) > 0, \quad r < \tilde{r}_2.$

Обозначения те же, что в ответе к предыдущей задаче.

1.180. $\frac{\partial q}{\partial\tau} = \Delta q, \quad 0 < r < \infty, \ \ 0 < \tau,$

$q(r,0) = Q_0\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad \lim\limits_{r\to\infty} q(r,\tau) = 0.$

1.181. $\frac{\partial q}{\partial\tau} = \Delta q + Q_0\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}, \qquad \frac{\partial q}{\partial\tau} = \Delta q,$

$0 < r < r_0, \ \ 0 < \tau, \qquad r_0 < r, \ \ 0 < \tau,$

$\frac{1}{\xi_1\Sigma_{s1}}q(r_0-0,\tau) = \frac{1}{\xi_2\Sigma_{s2}}q(r_0+0,\tau),$

$\frac{D_1}{\xi_1\Sigma_{s1}}\ \frac{\partial q}{\partial r}\big|_{r=r_0-0} = \frac{D_2}{\xi_2\Sigma_{s2}}\ \frac{\partial q}{\partial r}\big|_{r=r_0+0},$

$q(r,0) = 0, \quad |q(r,\tau)| < \infty, \quad \lim\limits_{r\to\infty} q(r,\tau) = 0.$

1.182. $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q, \quad 0 < x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ 0 < \tau,$
$q(0, y, \tau) = 0, \quad q(x, y, 0) = q_0 \delta(x - d) \cdot \delta(y),$
$q(x, y, \tau) \to 0$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty.$

1.183. $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ 0 < \tau,$
$q(x, 0) = Q_0 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kd).$

1.184. $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q + Q_0 \frac{\delta(r - r')}{4\pi r'^2} \cdot \delta(\tau), \quad 0 < r, \ 0 < \tau,$
$q(r, 0) = 0, \quad |q(0, \tau)| < \infty, \quad \lim\limits_{r \to \infty} q(r, \tau) = 0.$

1.185. $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q, \quad r < r_0, \ r_0 < r, \ 0 < \tau,$
$q(r, \tau) = 0$ при $r < r_0, \quad q(r, \tau) \to 0$ при $r \to \infty,$
$q(r, 0) = Q_0 \delta(r - r_0).$

1.186. 1. $q(\mathbf{r}, u) = Q(\mathbf{r}, u)\, e^{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')du'}{\xi\Sigma(u')}}$, $Q(\mathbf{r}, u)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial Q(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} = \Delta Q(\mathbf{r}, \tau) + Q_0 \delta(\tau),$$

где τ и u связаны соотношением (1.63).

$$2. \qquad \varphi(u) = e^{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')du'}{\xi\Sigma(u')}}. \tag{1.146}$$

Указания. 1. В уравнение (1.62) ввести слагаемое $\int_{\Delta\Omega} \xi\Sigma_a(u)\Phi(\mathbf{r}, u)d\mathbf{r}du$, учитывающее убыль нейтронов из-за поглощения. В уравнении

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi\Sigma(u)}\Delta q - \frac{\Sigma_a(u)}{\xi\Sigma(u)} q + Q_0 \delta(u) \tag{1.147}$$

сделать замену

$$q(\mathbf{r}, u) = \varphi(\mathbf{r}, u) e^{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u'du'}{\xi\Sigma(u'}}$$

и перейти к переменной τ посредством (1.63). 2. В бесконечном замедлителе функция q зависит только от u; в этом случае из уравнения (1.147) следует:

$$\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\Sigma_a(u)}{\xi\Sigma(u)} q = 0, \quad q(0) = Q_0.$$

Отсюда

$$q(u) = q(0) e^{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')du'}{\xi\Sigma(u')}}.$$

1.187. $q(\mathbf{r}, u) = \varphi(u)\, Q(\mathbf{r}, u)$, где функция $Q(\mathbf{r}, u)$ — решение задачи:
$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \Delta Q + Q_0 \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - z_0) \cdot \delta(\tau), \quad -\infty < x, y < \infty, \ 0 < z, \ 0 < \tau,$
$\frac{1}{2} Q(x, y, 0, \tau) - D Q_z(x, y, 0, \tau) = 0, \quad Q(x, y, z, \tau) \to 0$ при $(x, y, z > 0) \to \infty,$
функция $\varphi(u)$ определена в п.2 ответа к предыдущей задаче , $\tau = \tau(u)$ имеет вид (1.64). **1.188.** $D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r}, u_T), \ \Phi(\mathbf{r}) \to 0$ при $r \to \infty,$
где плотность замедления $q(\mathbf{r}, u)$ — решение задачи:

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi\Sigma(u)}\Delta q + Q_0\delta(u),$$
$$q(\mathbf{r}, u) \to 0 \ \text{ при } \ r \to \infty.$$

Указание. В стационарном уравнении диффузии (см. задачу 1.160) источником тепловых нейтронов является функция $q(\mathbf{r}, u_T)$.

1.189. $D(u)\Delta\Phi(\mathbf{r}, u) - \Sigma_a(u)\Phi(\mathbf{r}, u) = \frac{\partial q}{\partial u}, \quad M(\mathbf{r}) \in \tilde{\Omega} \ \ 0 \le u \le u_T,$
$q(\mathbf{r}, u) = \xi\Sigma(u)\Phi(\mathbf{r}, u), \ \ \Sigma(u) = \Sigma_s(u) + \Sigma_a(u), \ \ q(\mathbf{r}, 0) = \nu\Sigma_f^T\Phi_T(\mathbf{r}, u),$
$D_T\Delta\Phi_T(\mathbf{r}) - \Sigma_a^T\Phi_T(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r}, u_T), \quad M(\mathbf{r}) \in \tilde{\Omega},$
$\Phi(\mathbf{r}, u) = R(\mathbf{r})\,U(u), \quad M(\mathbf{r}) \in \tilde{\Omega}, \ \ 0 \le u \le u_T,$
$\Phi_T(\mathbf{r}) = C_T R(\mathbf{r}), \quad R(\mathbf{r})|_{\tilde{S}} = 0, \quad R(\mathbf{r}) > 0, \quad M(\mathbf{r}) \in \Omega,$

где $\tilde{\Omega}$ — область с границей $\tilde{S}$; $\Omega \supset \tilde{\Omega}$; $M(\mathbf{r})$ — точка с пространственной координатой $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$; ν — среднее число нейтронов на один акт деления; индексом T помечены значения величин в тепловой области.

1.190. $q(\mathbf{r}, 0) = \nu\Big[\Sigma_f^T\Phi_T(\mathbf{r}) + \int\limits_0^u \Sigma_f(u)\Phi(\mathbf{r}, u)\,du\Big]$, остальные уравнения те же, что в ответе к предыдущей задаче. **1.191.** Решение. Изменение числа нейтронов в элементе $d\omega = d\mathbf{r}\,d\mathbf{l}$ фазового пространства за время dt

$$dn = (n|_{t+dt} - n|_t)\,d\omega = \tfrac{\partial n}{\partial t}d\omega\,dt.$$

С другой стороны,

$$dn = dn_{\mathbf{v}} + dn_{\text{ст}} + dn_F, \tag{1.148}$$

где $dn_{\mathbf{v}}$, $dn_{\text{ст}}$, dn_F — изменения числа нейтронов, обусловленные соответственно поступательным движением нейтронов, их столкновениями с ядрами, действием источников. Если в момент t в элементе $d\omega$ содержится $n(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)\,d\omega$ нейтронов, то в момент $t+dt$ в том же элементе их будет столько, сколько было в момент t в элементе с координатами $\mathbf{r}-\mathbf{l}vdt$, т.е.

$$dn_{\mathbf{v}} = (n(\mathbf{r} - \mathbf{l}\,v\,dt, \mathbf{l}, t)\,d\omega - n(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)\,d\omega = -v\,(\mathbf{l}\nabla n)\,d\omega\,dt.$$

Изменение числа нейтронов вследствие столкновений $dn_{\text{ст}} = dn_{\text{ст}}^- + dn_{\text{ст}}^+$. Число выбывших из элемента $d\omega$ нейтронов $dn_{\text{ст}}^- = -n(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)\,d\omega\,\Sigma\,v\,dt$. Число прибывших в элемент $d\omega$ нейтронов $dn_{\text{ст}}^+ = dn_s^+ + dn_f^+$, где

$$dn_s^+ = v\,\Sigma_s \int\limits_{\mathbf{l}'} w_s(\mathbf{l}', \mathbf{l})\,\psi(\mathbf{r}, \mathbf{l}', t)\,d\mathbf{l}'d\omega\,dt,$$

$$dn_f^+ = \nu\,v\,\Sigma_f \int\limits_{\mathbf{l}'} w_f(\mathbf{l}', \mathbf{l})\,\psi(\mathbf{r}, \mathbf{l}', t)\,d\mathbf{l}'\,d\omega\,dt\,.$$

Источники изменяют число нейтронов на величину $dn_F = F(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)\,d\omega\,dt$. Подстановка выражений для $dn_{\mathbf{v}}$, dn, dn_F в соотношение (1.148) приводит к уравнению (1.65). **1.192.** Функция $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)$ удовлетворяет начальному и граничному условиям: $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{l}, 0) = \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{l})$, и $(\mathbf{l}\,\mathbf{n})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t)|_{\partial\Omega} = 0$ при $(\mathbf{l}\,\mathbf{n}) \le 0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Замечание. Сокращение множителя $(\mathbf{l}\,\mathbf{n})$ в граничном условии может привести к ошибке (см.[64]).

1.193. $(\mathbf{l}\nabla\Phi)+\Sigma_1\Phi=\int\limits_{\mathbf{l}'} g_1(\mathbf{r},\mathbf{l}',\mathbf{l})\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l}')\,d\mathbf{l}', \quad z<0,$

$(\mathbf{l}\nabla\Phi)+\Sigma_2\Phi=\int\limits_{\mathbf{l}'} g_2(\mathbf{r},\mathbf{l}',\mathbf{l})\Phi(\mathbf{r},\mathbf{l}')\,d\mathbf{l}'+\frac{Q_0}{4\pi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \quad z>0.$

$(\mathbf{l}\,\mathbf{e}_z)\Phi(x,y-0,\mathbf{l})=(\mathbf{l}\,\mathbf{e}_z)\Phi(x,y,+0,\mathbf{l}), \quad \Phi(\mathbf{r},\mathbf{l})\to 0$ при $r\to\infty.$

1.195. $\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=div(D\nabla\Phi)+\gamma\,\Phi+f, \quad \gamma=\nu\Sigma_f-\Sigma_a, \quad f(\mathbf{r},t)=\int\limits_{\mathbf{l}} F(\mathbf{r},\mathbf{l},t)\,d\mathbf{l}.$

Указание. Проинтегрировать обе части уравнения (1.66) по $\mathbf{l}$ и учесть, что концентрация нейтронов $n(\mathbf{r},t)=\int\limits_{\mathbf{l}} n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)\,d\mathbf{l}$, плотность тока нейтронов в направлении $\mathbf{s}$

$$j_s(\mathbf{r},t)=\int\limits_{\mathbf{l}}(v\mathbf{l}\,\mathbf{s})\,n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)\,d\mathbf{l}\,,$$

$$\int\limits_{\mathbf{l}} v(\mathbf{l}\nabla n)\,d\mathbf{l}=\int\limits_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}\nabla\Phi)\,d\mathbf{l}=\int\limits_{\mathbf{l}} l_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}d\mathbf{l}+\ldots=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}\mathbf{e}_x)\Phi\,d\mathbf{l}+\ldots=\frac{\partial j_x}{\partial x}+\ldots=div\mathbf{j}.$$

1.196. $\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Sigma\Phi=\frac{\beta}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Phi(z,\mu',t)\,d\mu'+F(z,\mu,t), \quad |z|<d;$

$\mu\Phi(-d,\mu,t)=0, \ \ \mu\geq 0, \quad \mu\Phi(d,\mu,t)=0, \ \ \mu\leq 0, \quad \Phi(z,\mu,0)=\Phi_0(z,\mu).$

1.197. $\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\mathbf{l}\nabla\Phi)+\Sigma(v)\Phi=\int\limits_0^\infty\Sigma_s(v')\,dv'\int\limits_{\mathbf{l}'} w_s(\mathbf{v}'\to\mathbf{v})\ Phi(\mathbf{r},v',\mathbf{l}',t)\,d\mathbf{l}'+$

$$+\int\limits_0^\infty\nu(v')\Sigma_f(v')\,dv'\int\limits_{\mathbf{l}'} w_f(\mathbf{v}'\to\mathbf{v})\Phi(\mathbf{r},v',\mathbf{l}',t)\,d\mathbf{l}'+F,$$

где $\Sigma(v)\Sigma_s(v)+\Sigma_c(v)+\Sigma_f(v)$.

1. $(\mathbf{l}\,\mathbf{n})\Phi(\mathbf{r}_s-0,v,\mathbf{l},t)(\mathbf{l}\,\mathbf{n})\Phi(\mathbf{r}_s+0,v,\mathbf{l},t), \quad \mathbf{n}-$ нормаль к S;
2. $(\mathbf{l}\,\mathbf{n})\Phi(\tilde{\mathbf{r}}_s,v,\mathbf{l},t)=0 \quad (\mathbf{l}\,\mathbf{n})\leq 0, \quad \mathbf{n}-$ внешняя нормаль к S.

1.198. $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \ \ 0<t,$

$u_x(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=\frac{I}{\rho_0 S}\delta(x).$

1.199. $v_{tt}=a^2v_{xx}, \quad 0<x<l, \ \ 0<t,$

$v(0,t)=u_0\omega\,\cos\omega t, \quad v_x(l,t)=0, \quad v(x,0)=v_t(x,0)=0.$

1.200. $s_{tt}=a^2s_{xx}, \quad 0<x<l, \ \ 0<t,$

$s_x(0,t)=-\frac{v_0\omega}{a^2}\cos\omega t, \quad s_x(l,t)+\frac{p_0\gamma}{k}s_{xx}(l,t)+\frac{m}{k}s_{xtt}(l,t)=0,$

$s(x,0)=s_t(x,0)=0, \quad \alpha=\frac{\gamma\,P_0S_0}{k} \quad \beta=\frac{m}{k}.$

1.201. $p_{tt}=a^2p_{xx}, \quad -l<x<l, \ \ 0<t,$

$p_x(-l,t)=p_x(l,t)=0,$

$$p(x,0)=\begin{cases}-\alpha P_0, & -l<x<0,\\ \alpha P_0, & 0<x<l,\end{cases} \qquad p_t(x,0)=0.$$

1.202. $P(x,t)=P_0+p(x,t), \quad p(x,t)$ — решение задачи:

$$p_{tt} = a^2 p_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$-kp_x(0,t) + mp_{xtt}(0,t) = S\rho_0 p_0''(t), \quad p(l,t) = p_0(t), \quad p(x,0) = p_t(x,0) = 0.$$

1.203. $\psi_{tt} = a^2\psi_{xx} - \frac{a^2}{\rho_0 S}Q(t)\cdot\delta(x-x_0), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$$\psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0, \quad \psi(x,0) = \psi_t(x,0) = 0.$$

Указание. В лагранжевых переменных закон сохранения массы (уравнение непрерывности) запишется в виде $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, S\, \Delta\xi) = Q\,\Delta\xi$, где $\xi = x + u$, откуда $\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1+u_x)]\frac{Q}{S}(1+u_x)$.

1.204. 1. $\psi_{tt} = a^2\psi_{xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$\psi_x(0,t) = v_0, \ \ \lim_{x\to+\infty}\psi_x(x,t) = 0, \ \ \psi(x,0) = \psi_t(x,0) = 0.$

2. $p_{tt} = a^2 p_{xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$p_x(0,t) = -\rho_0 v_0\delta(t), \quad \lim_{x\to+\infty} p(x,t) = 0, \ \ p(x,0) = p_t(x,0) = 0,$
$p(x,t)$ — отклонение давления от равновесного значения.

1.205. 1. $\psi_{tt} = a^2\psi_{xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$\psi(0,t) = -\frac{1}{\rho_0}(P_1 - P_0), \ \ \lim_{x\to+\infty}\psi_x(x,t) = 0$
$\psi(x,0) = \psi_t(x,0) = 0.$

2. $p_{tt} = a^2 p_{xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$p(0,t) = P_1 - P_0, \quad \lim_{x\to+\infty} p(x,t) = 0, \ \ p(x,0) = p_t(x,0) = 0,$
$p(x,t)$ — отклонение давления от равновесного значения.

1.206. Потенциал скоростей — решение задачи:

1. $\psi_{1tt} = a_1^2\psi_{1xx}, \quad x < 0,\ 0 < t,$
$\lim_{x\to-\infty}\psi_{1x}(x,t) = 0,$
$\psi_1(x,0) = \psi_{1t}(x,0) = 0,$
$\psi_{2tt} = a_2^2\psi_{2xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$\lim_{x\to+\infty}\psi_{2x}(x,t) = 0,$
$\psi_2(x,0) = \psi_{2t}(x,0) = 0,$
$\psi_{2x}(0,t) = \psi_{1x}(0,t), \quad \rho_{20}\psi_2(0,t) = \rho_{10}\psi_1(0,t) = (P_2 - P_1)\,t.$

Давление в газе — решение задачи:

2. $p_{1tt} = a_1^2 p_{1xx}, \quad x < 0,\ 0 < t,$
$\lim_{x\to-\infty} p_1(x,t) = 0,$
$p_1(x,0) = p_{1t}(x,0) = 0,$
$p_{2tt} = a_2^2 p_{2xx}, \quad 0 < x,\ 0 < t,$
$\lim_{x\to+\infty} p_2(x,t) = 0,$
$p_2(x,0) = p_{2t}(x,0) = 0,$
$p_1(0,t) = p_2(0,t), \quad \frac{1}{\rho_{10}}p_1(0,t) - \frac{1}{\rho_{20}}p_2(0,t),$
$p_i(x,t) = P_i(x,t) - P_0$, где $i = 1,2$, — отклонение давления от равновесного значения.

1.207. $p_{tt} = a^2 p_{xx} - a^2 p_0 \sin\omega\, t\cdot\delta'(x), \quad x > 0,\ 0 < t,$
$\lim_{x\to\infty} p(x,t) = 0, \ \ p(x,0) = p_t(x,0) = 0,$
$p(x,t)$ — отклонение давления от равновесного значения.

1.208. $p_{tt} = a^2 p_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ \ 0 < t,$
$p(-0,t) = p(+0,t) = 0, \quad S_1 p_x(-0,t) = S_2 p_x(+0,t),$
$p(x,0) = f(x), \ \ p_t(x,0) = -a\, f'(x).$

Указание. Условия при $x{=}0$ выражают непрерывность давления и потока газа.

1.209. Указание. В акустическом приближении $|s| \ll 1$, $|p| \ll P_0$, $V \ll a$. Если функция f характеризует колебания газа, то за период T на длине волны $\lambda = aT$ (где a — скорость звука) f изменится на Δf. Следовательно,

$$\left|\tfrac{\partial f}{\partial t}\right| \sim \tfrac{|\Delta f|}{T}, \qquad |\nabla f| \sim \tfrac{|\Delta f|}{\lambda}, \qquad \left|\tfrac{\nabla f}{f_t}\right| \sim \tfrac{T}{\lambda} \sim \tfrac{1}{a},$$

поэтому

$$\tfrac{|(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}|}{|\mathbf{V}_t|} \sim \tfrac{|\mathbf{V}|}{a} \ll 1.$$

Аналогично оценивается слагаемое $(\mathbf{V}\nabla s)$, входящее в уравнение непрерывности.

1.211. $P = P_0 + p$, где $p(x,t)$ — решение задачи:

$$Sp_{tt} = a^2 \tfrac{\partial}{\partial x} S \tfrac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$p_x(0,t) = -\rho_0 \mu''(t), \quad p(l,t) = 0,$$
$$p(x,0) = p_t(x,0) = 0.$$

1.212. $\psi_{tt} = a^2 \Delta\psi, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$

$$|\psi| < \infty, \quad \tfrac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \alpha(\theta,\varphi)\, \omega r_0 \cos \omega t,$$
$$|\psi|_{t=0} = \psi_t|_{t=0} = 0.$$

1.213. $\psi_{tt} = a^2 \psi_{xx}, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$

$$|\psi| < \infty, \quad \tfrac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0,$$
$$\psi|_{t=0} = v_0 r \cos\varphi, \quad \psi_t|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{k} = -\mathbf{e}_z.$$

1.214. $\psi_{tt} = a^2 \psi_{xx}, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$

$$\psi_r|_{r=r_0} = 0, \qquad \psi_z|_{z=0} = \alpha(r,\varphi)\, \omega l \cos \omega t, \quad \psi_z|_{z=l} = 0,$$
$$|\psi| < \infty, \quad \psi|_{t=0} = \psi_t|_{t=0} = 0.$$

1.215. $\psi_{tt} = a^2 \psi_{xx} - \tfrac{a^2}{\rho_0} Q(t) \cdot \tfrac{\delta(r)}{4\pi r^2},$

$$0 < r < r_0, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$$
$$|\psi| < \infty, \quad \psi_r|_{r=r_0} = 0, \qquad \psi|_{t=0} = \psi_t|_{t=0} = 0.$$

1.216. $s_{tt} = a^2 \Delta s, \ \ 0 < r < \infty, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$

$$|s| < \infty, \qquad s(\mathbf{r},0) = s_0(\mathbf{r}), \quad s_t(\mathbf{r},0) = 0.$$

1.217. $\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$\tfrac{\partial p}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \rho_0 \omega^2 A \cos\theta,$$
$$p = O\left(\tfrac{1}{r}\right), \ \ \tfrac{\partial p}{\partial r} + ikp = o\left(\tfrac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

1.218. $\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial p}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \rho_0 \omega^2 \alpha r_0, \quad p = O\left(\frac{1}{r}\right),$
$\frac{\partial p}{\partial r} + ikp = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$

1.219. $\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial p}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \rho_0 \omega^2 A \cos\varphi,$
$p = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \quad \lim\limits_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial p}{\partial r} + ikp\right) = 0.$

1.220. $\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial p}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \rho_0 \omega^2 \alpha r_0,$
$p = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \quad \lim\limits_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial p}{\partial r} + ikp\right) = 0.$

1.221. Результирующее давление $P(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Re}\left[p(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + P_0 e^{i(\omega t - kr\cos\theta)}\right]$, давление в рассеянной волне $\mathbf{Re}(p(\mathbf{r}) e^{i\omega t})$, где $p(\mathbf{r})$ —решение внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial p}{\partial r}\big|_{r=r_0} = ik\cos\theta e^{-ikr_0\cos\theta},$
$p = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial r} + ikp = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$

1.223. Уравнение то же, что и в задаче 1.222; граничное условие $V|_{z=0} = 0$.

1.224. $\Delta\psi = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0, \quad |\psi - V_0 r\cos\varphi| < \infty.$

1.225. Потенциал скоростей $\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{R}, t)$, где $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_0(t), \quad \mathbf{r}_0'(t) = \mathbf{V}(t)$, Ψ — решение задачи:

$\Delta\Psi = 0, \quad r_0 < R, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial \Psi}{\partial R}\big|_{R=r_0} = V(t)\cos\theta, \quad \lim_{R\to\infty} \Psi = 0;$

давление $P|_S = P_0 - \rho_0\left(\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 - (\mathbf{V}(t)\,\nabla\Psi) + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\big|_{R=r_0}$.

1.226. $\Delta\psi = 0, \quad r_0(t) < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0(t)} = r_0'(t), \quad \lim\limits_{r\to\infty} \psi = 0,$
$P|_S = P_0 - \rho_0\left(\frac{1}{2}(r_0')^2 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\big|_{r=r_0(t)}\right).$

1.227. $\Delta\psi = 0, \quad r_0(t) < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 < t,$
$\frac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0(t)} = r_0'(t), \quad r_0(0) = r_0, \ \ r_0'(0) = 0,$
$\frac{\partial \psi}{\partial t}\big|_{r=r_0(t)} = \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{(r_0'(t))^2}{2}, \quad \lim\limits_{r\to\infty} \psi = 0.$

1.228. $\Delta\psi = \frac{Q_0}{\rho_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}), \quad r_0 < r, \ \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial \psi}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0, \quad \lim\limits_{r\to\infty} \psi = 0.$

1.229. $\Delta\psi = \frac{Q_0}{\rho_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \quad r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial\psi}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0, \quad \psi = \mathcal{O}(\ln r), \;\; r \to \infty.$

1.230. $\mathbf{V} = \nabla u, \quad \Delta\, u(M) = 0, \;\; M \in \Omega,$
$u|_S = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{S_1} = (\mathbf{V}_0\mathbf{n}), \;\; \mathbf{n} -$ внешняя нормаль.

1.231. $\Delta\psi = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \;\; -h_0 < z < 0,$
$(\psi_{tt} + g\psi_z)|_{z=0} = 0, \;\; \psi(x,y,0,0) = \psi_0(x,y), \;\; \psi_t(x,y,0,0) = \psi_1(x,y),$
$1.\ \psi_z|_{z=-h_0} = 0\,; \quad 2.\ |\psi| < \infty.$

Решение. Если функция f характеризует колебательное движение с амплитудой A, длиной волны λ, периодом T, то справедливы следующие порядковые оценки (см. указание к задаче 1.209):

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{\Delta f}{T}, \quad |(\mathbf{V}\nabla f)| \sim \left|\frac{V\Delta f}{\lambda}\right| = \left|\frac{VT}{\lambda}\,\frac{\Delta f}{T}\right| \sim \frac{A}{\lambda}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|.$$

Отсюда

$$\frac{df}{dt} \sim \left(1 + \frac{A}{\lambda}\right)\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{1.149}$$

При условии $A \ll \lambda$ уравнение (1.82) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\frac{P}{\rho_0} + \mathbf{g} = 0. \tag{1.150}$$

Применение операции rot к обеим частям (1.150) приводит к тождеству $(rot\mathbf{V})_t = 0$, из которого следует, что $rot\mathbf{V} = \mathbf{C}$. Так как средняя скорость при колебательном движении равна нулю, то

$$\mathbf{C} = \tfrac{1}{T}\int_0^T \mathbf{C}\,dt = \tfrac{1}{T}\int_0^T rot\,\mathbf{V}\,dt = rot\left(\tfrac{1}{T}\int_0^T \mathbf{V}\,dt\right) = 0.$$

Итак, движение жидкости является потенциальным и уравнение (1.150) в результате подстановки $\mathbf{V} = \nabla\psi$ и интегрирования преобразуется к виду

$$\psi_t + \tfrac{P}{\rho_0} + gz = f(t).$$

Отсюда после замены $\psi \to \psi + \int_0^t f(\tau)d\tau - \frac{P}{\rho}$ получается граничное условие для потенциала ψ

$$(\psi_t + gz)|_{z=\zeta} = 0, \tag{1.151}$$

представляющее собой приближенное условие (1.84). Упрощение второго условия (1.85) основано на оценке (1.149), согласно которой

$$\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\big|_{z=\zeta} = V_z|_{z=\zeta} = \tfrac{d\zeta}{dt} \approx \tfrac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Это значит, что слагаемое $(\nabla\psi\,\nabla\zeta)$ в (1.85) вносит малый вклад, и это условие превращается в

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{1.152}$$

Граничные условия (1.151) и (1.152) объединяются в одно посредством дифференцирования (1.151) по t:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi_t|_{z=\zeta}) + g\psi_z|_{z=\zeta} = 0.$$

Но

$$\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi_t|_{z=\zeta}) = \tfrac{\partial \psi_t(x,y,\zeta,t)}{\partial t} = \tfrac{\partial \psi_t}{\partial t}\big|_{z=\zeta} + \big(\tfrac{\partial \psi_t}{\partial z}\, V_z)\big)\big|_{z=\zeta} \approx \psi_{tt}|_{z=\zeta},$$

следовательно, $(\psi_{tt}+g\psi_z)|_{z=\zeta} = 0$. Так как $|\zeta| \ll h$, то в последнем условии можно взять $z = 0$.

1.232. $$\Delta\psi = 0, \quad |x| < l_1, \ \ |y| < l_2, \ \ -h_0 < z < 0, \ \ 0 < t,$$
$$(\psi_{tt} + g\psi_z)|_{z=0} = 0, \ \ \psi_z|_{z=-h_0} = \psi_x|_{x=\pm l_1} = \psi_y|_{y=\pm l_2} = 0,$$
$$\psi(x,y,0,0) = \psi_0(x,y), \quad \psi_t(x,y,0,0) = \psi_1(x,y).$$

1.233. $$\Delta\psi(x,z,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ \ z < 0, \ \ 0 < t,$$
$$(\psi_{tt} + g\psi_z)|_{z=0} = 0, \quad |\psi| < \infty,$$
$$\psi(x,0,0) = -\tfrac{1}{\rho} I(x), \quad \psi_t(x,0,0) = -g\zeta_0(x).$$

Указание. Начальные условия для ψ следуют из 1.83:

$$P\Delta\, t = -\rho_0\psi_t\Delta\, t + O(\Delta t) \implies I = -\rho_0(\psi|_{t=+0} - \psi|_{t=-0}).$$

1.234. $$\Delta\psi(x,z,t) = 0, \quad -\infty < x,y < \infty, \ \ -\infty < z < 0, \ \ 0 < z < h, \ \ 0 < t,$$
$$\psi_z|_{z=+0} = \psi_z|_{z=-0} = \tfrac{1}{g(\rho_2-\rho_1)}(\rho_1\psi_{tt}|_{z=+0} - \rho_2\psi_{tt}|_{z=-0}),$$
$$1.\ (\psi_{tt} + g\psi_z)|_{z=h} = 0\,; \quad 2.\ \psi_z|_{z=h} = 0,$$
$$\psi(x,y,0,0) = \psi_0(x,y), \quad \psi_t(x,y,0,0) = \psi_1(x,y).$$

1.235. Решение. Скорость жидкости имеет две компоненты $V_x = u$, $V_z = v$. В виду малости амплитуды в уравнении (1.75) несущественно слагаемое $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$ (см.(1.149)), и уравнение равносильно системе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g, \tag{1.153}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0. \tag{1.154}$$

В теории длинных гравитационных волн давление жидкости отождествляется с гидростатическим (гидравлическое приближение) $P = P_0 + \rho z(\zeta - z)$, которое получается интегрированием уравнения (1.153) без учета слагаемого v_t. Подстановка $P(x,t)$ в (1.154) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{1.155}$$

В действительности полное давление жидкости отличается от гидростатического на величину $\tilde{p}$, порядок которой согласно (1.153) $\rho v_t h$. Из (1.81) следует, что $v \sim u_x h$, поэтому $\tilde{p} \sim \rho h^2 u_{xt}$. Таким образом в уравнении

(1.155) не учтено слагаемое $\tilde{p}_x/\rho$, которое нужно сравнить с u_t :

$$\frac{\tilde{p}_x}{\rho u_t} \sim \frac{\rho v_t h}{\rho u_t} \sim h^2 \frac{u_{xxt}}{u_t} \sim \frac{h^2}{\lambda^2} \ll 1. \tag{1.156}$$

Второе уравнение для u и ζ получается интегрированием уравнения непрерывности (1.81):

$$0 = \int_{-h_0}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h_0}^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial z} dz =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\zeta} u\, dz - u(x,\zeta,t)\,\zeta_x - u(x,-h_0,t)\,h_{0x} + v(x,\zeta,t) - v(x,-h_0,t).$$

Отсюда на основании (1.85) и (1.86)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\zeta} u\, dz + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{1.157}$$

Правая часть уравнения (1.155) не зависит от переменной z, поэтому его решение является функцией x и t. Следовательно, уравнению (1.157) можно придать форму

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0, \tag{1.158}$$

где $h = h_0\,\zeta$. Нелинейное уравнение (1.158)

$$\zeta_t = (h_0 + \zeta)u_x + h_{0x}u + \zeta_x u$$

при сделанных допущениях сводится к линейному

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 u)}{\partial x} = 0. \tag{1.159}$$

так как

$$\tfrac{|\zeta|}{h_0} \sim \tfrac{A}{h_0} \ll 1, \quad \left|\tfrac{\zeta_x u}{\zeta_t}\right| \sim \tfrac{T|u|}{\lambda} \sim T|u_x| \sim \tfrac{T|v|}{h} \sim \tfrac{A}{h_0} \ll 1.$$

Остается исключить $u(x,t)$ из (1.155) и (1.159).

Если $h_0 = Const$, то функции $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$ являются решениями уравнения $\zeta_{tt} = gh_0\zeta_{xx}$, в чем можно убедиться подстановкой этих функций в уравнение.

1.236. $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{g}{d(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(S_0(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$. Указание. Уравнение непрерывности в форме, аналогичной (1.158), следует из закона сохранения массы в слое $(x,\ x+\Delta x)$

$$(\rho S u|_x - \rho S u|_{x+\Delta x})\Delta t = (\rho S|_{t+\Delta t} - \rho S|_t)\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Su)}{\partial x} = 0.$$

1.238. Указание. Вывод второго уравнения системы (1.89) отличается от вывода уравнения (1.155) тем, что нельзя пренебречь слагаемым $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$, так

как амплитуда не мала. Применимость гидравлического приближения основана на оценке (1.156), которая остается справедливой и для отношения полных производных функций v и u по t в силу соотношения (1.149). Вывод первого уравнения дан в решении задачи 1.235 (см.(1.158)).

1.239. Указание. В системе уравнений газодинамики (пример 1.14.)

$$\begin{aligned} &\rho_t + v\,\rho_x + \rho\,v_x = 0,\\ &v_t + v\,v_x + \frac{1}{\rho}\,p_x = 0,\\ &p = \frac{k^2}{\gamma}\rho^\gamma, \quad k^2 = \frac{P_0\gamma}{\rho_0^\gamma} \end{aligned} \tag{1.160}$$

сделать замену

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = k^2\rho^{\gamma-1}. \tag{1.161}$$

1.240. Скорость газа $v(x,t)$ и скорость звука в газе $c(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} &v_t + v\,u_x + \tfrac{2}{\gamma-1}c\,c_x = 0,\\ &c_t + \tfrac{\gamma-1}{2}c\,v_x + v\,c_x = 0, \qquad \mu(t) < x,\ \ 0 < t,\\ &v(\mu(t),t) = \mu'(t),\\ &v(x,0) = 0,\ \ c(x,0) = c_0, \qquad c_0^2 = \tfrac{P_0\gamma}{\rho_0}. \end{aligned}$$

1.241. Решение. Стационарное течение описывается системой уравнений газодинамики (пример 1.14.):

$$div\,\rho\mathbf{v} = 0, \tag{1.162}$$

$$(\mathbf{v}\,\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0, \tag{1.163}$$

$$P = \frac{k^2}{\gamma}\rho^\gamma, \quad k^2 = \frac{P_0\gamma}{\rho_0^\gamma}.$$

Пусть $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем газа. Закон сохранения энергии при адиабатическом процессе $\Delta E + P\Delta V = 0$ можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho}\Delta P = \Delta\left(E + \frac{P}{\rho}\right). \tag{1.164}$$

Так как внутренняя энергия газа $E{=}C_VT$, уравнение состояния $P{=}\rho RT$, где $R{=}C_P{-}C_V$, то

$$E + \tfrac{P}{\rho} = C_VT + \tfrac{P}{\rho} = C_V\tfrac{P}{\rho R} + \tfrac{P}{\rho} = \tfrac{P}{\rho}\left(\tfrac{C_V}{C_P-C_V.} + 1\right)\tfrac{\gamma}{\gamma-1}\tfrac{P}{\rho} = \tfrac{c^2}{\gamma-1}.$$

Уравнение (1.163) приводится к виду

$$\nabla\left(\tfrac{v^2}{2} + \tfrac{c^2}{\gamma-1}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{v^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}=\frac{v_0^2}{2}+\frac{c_0^2}{\gamma-1}.$$

Второе уравнение системы (1.91) представляет собой записанное в декартовых координатах условие $(rot\mathbf{v})_z = 0$, а первое — получается преобразованием уравнения непрерывности (1.162)

$$v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

которое после умножения на $k^2\rho^{\gamma-1}$ и введения функции $c^2 = k^2\rho^{\gamma-1}$ принимает вид:

$$\frac{v_x}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial x}+\frac{v_y}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial y}+c^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0.$$

Вывод завершается подстановкой c^2 из (1.92) и применением второго уравнения системы (1.91).

1.242. Указание. Первое уравнение следует из условия равновесия элемента $\Delta S\Delta r$ сферического слоя $(r, r+\Delta r)$, где ΔS — площадь элемента:

$$-P(r+\Delta r)\Delta S+P(r)\Delta S=F\frac{\rho\Delta S\Delta r m(r)}{r^2},$$

где $m(r)$ — масса шара, радиус которого r. Уравнение Лейна-Эмдена получается исключением P из уравнения равновесия. Из соотношения $\rho = \rho(0)\theta^n$ следует первое начальное условие, а второе — из равенства $\frac{dP}{dr}\big|_{r=0} = 0$ и уравнения состояния электронного газа. **1.244.** Указание. Решение системы (1.97) представить в виде

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\dots,$$
$$\zeta=\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\dots,$$

и ввести новые переменные $\xi = \varepsilon^{\mu}(x-t)$, $\tau\varepsilon^{3\mu}t$; далее действовать так же, как при выводе уравнения КдФ в примере 1.7.

1.245. $\mathbf{V} = V(x,t)\,\mathbf{e}_z$, $V(x,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\nu V_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$V(0,t)=0,\ \ V(l,t)=V_0,\ \ V(x,0)=0.$$

1.246. $\mathbf{V} = V(x,y)\,\mathbf{e}_z$, $V(x,t)$ — решение задачи

$$\Delta V=-\frac{\nu\rho(P_2-P_1)}{l},\quad (x,y)\in\Omega,$$
$$V|_{\partial\Omega}=0.$$

1.247. $\mathbf{V} = V(r,t)\,\mathbf{e}_\varphi$, $V(r,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}\right),\quad 0<r<r_0,\ \ 0<t,$$
$$|V(r,t)|<\infty,\ \ V(r_0,t)=\omega r_0,\ \ V(r,0)=0.$$

1.248. $V_z(r,z) = u(r,z)$, $u(r,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\nu}{u_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2\nu}{r_0u_0}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_0}\quad 0<r<r_0,\ \ 0<z,$$
$$u(r,0)=u_0,\ \ u(r_0,z)=0,\ \ |u(r,z)<\infty.$$

1.249. $div(\rho\nabla P)=\left(\frac{\mu m}{k}\frac{\partial P}{\partial t}-2\rho g\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{d\rho}{dP},\quad \mathbf{e}_z=-\mathbf{e}_g.$

1.250. $q=-\frac{k}{\mu}P_x(0,t)$, где $P(x,t)$ — решение задачи
$\frac{\partial\rho}{\partial t}=a^2 div(\rho\nabla P),\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$P(0,t)=P_1(t),\quad P_x(l,t)+hP(l,t)=hP_0,$
$P(x,0)=P_0,\quad a^2=\frac{k\mu}{m},\ \ h=\frac{\alpha\mu}{k},\ \rho=\rho(P)$ — известная функция.

1.251. $\frac{\partial\rho}{\partial t}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right),\quad r_1<r<r_2,\ \ 0<t,$
$P(r_1,t)=P_1,\ \ \frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_2}=0,$
$P(r,0)=P_0,\quad a^2=\frac{k\mu}{m},\ \ \rho=\rho(P)$ — известная функция.

1.253. $P_t=a^2P_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,\qquad a^2=\frac{k_0}{\mu_0 m_0}\left(\frac{1}{K_m}+\frac{1}{K_\rho}\right)^{-1},$
$P(0,t)=P_1,\ \ P(l,t)=P_0,\ \ P_x(0)=P_0.$

1.254. $Q=2\pi r_1 H\frac{k_0}{\mu_0}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$, где $P(r,t)$ — решение задачи
$P_t=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right),\quad r_1<r<r_2,\ \ 0<t,\qquad a^2=\frac{k_0}{\mu_0 m_0}\left(\frac{1}{K_m}+\frac{1}{K_\rho}\right)^{-1},$
$P(r_1,t)=P_1,\ \ P_r(r_2,t)+hP(r_2,t)=hP_0,\qquad h=\frac{\alpha\mu_0}{k_0},$
$P(r,0)=P_0,$

1.255. Указание. Исключить ρ и $\mathbf{V}$ из системы уравнений
$$m\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\mathbf{V}=0,\quad P=\rho TR,\quad \mathbf{V}=-\frac{k}{\mu}\nabla P.$$

1.256. $P_t=\frac{k}{2\mu m}\Delta P^2,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$
$P(0,t)=P_1(t),\quad P_x(l_1,t)=0,\quad P(x,0)=P_0.$

1.257. $Q=2\pi r_1 H\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$, где $P(r,t)$ — решение задачи
$$P_t=\frac{k}{2\mu m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial P^2}{\partial r},\quad r_1<r<r_2,\ \ 0<t,$$
$$P(r_1,t)=P_1,\quad P(r_2,t)=P_0,\quad P(r,0)=P_0.$$

1.258. $\mathbf{q}=-\frac{k\mathbf{e}_x}{2\mu RT}\frac{\partial P^2}{\partial x}\Big|_{x=0}$, где $P(x,t)$ — решение краевой задачи
$$\frac{d^2P^2}{dx^2}=0,\quad 0<x<l,$$
$$P^2(0)=P_1^2,\quad P^2(l)=P_2^2.$$

1.259. $\mathbf{q}=-\frac{k\mathbf{e}_r}{2\mu RT}\frac{\partial P^2}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$, где $P(r)$ — решение краевой задачи
$$\frac{d}{dr}r\frac{dP^2}{dr}=0,\quad r_1<r<r_2,$$
$$P(r_1)=P_1,\quad P_r(r_2)+hP(r_2)=hP_2,\ \ h=\frac{\alpha\mu}{k}.$$

1.260. Указание. Уравнение непрерывности и давление имеют вид:
$$m\frac{\partial\zeta}{\partial t}+div(\zeta+H_0)\mathbf{V}=0,\qquad P=\rho g(\zeta-z)+P_0.$$

1.261. $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\zeta^2}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,\qquad a^2=\frac{2\rho g}{\mu m},$
$\zeta(0,t)=h_1(t),\quad \zeta(l,t)=h_0,\quad \zeta(x,0)=h_0.$

1.262. $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\zeta^2}{\partial r},\quad r_1<r<r_2,\ \ 0<t,\qquad a^2=\frac{2\rho g}{\mu m},$
$\zeta(r_1,t)=h_1(t),\ \ \zeta(r_2,t)=h_0,\ \ \zeta(r,0)=h_0.$

1.263. $\frac{d^2\zeta^2}{dx^2}=0,\quad 0<x<l,$
$\zeta^2(0)=H^2,\quad \frac{\partial\zeta^2}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{2\mu q}{k\rho g}.$

1.264. $\frac{d}{dr}r\frac{d\zeta^2}{dr}=0,\quad r_1<r<r_2,$
$\zeta^2(r_1)=H^2,\quad \frac{\partial\zeta^2}{\partial r}\Big|_{r=r_1}=\frac{\mu Q}{\pi r_1 k\rho g}.$

1.265. Функция $L(t)$ — решение задачи Коши

$$m\frac{dL}{dt}=-\frac{k_1}{\mu_1}P_x(L-0,t),\quad 0<t,$$
$$L(0)=L_0,$$

$P(x,t)$ — решение задачи

$$P_{xx}(x,t)=0,\quad 0<x<L,\ \ L<x<l,$$
$$P(0,t)=P_1,\quad P(l,t)=P_2,$$
$$P(L-0,t)=P(L+0,t),\quad \frac{k_1}{\mu_1}P_x(L-0,t)=\frac{k_2}{\mu_2}P_x(L+0,t).$$

1.266. Функция $R(t)$ — решение задачи Коши

$$m\frac{dR}{dt}=-\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R},\quad 0<t,$$
$$R(0)=R_0,$$

$P(r,t)$ —решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial P}{\partial r}=0,\quad r_1<r<R,\ \ R<r<r_2,$$
$$P(r_1,t)=P_1,\quad P(r_2,t)=P_2,$$
$$P(R-0,t)=P(R+0,t),\quad \frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R-0}=\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R+0}.$$

1.267.
$$P_t=\frac{k}{2\mu m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial P^2}{\partial r},\qquad \frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial P^2}{\partial r}=0,$$
$$r_1<r<R,\ \ 0<t,\qquad R<r<r_2,\ \ 0<t,$$
$$P(r_1,t)=P_1,\ \ P(r_2,t)=P_0,$$
$$P(R-0,t)=P(R+0,t),\quad -m\frac{dR}{dt}=\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R-0}=\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R+0},$$
$$R(0)=R_0,\quad P(r,0)=P_0.$$

1.269. $\frac{\partial^2P^2}{\partial x^2}=\frac{2\mu}{k}\left[m+\frac{abRT}{(1+aP)^2}\right]\frac{\partial P}{\partial t},\quad 0<x,\ \ 0<t,$
$P(0,t)=P_1,\quad P(x,0)=P_0,\quad |P(x,t)|<\infty.$

1.270. $\frac{\partial^2P^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P^2}{\partial y^2}=\frac{2\mu}{k}\left[m+\frac{abRT}{(1+aP)^2}\right]\frac{\partial P}{\partial t},\quad 0<x,\ \ 0<y,\ \ 0<t,$
$$P(x,0,t)=P(0,y,t)=P_1,$$
$$P(x,y,0)=P_0,\quad |P(x,y,t)|<\infty.$$

1.271. $\frac{\partial^2P^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P^2}{\partial y^2}=\frac{2\mu}{k}\left[m+\frac{abRT}{(1+aP)^2}\right]\frac{\partial P}{\partial t},\quad 0<x,\ \ V_0t<y,\ \ 0<t,$
$$P(x,V_0t,t)=P(0,y,t)=P_1,$$
$$P(x,y,0)=P_0,\quad |P(x,y,t)|<\infty.$$

1.272. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{LC},$
$u(0,t) = E(t), \quad u_x(l,t) + LC_0 u_{tt}(l,t) = 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

Указание. Для вывода граничных условий нужно применить соотношение (1.105). Например, при $x_0 = l$ из него следует: $u(l,t) = \frac{1}{C_0}\int_0^\tau i(l,\tau)\,d\tau$.

1.273. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{LC},$
$u(0,t) - \frac{L_0}{L} u_x(0,t) = E(t), \quad u(l,t) = 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

Указание. При $x{=}0$ из (1.105) следует уравнение $-u(0,t) + E(t) = L_0 i_t(0,t)$, в которое нужно ввести функцию $u(x,t)$ вместо $i(x,t)$, используя систему телеграфных уравнений.

1.274. Постановка задачи имеет две формы:

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) + L\,C_0 u_{tt}(l,t) = 0,$
$u(x,0) = \begin{cases} \frac{q_o}{C_o}, & x = l, \\ 0, & 0 \le x < l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0, \quad a^2 = \frac{1}{LC}\,;$
2. $LC(x) u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$
$C(x)u(x,0) = q_0\delta(x-l), \quad u_t(x,0) = 0, \quad C(x) = C + C_0\delta(x-l).$

Указание. См. пример 1.4.

1.275. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + C_0 L u_{tt}(l,t) = -C_0 L E_0 \delta'(t),$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad a^2 = \frac{1}{LC}.$

1.276. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = E(t), \quad R_0 u_x(l,t) + Ru(l,t) = 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

1.277. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) - \frac{R}{R_1} u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \frac{R}{R_2} u(l,t) = -\frac{E(t)}{R_2},$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

1.278. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \beta\, u_t, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = E(t), \quad R_0 u_x(l,t) + Lu_t(l,t) + Ru(l,t) = 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad a^2 = \frac{1}{LC}, \;\; \beta = \frac{R}{L}.$

1.279. $u_t = \frac{1}{RC} u_{xx} - \frac{G}{C} u + \frac{q_0}{C}\,\delta(x - x_0)\cdot\delta(t), \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

1.280. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\beta u_t - \beta^2 u, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$L_0 u_{xt}(0,t) - L u_t(0,t) - R u(0,t) = -RE(t) - LE'(t),$
$R_0 u_x(l,t) + L u_t(l,t) + R u(l,t) = 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad a^2 = \frac{1}{LC}, \ \ \beta = \frac{R}{L},$

$E'(t)$ — обобщенная производная. В частном случае постоянной э.д.с. правая часть граничного условия при x=0 имеет вид: $-RE_0 - LE_0\delta(t)$.

Указание. В граничное условие (1.105) при $x_0 = 0$ входит функция $E(t)\,\eta(t)$.

1.281. $u_{tt} = \frac{1}{R_1 C_1} u_{xx}, \qquad u_{tt} = \frac{1}{R_2 C_2} u_{xx},$
$x < 0, \ \ 0 < t, \qquad 0 < x, \ \ 0 < t,$
$u(-0,t) = u(+0,t), \ \ \frac{1}{R_1} u_x(-0,t) = \frac{1}{R_2} u_x(+0,t),$
$u(x,0) = u_0(x).$

1.282. $q(t) = -C_0 u(0,t)$. Задача для функции $u(x,t)$ может быть поставлена либо в форме

1. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \ \ 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{LC},$

$$Ru_t(0,t) - u_x(0,t) = 0, \quad |u(x,t)| < \infty, \quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\frac{q_0}{C_0}, & x = 0, \end{cases}$$

либо в эквивалентной форме

2. $\begin{cases} u_x + L i_t = 0, \\ i_x + C u_t = 0, \end{cases} \qquad 0 < x, \ \ 0 < t,$
$-C_0 u(0,t) = q_0 + \int_0^t i(0,\tau)\,d\tau, \quad |u(x,t)| < \infty, \ \ |i(x,t)| < \infty,$
$u(0,t) = i(0,t) = 0.$

Замечание. Эффективным средством решения подобных задач является интегральное преобразование Лапласа. Для применения этого преобразования можно использовать форму 2 постановки задачи и необязательно исключать одну из неизвестных функций из системы уравнений, как это сделано в п.1. Задачи в п.1 и в п.2 поставлены в разных формах, в частности для того, чтобы подчеркнуть этот факт.

1.283. $i_t = a^2 i_{xx} + \beta\, i, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{RC}, \ \ \beta = \frac{G}{C},$
$i(0,t) = i_x(l,t) = 0, \ \ i(x,0) = -\frac{1}{R}\delta(x).$

1.284. $i_t = a^2 i_{xx} + \beta\, i, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{RC}, \ \ \beta = \frac{G}{C},$
$CR_0 i_t(0,t) - i_x(0,t) + GR_0 i(0,t) = CE_0\,\delta'(t) + GE_0,$
$C_0 i_{xt}(l,t) + C i_t(l,t) G\, i(l,t) = 0 \quad i(x,0) = 0.$

1.285. $i_{tt} = a^2 i_{xx} + \beta\, i_t, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{LC}, \ \ \beta = \frac{R}{L},$
1. $CR_0 i_t(l,t) + i_x(l,t) = C\,E'(t);$
$i_x(0,t) = 0, \quad$ 2. $CL_0 i_{tt}(l,t) + i_x(l,t) = C\,E'(t); \qquad i(x,0) = 0,$
3. $Ci(l,t) + C_0 i_x(l,t) = C\,C_0 E'(t);$

где $E'(t)$ — обобщенная производная, которая в частных случаях имеет следующий вид: 1. $E'(t)$=$E_0\omega\, cos\,\omega\, t$; 2. $E'(t)$=$E_0\delta(t)$.

1.286. $i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t, \quad a^2 = \frac{1}{LC},$
$i_x(0,t) = 0, \;\; i_x(l,t) + R_0 C i_t(l,t) = E_0 \delta(t), \quad i(x,0) = 0.$

1.287. $CLi_{tt} = i_{xx} - (RC + LG)i_t - RGi, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$i_x(0,t) - CR_0 i_t(0,t) - R_0 G i(0,t) = -GE(t) - CE'(t),$
$C_0 i_x(l,t) + Ci(l,t) + G\int_0^t i(l,\tau)\,d\tau = 0,$
$i(x,0) = i_t(x,0) = 0;$

$E'(t)$ — обобщенная производная.

1.288. $i_{tt} = \frac{1}{L_1 C_1} i_{xx}, \qquad i_{tt} = \frac{1}{L_2 C_2} i_{xx},$
$x < 0, \;\; 0 < t, \qquad 0 < x, \;\; 0 < t,$
$i(-0,t) = i(+0,t), \;\; \frac{1}{C_1} i_x(-0,t) = \frac{1}{C_2} i_x(+0,t),$
$i(x,0) = i_0(x), \;\; i_t(x,0) = \begin{cases} -\frac{1}{L_1} u_0'(x), & x < 0, \\ -\frac{1}{L_2} u_0'(x), & 0 < x. \end{cases}$

1.289. Указание. Уравнение для потенциала в случае непрерывной модели

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[C(u)u] = \frac{l^2}{L_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u + \frac{l^2}{12}\,u_{xx}\right)$$

после подстановки $u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$ и замены $\xi = \varepsilon^{\mu}(x - at)$, $\tau = \varepsilon^{3\mu} t$, где $a = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, преобразуется к виду

$$2a\varepsilon^{4\mu+1} u_{1\xi\tau} + a^2 \alpha \varepsilon^{2\mu+n+1} (u_1^{n+1})_{\xi\xi} + \frac{a^2 l^2}{12}\varepsilon^{4\mu+1} u_{1\xi\xi\xi\xi} + \ldots = 0.$$

Нелинейный и дисперсионный члены будут иметь одинаковый порядок при $\mu = n/2$ (см. пример 1.7.); этой ситуации соответствует уравнение

$$u_\tau + \frac{a\alpha(n+1)}{2} u^n u_\xi + \frac{al^2}{24} u_{\xi\xi\xi} = 0.$$

1.290. $\Delta u = -4\pi Q\,\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z-h), \qquad \Delta u = 0,$
$-\infty < x < 0, \qquad -\infty < x, y < \infty, \;\; z < 0,$
$u|_{z=+0} - u|_{z=-0} = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=+0} - \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-0} = 0,$
$u(x,y,z) \to 0 \quad \text{при} \;\; x^2 + y^2 + z^2 \to \infty.$

Частный случай:

$$\Delta u = 0, \;\; -\infty < x, y < \infty, \;\; z < 0, \;\; z > 0,$$
$$u|_{z=+0} - u|_{z=-0} = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=+0} - \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-0} = -4\pi Q\,\delta(x)\cdot\delta(y),$$
$$u(x,y.z) \to 0 \;\; \text{при} \;\; x^2 + y^2 + z^2 \to 0.$$

Указание. Второе граничное условие, связывающее предельные значения нормальных производных потенциала при z=0, выражает следующее свойство нормальной составляющей вектора электростатической индукции **D**: при переходе через заряженную двухстороннюю поверхность S (полная поверхностная плотность заряда σ) со стороны S_1 на сторону S_2 нормальная компонента D_n имеет разрыв первого рода $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$, где **n** — нормаль, направленная от S_1 к S_2.

1.291. $\Delta u = -4\pi q\,\delta(x)\cdot\delta(y-h)$, $\quad -\infty < x, z < +\infty,\ \ 0 < y,$ $\qquad \Delta u = 0,$ $\quad -\infty < x, z < +\infty,\ \ y < 0,$

$$u|_{y=+0} - u|_{y=-0} = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=+0} - \varepsilon_2\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=-0} = 0,$$

$$u(x,y) = \mathcal{O}(\ln(x^2+y^2)), \quad x^2+y^2 \to \infty.$$

Частный случай:

$$\Delta u = 0,\ \ -\infty < x < \infty,\ \ y < 0,\ \ y > 0,$$

$$u|_{y=+0} - u|_{y=-0} = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=+0} - \varepsilon_2\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=-0} = -4\pi q\delta(x),$$

$$u(x,y) = \mathcal{O}(\ln(x^2+y^2)), \quad x^2+y^2 \to \infty.$$

См. указание к предыдущей задаче.

1.292. $\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_1,\ \ r_1 < r < r_2,\ \ r_2 < r\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \theta < \pi$

$$u|_{r_1-0} = u|_{r_1+0}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_1-0} = \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_1+0},$$

$$u|_{r_2-0} = u|_{r_2+0}, \quad \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_2-0} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_2+0},$$

$$|u - E_0 r\cos\theta| < \infty.$$

1.293. $\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_1,\ \ r_1 < r < r_2,\ \ r_2 < r\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u|_{r_1-0} = u|_{r_1+0}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_1-0} = \mu\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_1+0},$$

$$u|_{r_2-0} = u|_{r_2+0}, \quad \mu\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_2-0} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_2+0},$$

$$|u - H_0 r\cos\varphi| < \infty.$$

1.294. $\Delta u = -4\pi\,\rho\,\eta(r_0 - r), \quad 0 < r,\ \ 0 < \theta < \pi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u|_{r_0-0} = u|_{r_0+0}, \quad \varepsilon_0\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0-0} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0+0}, \quad |u| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.295. $\Delta u = -4\pi\sigma(\theta,\varphi)\cdot\delta(r-r_0), 0 < r,\ \ 0 < \theta < \pi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$|u| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.296. В сферической системе координат, ось $0z$ которой направлена по вектору $\mathbf{P}$, потенциал $u(\mathbf{r})$ —решение задачи

$$\Delta u = -4\pi P\delta(r-r_0)\cos\theta,\ 0 < r,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(\mathbf{r}) = O(1),\ \mathbf{r} \to 0, \quad u(\mathbf{r}) \to 0, r \to \infty.$$

Указание. Плотность заряда на поверхности шара равна $P\cos\theta$.

1.297. $\Delta u = -4\pi\,Q\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \quad 0 < r,\ \ 0 < \theta < \pi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u|_{r_0-0} = u|_{r_0+0}, \quad \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0-0} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r_0+0}, \quad |u(0)| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.298. $\Delta u = -\frac{2Q}{r_0^2}\ \frac{\delta(r-r_0)}{r}\cdot\frac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta}, \quad 0 < r,\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$|u| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.299. Диск расположен в координатной плоскости $x0y$ и занимает область S, его центр совпадает с началом координат, $M(x,y,z) \in \mathbf{R^3}$; потенциал $u(x,y,z)$ — решение задачи

$$\Delta u(M)=0,\quad M\overline{\in}S,$$
$$u(M)|_{M\in S}=C,\ \ u(M)\to 0\ \text{ при }\ M\to\infty;$$

для определения константы C нужно найти потенциал $u(M)$ (он зависит от C), затем вычислить плотность заряда на диске

$$\sigma=\left(-\tfrac{1}{4\pi}\ \tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=+0}+\tfrac{1}{4\pi}\ \tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=-0}\right)\Big|_{(x,y)\in S}$$

и применить закон сохранения $\int_S \sigma\, ds = Q$. Указание. На сторонах S_1 и S_2 проводящей двусторонней поверхности S, находящейся в поле $\mathbf{E}$, индуцируется заряд, плотность которого $\sigma_1=\frac{E_n}{4\pi}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к S, направленная от S_2 к S_1 и т.д.

1.300. $\Delta u=-4\pi q\delta(x-d)\cdot\delta(y),\quad x^2+y^2+z^2>r_0^2,$
$$u(x,y,z)|_{x^2+y^2+z^2=r_0^2}=0,$$
$$u(x,y,z)=\mathcal{O}(ln(x^2+y^2)),\ \ x^2+y^2\to\infty.$$

1.301. В сферической системе координат, начало которой находится в центре сферы, а ось $0z$ проходит через диполь, потенциал $u(r,\theta,\varphi)$ является решением задачи

$$\Delta u=4\pi\, p\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}),\quad 0<r<r_0,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$u(r_0,\theta,\varphi)=0,\ \ |u|_{r=0}<\infty.$$

1.302. В сферической системе координат, начало которой находится центре шара, а ось $0z$ проходит через диполь, потенциал $u(r,\theta,\varphi)$ является решением задачи

$$\Delta u=4\pi\, p\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d})\quad r_0<r,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$u(r_0,\theta,\varphi)=0,\ \ \lim_{r\to\infty}u=0.$$

1.303. 1. $\Delta u=4\pi\,\delta(x)\cdot\delta'(y-h),\quad -\infty<x<\infty,\ \ 0<y,$

2. $\Delta u=4\pi\,\delta'(x)\cdot\delta(y-h),\quad -\infty<x<\infty,\ \ 0<y,$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,y)\to 0\ \text{ при }\ \to\infty.$$

1.304. $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M},\ \mathbf{B}=rot\mathbf{A}$ где (в сферической системе, ось $0z$, которой направлена по $\mathbf{M}$) $\mathbf{A}{=}A\mathbf{e}_\varphi$, A — решение задачи
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}-\frac{A}{r^2\sin^2\theta}=\frac{4\pi M\delta(r-r_0)\cdot\sin\theta}{r_0}$,
$A(\mathbf{r})=O(1)$, $r\to 0,\ \ a\to 0$, $r\to\infty$.
Указание. По поверхности шара течет ток, плотность которого $\mathbf{i}=-[\mathbf{e}_r\mathbf{V}]$.

1.305. $\mathbf{E}=-\nabla u$, где потенциал u — решение задачи (в сферической системе координат, ось $0z$, которой проходит через центр шара в направлении вектора $\mathbf{M}$) :

$$\Delta u=\tfrac{8\pi(2\varepsilon+1)\omega M}{3\varepsilon c},\ r<r_0,\quad \Delta u=0,\ r>r_0,$$
$$|u|<\infty,\qquad u\to 0,\ r\to\infty,$$
$$u(r_0-0)=u(r_0+0),$$
$$\varepsilon\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r_0-0}-\tfrac{4\pi(2\varepsilon+1)r_0\omega M}{3c}\sin^2\theta=\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r_0+0}.$$

Указание. Магнитное поле во вращающемся шаре отличается от поля в

неподвижном шаре на величину порядка $\frac{\omega r_0}{c} \ll 1$, которой можно пренебречь. Зависимость между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ устанавливается формулой Минковского

$$\mathbf{D} + \tfrac{1}{c}[\mathbf{vH}] = \varepsilon\big(\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}[\mathbf{vB}]\big),$$

которая при $v = 0$ переходит в $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$; потенциал и нормальная компонента $\mathbf{D}$ непрерывны на поверхности шара.

1.306. $\mathbf{E} = -\nabla u$, где потенциал u — решение задачи (в сферической системе координат, ось $0z$, которой проходит через центр шара в направлении вектора $\mathbf{M}$) :

$$\Delta u = \tfrac{16\pi\omega M}{3c},\ r < r_0, \quad \Delta u = 0,\ r > r_0,$$
$$|u| < \infty, \qquad u \to 0,\ r \to \infty,$$
$$u(r_0 - 0) = u(r_0 + 0),$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r_0-0} = \tfrac{8\pi r_0 \omega M}{3c}\sin^2\theta.$$

1.307. $\Delta u = 4\pi M \frac{\delta'(r-d)}{r^2} \cdot \frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin\theta} \cdot \delta(\varphi), \quad 0 < r,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u|_{r_0-0} = u|_{r_0+0}, \quad \mu_0 \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r_0-0} = \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r_0+0}, \quad |u| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.308. $\Delta u = 4\pi p(\varphi)\cdot\delta'(r - r_0), \quad 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$|u| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0.$$

1.309. 1. $\Delta u(M) = -4\pi q_0 \delta(M, P), \quad M \in \Omega,$
$u|_{\partial\Omega} = 0\,;$

2. $\Delta u(M) = -4\pi q_0 \delta(M, P), \quad M \in R^2/\overline{\Omega},$
$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |u(\infty)| < \infty.$

Указание. См.(10.16)

1.310. $\Delta u(M) = -4\pi q_0 \delta(M, P), \quad M \in R^2/\overline{\Omega},$

$$u|_{\partial\Omega} = C, \quad -\tfrac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial n}\, dl = q_1,$$

$$u(M) = \mathcal{O}(\ln r_M), \quad M \to \infty.$$

См. указание к задаче 1.313

1.311. $\mathbf{E} = \nabla u,\ \Delta u = -\pi D\delta(x)\delta(y)\delta''(z), \quad \lim\limits_{r\to\infty} u(\mathbf{r}) = 0.$

Указание. См.(10.16)

1.312. $\Delta u = 0, \quad r_0 < r,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u(r_0, \theta, \varphi) = 0, \quad \lim_{r\to\infty}(u + E_0 r\cos\theta) = 0.$$

Указание. Потенциал результирующего поля равен сумме потенциалов шара и внешнего поля: $u = v - E_0 r\cos\theta$; потенциал v шара стремится к нулю на бесконечности.

1.313. $\Delta u = -4\pi Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}), \quad r_0 < r,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u(r_0, \theta, \varphi) = \tfrac{Q}{d} + \tfrac{Q_0}{r_0}, \quad \lim_{r\to\infty} u(r, \theta, \varphi) = 0.$$

Указание. Для вычисления константы C, нужно определить потенциал u (он зависит от C), затем найти плотность заряда на поверхности шара

$\sigma = E_n/(4\pi)$ и записать закон сохранения заряда $\int_S \sigma\, ds = Q_0$. В данной ситуации можно поступить проще. Так как внутри проводника потенциал $u{=}C$, то его достаточно найти в какой-либо точке шара, например, в центре; в этом случае потенциал складывается из потенциала заряда на шаре (он равен $\frac{Q_0}{r_0}$) и потенциала точечного заряда (он равен $\frac{Q}{d}$).

1.314. $\Delta u = -4\pi q \frac{\delta(r-d)}{r} \cdot \delta(\varphi), \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$
$$|u|_{r=0} < \infty, \;\; u(r_0, \varphi) = 0.$$

1.315. $\Delta u = -4\pi q \frac{\delta(r-d)}{r} \cdot \delta(\varphi), \quad r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u|_{r=0} < \infty, \;\; u(r_0, \varphi) = 0, \;\; u(r, \varphi) = \mathcal{O}(1), \;\; r \to \infty.$

Указание. Потенциальная энергия системы должна быть минимальной. Если суммарный заряд Q (на единицу длины вдоль оси) цилиндра и нити не равен нулю, то на бесконечности потенциал $u = 2Q \ln \frac{1}{r}$, следовательно, потенциальная энергия бесконечно велика. Минимум потенциальной энергии (на единицу длины вдоль оси) достигается, если линейная плотность заряда (вдоль оси), индуцированного на цилиндре, $q_0 = -q$.

1.316. $\Delta u = -4\pi q \frac{\delta(r-d)}{r} \cdot \delta(\varphi), \quad r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u(r_0, \varphi) = C, \;\; u(r, \varphi) = 2(q_0 + q) \ln \frac{1}{r} + \mathcal{O}(1), \;\; r \to \infty.$

Указание. Потенциал поверхности проводящего цилиндра постоянен, а на больших расстояниях от оси $\sim 2q_0 \ln \frac{1}{r}$.

1.317. $\Delta u = 4\pi p\, \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta'(z-d), \quad -\infty < x, y < \infty, \;\; 0 < z,$
$$u(x, y, 0) = 0, \;\; u(x, y, z) = \mathcal{O}(1), \;\; z \to \infty.$$

1.318. $\mathbf{A} = A(x, y)\, \mathbf{e}_z, \;\; A(x, y)$ удовлетворяет уравнению
$$div(\tfrac{1}{\mu} \nabla A) = -\tfrac{4\pi}{c} J \quad .$$

1.320. В цилиндрической системе координат, ось $0z$ которой направлена по оси цилиндра, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r, \varphi)\, \mathbf{e}_z$, где функция $A(r, \varphi)$ — решение краевой задачи:
$$\Delta A = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$A|_{r_0+0} - A|_{r_0-0} = 0, \;\; \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0+0} - \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0-0} = -\tfrac{4\pi}{c} i(\varphi),$$
$$A(r, \varphi) = \mathcal{O}(1), \quad r \to 0, \quad A(r, \varphi) = \tfrac{2J}{c} \ln \tfrac{1}{r} + \mathcal{O}(1), \quad r \to \infty,$$
$$J = \textstyle\int_0^{2\pi} i(\varphi)\, d\varphi.$$

Указание. Если по гладкой границе S раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 течет ток, линейная плотность которого i, то тангенциальная составляющая магнитного поля разрывна на границе, при этом ее предельные значения (по разные стороны S) удовлетворяют на S условию :
$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \tfrac{4\pi i}{c},$$
где вектор $\mathbf{e}_i$, направленный по току, вектор нормали $\mathbf{e}_n$ к поверхности S

(он направлен из среды 1 в среду 2) и вектор $\mathbf{e}_\tau$, касательный к S, взаимно ортогональны и образуют правую тройку.

1.321. В в полярной системе координат векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = 0, \quad 0 < r < r_0,\ r_0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$A|_{r_0+0} - A|_{r_0-0} = 0, \quad \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0+0} - \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0-0} = -\tfrac{4\pi J}{cr_0}\delta(\varphi),$$
$$A(r,\varphi) = \mathcal{O}(1),\ r \to 0, \quad A(r,\varphi) = \tfrac{2J}{c}\ln\tfrac{1}{r} + \mathcal{O}(1), \quad r \to \infty.$$

См указание к решению предыдущей задачи.

1.322. В цилиндрической системе координат, ось которой направлена по оси цилиндра, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,z)\,\mathbf{e}_\varphi$ где скалярная функция $A(r,z)$ — решение задачи:

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial A}{\partial r} - \tfrac{A}{r^2} + \tfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < r_0,\ r_0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty,$$
$$A|_{r_0+0} - A|_{r_0-0} = 0, \quad \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0+0} - \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0-0} = -\tfrac{4\pi}{c}i(z), \quad |A(r,z)| < \infty.$$

Указание. Так как $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_x\sin\varphi + \mathbf{e}_y\cos\varphi$, то $\frac{d^2\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi^2} = -\mathbf{e}_\varphi$; см. также указание к решению задачи 1.320.

1.323. В полярной системе координат векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r)\,\mathbf{e}_\varphi$, где $A(r)$ — решение задачи:

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{dA}{dr} - \tfrac{A}{r^2} = -\tfrac{4\pi}{c}\rho\omega r, \quad 0 < r < r_0,$$
$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{dA}{dr} - \tfrac{A}{r^2} = 0, \quad r_0 < r,$$
$$A|_{r_0+0} - A|_{r_0-0} = 0, \quad \tfrac{dA}{dr}\big|_{r_0+0} - \tfrac{dA}{dr}\big|_{r_0-0} = 0, \quad |A(r)| < \infty.$$

См. указание к предыдущей задаче.

1.324. В цилиндрической системе координат, ось $0z$ которой направлена по оси цилиндра, плотность тока $\mathbf{i} = J\delta(z)\mathbf{e}_\varphi$, потенциал $\mathbf{A} = A(r,z)\,\mathbf{e}_\varphi$, где скалярная функция $A(r,z)$ — решение задачи:

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial A}{\partial r} - \tfrac{A}{r^2} + \tfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < r_0,\ r_0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty,$$
$$A|_{r_0+0} - A|_{r_0-0} = 0, \quad \tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial(rA)}{\partial r}\Big|_{r_0+0} - \tfrac{1}{\mu r}\,\tfrac{\partial(rA)}{\partial r}\Big|_{r_0-0} = \tfrac{4\pi J}{c}\delta z, \quad |A(r,z)| < \infty,$$
$$A(r,z) = \mathcal{O}(1), \quad r \to 0, \quad \lim_{r\to\infty} A(r,z) = 0.$$

Указание. Напряженность магнитного поля $\mathbf{dH}(M)$ в точке M, обусловленная элементарным током $\mathbf{dJ} = i\mathbf{dl}$, расположенным в точке P, определяется законом Био и Савара:

$$\mathbf{dH} = \tfrac{i}{c}\tfrac{[\mathbf{dJ}\,\mathbf{r}_{PM}]}{r_{PM}^3}.$$

Так как

$$\tfrac{[\mathbf{dJ}\,\mathbf{r}_{PM}]}{r_{PM}^3} = -[\mathbf{dJ}\nabla_M\tfrac{1}{r_{PM}}] = [\nabla_M\tfrac{1}{r_{PM}}\mathbf{dJ}[= rot_M\tfrac{\mathbf{dJ}}{r_{PM}},$$

то магнитное поле ограниченного замкнутого контура L с током J запишется в виде:

$$\mathbf{H} = \tfrac{J}{c}\int\limits_L rot\tfrac{\mathbf{dl}}{r_{PM}} = rot\left(\tfrac{J}{c}\int\limits_L\tfrac{dl}{r_{PM}} + \mathbf{A_0}\right) = rot\mathbf{A},$$

где

$$\mathbf{A} = \int\limits_L \frac{\mathbf{dl}}{r_{PM}} + \mathbf{A_0}, \quad \mathbf{A_0}\text{— постоянный вектор}$$

Интегральное слагаемое стремится к нулю при $M \to \infty$, поэтому для постоянных токов в ограниченных областях, можно принять $\mathbf{A_0} = 0$ (аналогично нормирован на бесконечности в трехмерном пространстве скалярный потенциал ограниченной системы зарядов). См. также указания к решению задач 1.320, 1.322.

1.325. В цилиндрической системе координат, ось $0z$ которой направлена по оси цилиндра, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где функция $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \qquad \Delta A = 0,$$
$$0 < r < r_0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$A|_{r_0-0} = A|_{r_0+0}, \qquad \tfrac{1}{\mu_1}\,\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0-0} = \tfrac{1}{\mu_2}\,\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0+0},$$
$$|A|_{\mathbf{r}\neq\mathbf{d}} < \infty, \quad A = \mathcal{O}(\ln r), \quad r \to \infty.$$

1.326. В цилиндрической системе координат, ось $0z$ которой направлена по оси цилиндра, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где функция $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \;\; 0 < r < r_0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|A|_{\mathbf{r}\neq\mathbf{d}} < \infty, \qquad \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r=r_0} = -\tfrac{2J}{cr_0}.$$

Указание. Магнитное поле $\mathbf{H}_1$ в полости ограничено; из граничного условия для нормальной составляющей вектора магнитной индукции на замкнутом контуре L (L — поперечное сечение цилиндрической поверхности) $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$ следует, что при $\mu_2 = \infty$ нормальная составляющая $H_{2n} = 0$ на L. Это означает, что L — силовая линия магнитного поля $\mathbf{H}_2$. Так как L — окружность, то поле с такой силовой линией эквивалентно полю некоторого тока J_1, параллельного оси цилиндра и проходящего через центр окружности. Из теоремы Стокса вытекает, что этот ток равен току J, поэтому $H_2(r_0) = \frac{2J}{cr_0}$ и, следовательно, $H_{1\tau}(r_0) = \frac{2J}{cr_0}$.

1.327. В цилиндрической системе координат, ось которой направлена по оси цилиндра, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где функция $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = \tfrac{4\pi J}{c}\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\right], \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0, \qquad |A|_{\mathbf{r}\neq\mathbf{r}_{1,2}} < \infty.$$

Указание. Линия L (см. предыдущую задачу) — силовая линия поля $\mathbf{H}_2$, циркуляция вдоль которой равна нулю.

1.328. В цилиндрической системе координат, ось которой направлена по оси цилиндра, ток $\mathbf{J} = J\mathbf{e}_z$, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где функция $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}), \quad r_0 < r, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r_0=0} = 0, \quad A(r,\varphi) = \mathcal{O}(\ln r), \quad r \to \infty.$$

Указание. Из ограниченности $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ следует, что при $\mu = \infty$ в цилиндре магнитное поле $\mathbf{H} = 0$.

1.329. 1. В цилиндрической системе координат, ось которой проходит через центр витка перпендикулярно к его плоскости, поверхностная плотность тока $\mathbf{i} = J\delta(r-r_0)\mathbf{e}_\varphi$, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где функция $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial A}{\partial r} - \tfrac{1}{r^2}A + \tfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < r_0, \ r_0 < r, \ 0 < z < \infty,$$
$$A|_{z=-0} - A|_{z=+0} = 0, \quad -\tfrac{1}{\mu}\,\tfrac{\partial A}{\partial z}\big|_{z=-0} + \tfrac{\partial A}{\partial z}\big|_{z=+0} = \tfrac{4\pi J}{c}\delta(r-r_0),$$
$$A = \mathcal{O}(1), \quad r \to 0, \qquad \lim_{r\to\infty} A = 0.$$

2. В сферической системе координат, ось $0z$ которой перпендикулярна к плоскости витка и проходит через его центр, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где функцияя $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial A}{\partial r} + \tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\tfrac{\partial A}{\partial\theta} - \tfrac{A}{\sin^2\theta} = 0,$$
$$0 < r < r_0, \ r_0 < r, \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$A|_{\theta=\frac{\pi}{2}+0} - A|_{\theta=\frac{\pi}{2}-0} = 0, \qquad \tfrac{\partial A}{\partial\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}+0} - \tfrac{1}{\mu}\,\tfrac{\partial A}{\partial\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\,0} = \tfrac{4\pi J}{c}\delta(r-r_0),$$
$$A(r,\theta) = \mathcal{O}(1), \quad r \to 0, \qquad \lim_{r\to\infty} A = 0.$$

См указания к задачам 1.320, 1.322.

1.330. В прямоугольной системе координат векторный потенциал $\mathbf{A} = A(x,y)\,\mathbf{e}_z$, где $A(x,y)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\delta(x)\cdot\delta(y-h), \qquad \Delta A = 0,$$
$$-\infty < x < 0, \ y > 0, \qquad -\infty < x < \infty, \ \ y < 0,$$
$$A|_{y=-0} = A|_{y=+0}, \quad \tfrac{1}{\mu}\,\tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=-0} = \tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=+0},$$
$$A = \mathcal{O}(\ln r), \ \ r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty.$$

1.331. В прямоугольной системе координат потенциал $\mathbf{A} = A(x,y)\,\mathbf{e}_z$, где скалярная функция $A(x,y)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\delta(x)\cdot\delta(y), \qquad \Delta A = 0,$$
$$-\infty < x < \infty, \ -h < y < h, \qquad \infty < x < \infty, \ h < |y|,$$
$$A(x,h-0) = A(x,h+0), \quad A(x,-h+0) = A(x,-h-0),$$
$$\tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=h-0} = \mu\tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=h+0}, \quad \tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=-h+0} = \mu\tfrac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=-h-0},$$
$$A(x,y) = \mathcal{O}(\ln r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty.$$

1.332. В цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с реб-

ром двугранного угла, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, где функция $A(r,\varphi)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\tfrac{4\pi J}{c}\,\tfrac{\delta(r-r_0)}{r_0}\cdot\delta(\varphi-\varphi_0),\ \ 0<r,\ 0<\varphi<\alpha,$$
$$A=\mathcal{O}(1),\ r\to 0,\ \ \tfrac{\partial A}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0}=\tfrac{\partial A}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\alpha}=0,\ \ \lim_{r\to\infty}\tfrac{A}{\ln r}=-\tfrac{4\pi J}{c\alpha}.$$

См. указание к задаче 1.328.

1.333. В сферической системе координат, центр которой совпадает с центром витка, линейная плотность тока $\mathbf{i} = J\frac{\delta(r-r_0}{r}\cdot\delta(\theta-\frac{\pi}{2})$, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где скалярная функция $A(r,\theta)$ — решение задачи

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{e}_\varphi\,\tfrac{4\pi J}{c}\,\tfrac{\delta(r-r_1)}{r}\cdot\tfrac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta},$$
$$A=\mathcal{O}(1),\ \ r\to 0,\ \ \lim_{r\to\infty}A=0.$$

См. указание к задаче 1.322.

1.334. В сферической системе координат, начало которой находится в центре сферы, а ось $0z$ перпендикулярна к плоскости витка, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где скалярная функция $;A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{e}_\varphi\,\tfrac{4\pi J}{c}\,\tfrac{\delta(r-r_1)}{r}\cdot\tfrac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta},\qquad \Delta\mathbf{A}=0,$$
$$0<r<r_0,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\qquad r_0<r,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$A=\mathcal{O}(1),\ \ r\to 0,\qquad \lim_{r\to\infty}A=0,$$
$$A|_{r_0-0}=A|_{r_0+0},\qquad \tfrac{\partial(rA)}{\partial r}\Big|_{r_0-0}=\tfrac{1}{\mu_0}\,\tfrac{\partial(rA)}{\partial r}\Big|_{r_0+0}.$$

См. указание к задаче 1.322.

1.335. В сферических координатах векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где функция $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial A}{\partial r}+\tfrac{1}{r^2\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\tfrac{\partial A}{\partial\theta}-\tfrac{A}{r^2\sin^2\theta}=-\tfrac{4\pi J}{c}\,\tfrac{\delta(r-r_1)}{r}\cdot\delta(\theta-\tfrac{\pi}{2}),$$
$$r_0<r,\ \ 0<\theta<\pi,$$
$$\tfrac{\partial(rA)}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=0,\qquad \lim_{r\to\infty}A=0.$$

См. указание к задаче 1.322.

1.336. В сферических координатах векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где функция $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial A}{\partial r}+\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\tfrac{\partial A}{\partial\theta}-\tfrac{A}{\sin^2\theta}=0,$$
$$r_0<r,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$A|_{r=r_0+0}-A|_{r=r_0-0}=0,\quad \tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r=r_0+0}-\tfrac{\partial A}{\partial r}\big|_{r=r_0-0}=\tfrac{4\pi r_0 i(\theta)}{c},$$
$$|A|<\infty,\quad \lim_{r\to\infty}A=0.$$

См. указание к задаче 1.322.

1.337. В сферической системе координат, начало корой находится в центре шара, а ось $0z$ направлена по оси вращения, векторный потенциал $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где функция $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{A}{\sin^2\theta} = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega sin\theta,$$
$$r < r_0,\quad 0 < \theta < \pi,$$
$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{A}{\sin^2\theta} = 0,$$
$$r_0 < r,\quad 0 < \theta < \pi,$$
$$A|_{r=r_0+0} - A|_{r=r_0-0} = 0,\quad \frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=r_0-0} = \frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=r_0+0},$$
$$A = \mathcal{O}(1),\quad r\to 0,\quad \lim_{r\to\infty} A = 0.$$

См. указание к задаче 1.322.

1.338. В сферической системе координат $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, где скалярная функция $A(r,\theta)$ — решение задачи:

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{A}{\sin^2\theta} = 0,$$
$$0 < r < r_0,\ r_0 < r,\ \ 0 < \theta < \pi,$$
$$A|_{r=r_0+0} - A|_{r=r_0-0} = 0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=r_0+0} - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=r_0-0} = \frac{4\pi J}{c}\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{r_0},$$
$$A = \mathcal{O}(1),\quad r\to 0,\qquad \lim_{r\to\infty} A = 0.$$

1.339.
$$rot\,\mathbf{H} = 0,\quad div\,\mathbf{H} = 0,\qquad -\infty < x < \infty,\quad y \neq 0,$$
$$H_y|_{y=+0} - H_y|_{y=-0} = 0,\quad H_x|_{y=+0} - H_x|_{y=-0} = -\frac{4\pi J}{c}\delta(x),$$
$$\lim_{r\to\infty}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0.$$

См. указания к решению задачи 1.320.

1.340. 1. Магнитное поле $\mathbf{H}(x,y) = H_x(x,y)\mathbf{e}_x + H_y(x,y)\mathbf{e}_y$ равно нулю вне зазора, а в зазоре

$$\Delta H_x(x,y) = -\frac{4\pi J}{c}\delta(x)\cdot\delta'(y-y_0),\qquad \Delta H_y(x,y) = \frac{4\pi J}{c}\delta'(x)\cdot\delta(y-y_0),$$
$$-\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < h,\qquad -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < h,$$
$$H_x(x,0) = H_x(x,h) = 0,\qquad \frac{\partial H_y}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial H_y}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} H_x(x,y) = 0,\qquad \lim_{x\to\pm\infty} H_x(x,y) = \pm\frac{2\pi J}{ch}.$$

2. Векторный потенциал $\mathbf{A}(x,y) = A(x,y)\,\mathbf{e}_z$, где скалярная функция $A(x,y)$ — решение задачи:

$$\Delta A = -\frac{4\pi J}{c}\delta(x)\cdot\delta(y-y_0),\quad -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < h,$$
$$\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0,\quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{A(x,y)}{|x|} = -\frac{2\pi J}{ch}.$$

Указание. 1. Граничные условия для H_y вытекают из уравнения $div\mathbf{H} = 0$ и из граничных условий для H_x (см. указание к задаче 1.322). При $|x|\to\infty$ составляющая H_x магнитного поля стремится к нулю, поэтому циркуляция

вектора $\mathbf{H}$ по окружности достаточно большого радиуса с центром в начале координат равна $\Gamma = 2hH_y = \frac{4\pi J}{c}$. 2. Уравнение и граничные условия для $A(x,y)$ получены в примере 1.22., поведение на бесконечности следует из соотношения $\frac{\partial A}{\partial y} = -H_y(x,y)$.

1.341.
$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{cases} \mathbf{H}_1(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ \mathbf{H}_2(x,y), & (x,y) \overline{\in} \Omega, \end{cases}$$
$$rot\,\mathbf{H} = 0, \quad div\,\mathbf{H} = 0, \quad (x,y) \overline{\in} S,$$
$$H_{2n}|_S - H_{1n}|_S = 0, \;\; H_{2\tau}|_S - H_{1\tau}|_S = -\tfrac{4\pi NJ}{c}, \;\; \lim_{r\to\infty} \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = 0,$$

$\mathbf{e}_\tau$ и $\mathbf{e}_n$ — единичные векторы соответственно касательной и внешней нормали к S, при этом единичный вектор тока $\mathbf{e}_i$, вектор $\mathbf{e}_n$ и вектор $\mathbf{e}_\tau$ взвимно ортогональны и образуют правую тройку. (См. указание к задаче 1.320). В частном случае круглого соленоида

$$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}, \;\; \mathbf{A} = A(r)\mathbf{e}_\varphi,$$

где функция $A(r)$ — решение задачи для обыановенного дифференциального уравнения

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr} r \tfrac{dA}{dr} - \tfrac{A}{r^2} = -\tfrac{4\pi NJ}{c}\delta(r - r_0),$$
$$A(r) = \mathcal{O}(1), \;\; r \to 0, \qquad \lim_{r\to\infty} A(r) = 0.$$

1.342. $\mathbf{j} = -\nabla u$, u — решение задачи:

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta u = -\tfrac{J}{c}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}),$$
$$0 < r < r_0, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad r_0 < r, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|u| < \infty, \qquad \lim_{r\to\infty} u = 0,$$
$$u|_{r=r_0+0} = u|_{r=r_0-0}, \quad \sigma_2 \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0+0} = \sigma_1 \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0-0}.$$

Указание. Условия на поверхности шара (т.е. при $r = r_0$) выражают непрерывность потенциала $u(\mathbf{r})$ электростатического поля и закон сохранения заряда соответственно.

1.343. $\mathbf{j} = -\nabla u$, u — решение задачи:

$$\Delta u = -\tfrac{J}{c}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}), \qquad \Delta u = 0,$$
$$0 < r < r_0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad r_0 < r, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\left|u - \tfrac{J}{2\pi}\ln\tfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}\right| < \infty, \;\; |u| < \infty, \qquad u(r,\varphi) = \mathcal{O}(\ln r), \;\; r \to \infty,$$
$$u|_{r=r_0+0} = u|_{r=r_0-0}, \quad \sigma_2 \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0+0} = \sigma_1 \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0-0}.$$

1.344. $\mathbf{j}(x,y) = -\sigma\nabla u(x,y)$,

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x, \; -H < y < H,$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=-H} = \tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=H} = 0, \;\; u(x,y) = \mathcal{O}(lnx), \;\; x \to +\infty.$$

1.345. $\mathbf{j}(x,y) = -\sigma\nabla u(x,y)$,

$$\Delta u = -\tfrac{J}{\sigma}\delta(x)\cdot\delta(y-y_0),\quad -\infty<x<\infty,\ \ 0<y<H,$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=H} = 0,\ \ u(x,y)=\mathcal{O}(x),\ \ x\to\infty.$$

1.346. $\Delta u = 0,\quad |x|<l_1,\ \ |y|<l_2,$
$$\tfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\pm l_1} = -\tfrac{J}{\sigma h}\delta(y),\quad \tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pm l_2} = 0.$$

1.347. $\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial u}{\partial r} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0,\quad 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$
$$|u|_{r=0}<\infty,\quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = -\tfrac{J}{\sigma r_0}(\delta(\varphi)-\delta(\varphi-\pi)).$$

1.348. $\mathbf{j} = -\sigma\nabla u$, скалярный потенциал $u(x,y)$ — решение задачи:
$$\Delta u = 0,\ \ 0<x<l,\ 0<y<l-x,$$
$$u(0,y)=u(x,0)=0,\ \ \tfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\,(\tfrac{\partial u}{\partial x}+\tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x+y=l}.$$

1.349. $\Delta u = -\tfrac{J}{\pi\sigma}\tfrac{\delta(r)}{r},\quad 0<r<r_0,\quad 0<\varphi<\pi,$
$$\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = -\tfrac{J}{\sigma r_0}\delta\left(\varphi-\tfrac{\pi}{2}\right),\ \ \tfrac{\partial u}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0} = \tfrac{\partial u}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=\pi} = 0.$$

Указание. Уравнение для электростатического потенциала вытекает из системы уравнений:
$$rot\mathbf{E}=0,\ \ \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E},\ \ div\mathbf{j}=q,$$
где q — объемная плотность источников тока (последнее уравнение — следствие закона сохранения (1.31)).

1.350. $\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}r\tfrac{\partial u}{\partial r} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -\tfrac{J}{\sigma}\tfrac{\delta(r-r_1)}{r_1}\cdot[\delta(\varphi)-\delta(\varphi-\pi)],$
$$0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$|u|_{r=0}<\infty,\quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0}=0.$$

1.351. $\Delta u = 0,\quad 0<r<r_0,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad |z|<l,$
$$|u|_{r=0}<\infty,\quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0}=0,\quad \tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=\pm l} = -\tfrac{J}{\sigma}\tfrac{\delta(r)}{2\pi r}.$$

1.352. $\Delta u = 0,\quad 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ |z|<\infty,$
$$|u|_{r=0}<\infty,\quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \tfrac{J}{\sigma r_0}(\delta(\varphi)-\delta(\varphi-\pi))\cdot\delta(z).$$

1.353. $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u,\quad \Delta u=0,\quad 0<r<r_0,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$
$$|u|_{r=0}<\infty,\quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = \tfrac{J}{2\pi\sigma r_0^2}\left[\tfrac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta}-\tfrac{\delta(\theta)}{\sin\theta}\right].$$

1.354. $\Delta u = 0,\quad r<r_0,\ \ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi<2\pi,$
$$\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = -\tfrac{J}{2\pi r_0^2\sigma}\tfrac{\delta(\theta)}{\sin\theta},\ \ \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u}{\partial\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \tfrac{J}{2\pi\sigma}\tfrac{\delta(r)}{r}.$$

1.355. $\tfrac{1}{r_0^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad 0\le\varphi<2\pi,\ 0<z,$
$$\tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=0} = -\tfrac{J}{\sigma r_0}\delta(\varphi-\varphi_0),\quad \tfrac{\partial u}{\partial z}=\mathcal{O}(1),\ \ z\to\infty.$$

1.356. $\tfrac{1}{r_0^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\tfrac{J}{\sigma r_0}\delta(\varphi)\cdot\delta(z),\quad 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<\infty,$
$$u(\varphi,z)=\mathcal{O}(z),\ \ z\to\infty.$$

1.357. $\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{J}{\sigma r_0}\delta(\varphi)\cdot\delta(z),\quad 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<\infty,$
$\frac{\partial u}{\partial z}\big|_{\varphi=0}=\frac{\partial u}{\partial z}\big|_{\varphi=\pi}=0,\ \ u(\varphi,z)=\mathcal{O}(z),\ \ z\to\infty.$

1.358. $\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{J}{\sigma r_0}\delta(z)\cdot\delta(\varphi-\frac{\pi}{2}),\quad -l<z<l,\ \ 0<\varphi<\pi,$
$u(z,0)=u(z,\pi)=0,\quad u_z(\pm l,\varphi)=0,$

$$\mathbf{i}=-\sigma\left(\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1.165}$$

1.359. $\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{J}{\sigma r_0}\delta(z)\cdot\delta(\varphi-\frac{\pi}{2}),\quad -\infty<z<\infty,\ \ 0<\varphi<\pi,$
$u(z,0)=u(z,\pi)=0,\quad u(z,\varphi)=\mathcal{O}(1),\ \ z\to\infty.$
Плотность тока выражается формулой (1.165).

1.360. $\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad 0\le\varphi<2\pi,\ 0<z<l,$
$u|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=l}=\frac{J}{\sigma r_0}\delta(\varphi).$
Плотность тока выражается формулой (1.165).

1.361. Плотность тока

$$\mathbf{i}=-\sigma\left(\mathbf{e}_\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right), \tag{1.166}$$

где u — решение задачи
$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+z\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\frac{J}{\sigma}\left[\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta}-\frac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta}\right]\cdot\frac{\delta(\varphi)}{2\pi},$
$0<\theta<\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,$

1.362. $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\frac{J}{2\pi}\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta},\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi<2\pi,$
$\frac{\partial u}{\partial\theta}\big|_{\theta\frac{\pi}{2}}=-\frac{J}{\sigma}\delta(\varphi).$

Плотность тока выражается формулой (1.166).

1.363. $\mathbf{H}=(0,0,H_z),\qquad \mathcal{H}_{xx}-2ip^2\mathcal{H}=0,\quad -l<x<l,\quad p^2=\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2},$
$H_z(x,t)=\mathcal{H}(x)\,e^{i\,\omega\,t},\quad \mathcal{H}(-l)=\mathcal{H}(l)=\mathcal{H}_0.$

1.364. $\mathbf{j}=(0,j_\varphi,0),\ \ j_\varphi-\frac{c}{4\pi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r}e^{i\,\omega\,t},\quad \mathbf{H}=(0,0,H_z),\ H_z(r,t)=\mathcal{H}(r)\,e^{i\,\omega\,t},$
$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r}-2ip^2\mathcal{H}=0,\quad 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\quad p^2=\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2},$
$|\mathcal{H}|<\infty,\ \ \mathcal{H}|_{r=r_0}=\mathcal{H}_0.$

1.365. $\mathbf{H}=H(r,t)\,\mathbf{e}_z,\qquad H_t=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial H}{\partial r},\quad 0<r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<t,$
$|H|<\infty,\quad H(r_0,t)=H_0,\quad H(r,0)=0,\quad a^2=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}.$

1.366. $\mathbf{H}=H(z,t)\,\mathbf{e}_x,\qquad H_t=a^2\frac{\partial^2 H}{\partial z^2},\quad 0<z,\ \ 0<t,\ \ a^2=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu},$
$|H|<\infty,\quad H(z,0)=0,\quad H(0,t)=H_0.$

1.367. $j(z,t)=\sigma\mathcal{E}(z)\,e^{i\omega t},\qquad \frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2}-2ip^2\mathcal{E}=0,\ \ 0<z,$
$\frac{d\mathcal{E}}{dz}\big|_{z=0}=-\frac{2ip^2J}{\sigma},\quad |\mathcal{E}(z)|<\infty.\quad p^2=\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}.$

Решение. В данном случае $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(z)\, e^{i\omega t}$, $\mathbf{E} = \mathcal{E}(z)\, e^{i\omega t}$, $\mathbf{H} = \mathcal{H}(\mathbf{z})\, e^{i\omega t}$. Так как токами смещения можно пренебречь, то (см.(1.106), (1.107))

$$\begin{array}{l} rot\mathcal{E} = -\frac{i\omega\mu}{c}\mathcal{H}, \\ rot\mathcal{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0, \;\; \mathbf{j}_0 = \sigma\mathcal{E}. \end{array} \tag{1.167}$$

Подстановка $\mathcal{E} = \mathcal{E}(z)\, \mathbf{e}_x$ в первое уравнение системы (1.167) дает

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(z)\, \mathbf{e}_y = \frac{ic}{\mu\,\omega}\frac{d\mathcal{E}(z)}{dz}\mathbf{e}_y. \tag{1.168}$$

Пусть Π=$(y_0 < y < y_0 + 1,\ 0 < z < \infty)$, где y_0 — любое число. По условию $\int\limits_{\Pi} j_0 ds$=J. Следовательно, $j_0(z)$=$\mathcal{E}(z)/\sigma \to 0$ при $z \to \infty$. Так как $\mathcal{E}(z) \to 0$ монотонно, то согласно (1.168) $\mathcal{H}(\infty)$=0. По теореме Стокса

$$\tfrac{4\pi}{c}\int\limits_{\Pi}(\mathbf{j}_0\, \mathbf{e}_x)ds = \int\limits_{\Pi}(rot\mathcal{H}\, \mathbf{e}_x)\, ds = \int\limits_{\partial\Pi} \mathcal{H}_l\, dl = \mathcal{H}(0),$$

что приводит к граничному условию

$$\mathcal{H}(0) = \tfrac{4\pi}{c}J = \tfrac{ic}{\mu\,\omega}\,\tfrac{d\mathcal{E}}{dz}\big|_{z=0}.$$

Уравнение для $\mathcal{E}(z)$ есть результат исключения $\mathbf{j}_0$ и $\mathcal{H}$ из системы (1.167).

1.368. $j(z,t) = \sigma\mathcal{E}(z)\, e^{i\omega t}$, $\quad \frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2} - 2ip^2\mathcal{E} = 0,\ \ |z| < l,$
$\frac{d\mathcal{E}}{dz}\big|_{z=0} = -\frac{ip^2 J}{\sigma},\quad p^2 = \frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}$

1.369. $j = \sigma\mathcal{E}e^{i\omega t}$, $\quad \Delta\mathcal{E} - 2p^2 i\mathcal{E} = 0,\quad 0 < r < r_0,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial r}\big|_{r=r_0} = i\frac{p^2 J}{\sigma r_0},\quad |\mathcal{E}| < \infty,\quad p^2 = \frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}.$

1.370. 2.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = E, \\ E + \frac{1}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = n - n_e. \end{array} \tag{1.169}$$

3. При $n = n_e$ (в безразмерных переменных) система (1.169) сводится к следующим двум уравнениям

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x} = 0. \tag{1.170}$$

Указание. Первое уравнение системы (1.169) представляет собой закон сохранения ионов (уравнение непрерывности). Последнее уравнение имеет вид $div\mathcal{E} = -4\pi\rho$ (уравнение Пуассона). Второе уравнение выражает второй закон Ньютона для ионов; из этого уравнения, а также из аналогичного уравнения для электронов

$$n_e m_e \tfrac{dv_e}{dt} = -en_e E - \tfrac{\partial p_e}{\partial x}$$

и из условия равенства нулю плотности тока $j = e(Znv - n_e v_e)$ вытекает (с учетом малости m_e/m) третье уравнение системы.

1.371.

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial n}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \\ &\tfrac{\partial v}{\partial t} + v\tfrac{\partial v}{\partial x} + \tfrac{1}{n}\tfrac{\partial n}{\partial x} = -E, \\ &\tfrac{\partial E}{\partial x} = 1 - n. \end{aligned} \tag{1.171}$$

1.372. Указание. При $n = 1 + \varphi$, $n_e = 1 + \varphi_e$, $|\varphi| \ll 1$, $|\varphi_e| \ll 1$ из линеаризованной системы (1.169) следует, что φ удовлетворяет уравнению $\varphi_{ttxx} + \varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 0$, решением которого является

$$\varphi^{i(kx-\omega t)}, \quad \omega = k(1+k^2)^{-1/2}.$$

Замена переменных $\xi = \varepsilon^{\mu}(x - t)$, $\tau = \varepsilon^{3\mu}t$ (пример 1.7.) преобразует систему (1.169) к виду

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{3\mu}\tfrac{\partial n}{\partial \tau} - \varepsilon^{\mu}\tfrac{\partial n}{\partial \xi} + \varepsilon^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial \xi}(nv) = 0. \\ &\varepsilon^{3\mu}\tfrac{\partial v}{\partial \tau} - \varepsilon^{\mu}\tfrac{\partial v}{\partial \xi} + \varepsilon^{\mu} v\tfrac{\partial v}{\partial \xi} = E, \\ &n_e E + \varepsilon^{\mu}\tfrac{\partial n_e}{\partial \xi} = 0, \\ &\varepsilon^{\mu}\tfrac{\partial E}{\partial \xi} = n - n_e. \end{aligned} \tag{1.172}$$

Решение системы должно удовлетворять условиям

$$n \to 1, \quad n_e \to 1, \quad v \to 0, \quad E \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,$$

поэтому разложения по малому параметру ε, применяемые в теории возмущений, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \\ n_e &= 1 + \varepsilon n_{e1} + \varepsilon^2 n_{e2} + \dots, \\ v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots; \end{aligned}$$

для функции E, в соответствии с третьим уравнением системы (1.172), получается разложение $E = \varepsilon^{\mu}(\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots$. Подстановка полученных разложений для функций n, n_e, v, E в уравнения системы (1.172) показывает, что $\mu = 1/2$, $n_1 = n_{1e}$ (это вытекает из последнего уравнения); равенство нулю коэффициентов при ε^2 определяет $v_1{=}n_1$, $E_1{=} -\partial n_1/\partial\xi$, равенство нулю коэффициентов при ε^3 приводит к уравнению КдФ

$$\tfrac{\partial n_1}{\partial \tau} + n_1\tfrac{\partial n_1}{\partial \xi} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^3 n_1}{\partial \xi^3} = 0.$$

1.373. $\mathbf{E} = \mathcal{E}\, e^{i\omega t}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}\, e^{i\omega t}$, $\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathcal{E} = 0$, $div\mathcal{E} = 0$, $\mathcal{H} = \frac{ic}{\omega} rot\,\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\tau|_S = 0$.

Указание. Подстановка $\mathcal{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $\mathcal{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ в уравнения (1.106), (1.107) приводит к системе

$$\begin{aligned} &rot\mathcal{H} = \tfrac{i\omega}{c}\mathcal{E}, && div\,\mathcal{H} = 0, \\ &rot\mathcal{E} = -\tfrac{i\omega}{c}\mathcal{H}, && div\,\mathcal{E} = 0, \end{aligned} \tag{1.173}$$

к которой нужно присоединить граничные условия: на поверхности S резо-

натора равны нулю тангенциальная составляющая $\mathcal{E}$ и нормальная составляющая $\mathcal{H}$, т.е.

$$\mathcal{E}_\tau|_S = 0, \quad \mathcal{H}_n|_S = 0. \tag{1.174}$$

Остается исключить $\mathcal{H}$ из системы (1.173).

1.374. Указание к п.1. Векторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла. Решение п.2. В координатах (q_1, q_2, q_3) система уравнений $rot\mathcal{H} = ik\mathcal{E}$, $rot\mathcal{E} = -ik\mathcal{H}$, где $k = \omega/c$, запишется в виде

$$\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3\mathcal{H}_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2\mathcal{H}_2)\right] = ik\mathcal{E}_1, \tag{1.175}$$

$$\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1\mathcal{H}_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3\mathcal{H}_3)\right] = ik\mathcal{E}_2, \tag{1.176}$$

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2\mathcal{H}_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1\mathcal{H}_1)\right] = ik\mathcal{E}_3, \tag{1.177}$$

$$\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3\mathcal{E}_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2\mathcal{E}_2)\right] = -ik\mathcal{H}_1, \tag{1.178}$$

$$\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1\mathcal{E}_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3\mathcal{E}_3)\right] = -ik\mathcal{H}_2, \tag{1.179}$$

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2\mathcal{E}_2) - \frac{\partial}{\partial/q_2}(h_1\mathcal{E}_1)\right] = -ik\mathcal{H}_3. \tag{1.180}$$

При $\mathcal{H}_1 = 0$ уравнение (1.178)

$$\tfrac{\partial}{\partial q_2}(h_3\mathcal{E}_3) = \tfrac{\partial}{\partial q_3}(h_2\mathcal{E}_2)$$

првращается в тождество, если ввести функцию w следующим образом:

$$\mathcal{E}_2 = \tfrac{1}{h_2}\tfrac{\partial w}{\partial q_2}, \quad \mathcal{E}_3 = \tfrac{1}{h_3}\tfrac{\partial w}{\partial q_3}.$$

Чтобы удовлетворить уравнениям (1.176) и (1.177), которые принимают вид

$$-\tfrac{\partial}{\partial q_1}(h_3\mathcal{H}_3) = \tfrac{ikh_3}{h_2}\tfrac{\partial w}{\partial q_2}, \quad \tfrac{\partial}{\partial q_1}(h_2\mathcal{H}_2) = \tfrac{ikh_2}{h_3}\tfrac{\partial w}{\partial q_3},$$

достаточно положить $w = \frac{\partial u}{\partial q_1}$,

$$\mathcal{H}_2 = \tfrac{ik}{h_3}\tfrac{\partial u}{\partial q_3}, \quad \mathcal{H}_3 = -\tfrac{ik}{h_2}\tfrac{\partial u}{\partial q_2}.$$

При этом

$$div\mathcal{H} = \tfrac{1}{h_2h_3}\left[\tfrac{\partial}{\partial q_2}(h_3\mathcal{H}_2) + \tfrac{\partial}{\partial q_3}(h_2\mathcal{H}_3)\right] = \tfrac{ik}{h_2h_3}\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial q_2\partial q_3} - \tfrac{\partial^2 u}{\partial q_3\partial q_2}\right) = 0.$$

Из уравнения (1.175) следует, что

$$\mathcal{E}_1 = -\tfrac{1}{h_2h_3}\left[\tfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\tfrac{h_3}{h_2}\tfrac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \tfrac{\partial}{\partial q_3}\left(\tfrac{h_2}{h_3}\tfrac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Такой же результат получается из уравнения $div\mathcal{E} = 0$. Оставшиеся уравнения (1.179) и (1.180) преобразуются к виду

$$\frac{\partial F}{\partial q_3}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial q_2}=0,$$

где

$$F=\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}+\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]+k^2u.$$

Таким образом, если u — решение уравнения $F=0$, то $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, определенные посредством функции u, удовлетворяют уравнениям (1.179) и (1.180). Введение функции v для поля магнитного типа осуществляется аналогично.

1.375. Поле электрического типа $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,\mathcal{E}_z)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,0)$:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{E}_r=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}, & \mathcal{E}_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial z}, & \mathcal{E}_z=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u,\\ \mathcal{H}_r=\frac{ik}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, & \mathcal{H}_\varphi=-ik\frac{\partial u}{\partial r}, & \mathcal{H}_z=0,\end{array}\tag{1.181}$$

где u — решение задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+k^2u=0,\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<z<l,$$
$$|u(r,\varphi,z)|<\infty,\ \ u(r,\varphi+2\pi,z)=u(r,\varphi,z),$$
$$u(r_0,\varphi,z)=u_z(r,\varphi,0)=u_z(r,\varphi,l)=0.$$

Поле магнитного типа $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,0)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,\mathcal{H}_z)$:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{E}_r=-\frac{ik}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, & \mathcal{E}_\varphi=-ik\frac{\partial v}{\partial r}, & \mathcal{E}_z=0,\\ \mathcal{H}_r=\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial z}, & \mathcal{H}_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\partial z}, & \mathcal{H}_z=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v,\end{array}\tag{1.182}$$

где v — решение задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v+k^2v=0,\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<z<l,$$
$$|v(r,\varphi,z)|<\infty,\ \ v(r,\varphi+2\pi,z)=v(r,\varphi,z),\quad .$$
$$v_r(r_0,\varphi,z)=v(r,\varphi,0)=v(r,\varphi,l)=0.$$

1.376. Поле электрического типа $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,\mathcal{E}_z)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,0)$: компоненты векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ выражаются через функцию u по формулам (1.181), u — решение задачи

$$\Delta u+k^2u=0,\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<\alpha,\ \ 0<z<l,$$
$$|u(r,\varphi,z)|<\infty,\ \ u(r_0,\varphi,z)=u_z(r,\varphi,0)=u_z(r,\varphi,l)=0,$$
$$u(r,0,z)=u(r,\alpha,z)=0.$$

Поле магнитного типа $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,0)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,\mathcal{H}_z)$: компоненты векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ выражаются через функцию v по формулам (1.182), v — решение задачи

$$\Delta v+k^2v=0,\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<\alpha,\ \ 0<z<l,$$
$$|v(r,\varphi,z)|<\infty,\ \ v_r(r_0,\varphi,z)=v(r,\varphi,0)=v(r,\varphi,l)=0,$$
$$v_\varphi(r,0,z)=v_\varphi(r,\alpha,z)=0.$$

1.377. Поле электрического типа $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\theta,\mathcal{E}_\varphi)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(0,\mathcal{H}_\theta,\mathcal{H}_\varphi)$:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{E}_r=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+k^2u, & \mathcal{E}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}, & \mathcal{E}_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi},\\ \mathcal{H}_r=0, & \mathcal{H}_\theta=\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, & \mathcal{H}_\varphi=-\frac{ik}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},\end{array}\tag{1.183}$$

где u — решение задачи

$$\Delta u - \tfrac{2}{r}\tfrac{\partial u}{\partial r} + k^2 u = 0, \quad r < r_0, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|u(r,\theta,\varphi)| < \infty, \;\; u(r,\theta,\varphi+2\pi) = u(r,\theta,\varphi), \;\; u_r(r_0,\theta,\varphi) = 0.$$

Поле магнитного типа $\mathbf{E} = e^{i\omega t}(0, \mathcal{E}_\theta, \mathcal{E}_\varphi,), \; \mathbf{H} = e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\theta, \mathcal{H}_\varphi)$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_r = 0, & \mathcal{E}_\theta = -\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, & \mathcal{E}_\varphi = \frac{ik}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \mathcal{H}_r = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + k^2 v, & \mathcal{H}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}, & \mathcal{H}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi}, \end{array} \tag{1.184}$$

где v — решение задачи

$$\Delta v - \tfrac{2}{r}\tfrac{\partial v}{\partial r} + k^2 v = 0, \quad r < r_0, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|v(r,\theta,\varphi,)| < \infty, \;\; v(r,\theta,\varphi+2\pi) = v(r,\theta,\varphi), \;\; v(r_0,\theta,\varphi) = 0.$$

1.378. Ось Oz направлена по оси волновода, $L = \partial\Omega$ — кусочно-гладкая линия;

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathcal{E}(x,y)\, e^{i(\beta\, z - \omega\, t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathcal{H}(x,y)\, e^{i(\beta\, z - \omega\, t)}. \tag{1.185}$$

В TM-волне $\mathcal{E}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, 0)$, компонента $\mathcal{E}_z(x,y)$ — решение задачи

$$\Delta \mathcal{E}_z + \kappa^2 \mathcal{E}_z = 0, \quad (x,y) \in \Omega, 1qqd\mathcal{E}_z|_L = 0, \quad \kappa^2 = k^2 - p^2, \;\; k = \tfrac{\omega}{c}, \tag{1.186}$$

остальные компоненты выражаются через $\mathcal{E}_z$ по формулам:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E}_x = \frac{i\beta}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}, & \mathcal{E}_y = \frac{i\beta}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}, \\ \mathcal{H}_x = -\frac{i\,k}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}, & \mathcal{H}_y = \frac{i\,k}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}. \end{array} \tag{1.187}$$

В TE-волне $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, 0)$, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z)$, компонента $\mathcal{H}_z$ — решение задачи

$$\begin{array}{l} \Delta \mathcal{H}_z + \kappa^2 \mathcal{H}_z = 0, \;\; (x,y) \in \Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n}\big|_L = 0, \;\; \mathbf{n} - \text{нормаль к } L, \end{array} \tag{1.188}$$

остальные компоненты выражаются через $\mathcal{H}_z$ по формулам:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E}_x = \frac{i\,k}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}, & \mathcal{E}_y = -\frac{i\,k}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}, \\ \mathcal{H}_x = \frac{i\beta}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}, & \mathcal{H}_y = \frac{i\beta}{\kappa^2}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}. \end{array} \tag{1.189}$$

Решение. Электромагнитное поле в монохроматической волне (1.185) определяется системой уравнений (1.106), (1.107), которая запишется в виде

$$\begin{array}{ll} rot(\mathcal{E} e^{i\,\beta\, z}) = \frac{i\,\omega}{c}\mathcal{H} e^{i\,\beta\, z}, & rot(\mathcal{H}\, e^{i\,\beta\, z}) = \frac{i\,\omega}{c}\mathcal{E}\, e^{i\,\beta\, z}, \\ div\mathcal{E} + i\beta\mathcal{E}_z = 0, & div\mathcal{H} + i\beta\mathcal{H}_z = 0. \end{array} \tag{1.190}$$

Результатом исключения $\mathcal{H}$ или $\mathcal{E}$ из системы (1.190) является уравнение $\Delta\mathcal{E} + \kappa^2\mathcal{E} = 0$ или $\Delta\mathcal{H} + \kappa^2\mathcal{H} = 0$, а из первой пары уравнений этой

системы (верхняя строка), записанных в координатной форме, вытекают соотношения (1.187) и (1.188). В краевой задаче (1.186) ставится граничное условие $\mathcal{E}_z|_L = 0$ (или, что то же самое, $\mathcal{E}_z|_S = 0$) вместо $\mathcal{E}_\tau|_S = 0$ (см. (1.174)). Правомерность такой замены доказывается следующим образом. Согласно формулам (1.187)

$$\mathcal{E} = \mathbf{e}_x\mathcal{E}_x + \mathbf{e}_y\mathcal{E}_y + \mathbf{e}_z\mathcal{E}_z = \tfrac{i\beta}{\kappa^2}(\mathbf{e}_x\tfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x} + \mathbf{e}_y\tfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}) + \mathbf{e}_z\mathcal{E}_z = \tfrac{i\beta}{\kappa^2}\nabla\mathcal{E}_z + \mathbf{e}_z\mathcal{E}_z,$$

поэтому при условии $\mathcal{E}_z|_S = 0$

$$\mathcal{E}_\tau|_S = (\mathcal{E}\,\tau)|_S = \tfrac{i\,\beta}{\kappa^2}(\nabla\mathcal{E}_z\,\tau)|_S + (\mathbf{e}_z\,\tau)\mathcal{E}_z|_S = (\mathbf{e}_z\,\tau)\,\mathcal{E}_z|_S = 0.$$

Аналогично устанавливается, что граничное условие в задаче (1.188) приводит к равенству $\mathcal{H}_n|_S = 0$.

В TEM-волне $\mathcal{E}_z = \mathcal{H}_z = 0$, поэтому уравнения (1.190) для $\mathcal{E}(x,y)$ можно записать в виде

$$(rot\,\mathcal{E})_z = 0, \quad div\,\mathcal{E} = 0,$$

при этом $\mathcal{E}_\tau|_L = 0$. Полученный результат означает, что поле $\mathcal{E}$ потенциально в области Ω, т.е. $\mathcal{E} = -\nabla u$, и L — эквипотенциальная линия поля. Задача Дирихле для потенциала

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega,$$
$$u|_L = C$$

имеет единственное решение $u(x,y) = C$, откуда $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$.

1.379. $TE-$ волны:

$\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{t}) = (0,\,\mathcal{E}_y(x),\,0)\,e^{i(\beta z-\omega t)}$,
$\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{t}) = (\mathcal{H}_x(x),\,0,\,\mathcal{H}_z(x))\,e^{i(\beta z-\omega t)}$,
$\mathcal{E}_y'' + (\beta^2 - k^2)\mathcal{E}_y = 0, \quad 0 < x < l$,
$\mathcal{E}_y(0) = \mathcal{E}_y(l) = 0, \quad \mathcal{H}_x = -\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{H}_z = \frac{i}{k}\mathcal{E}_y'$.

$TM-$ волны:

$\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{t}) = (\mathcal{E}_x(x),\,0,\,\mathcal{E}_z(x))\,e^{i(\beta z-\omega t)}$,
$\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{t}) = (0,\,\mathcal{H}_y(x),\,0)\,e^{i(\beta z-\omega t)}$,
$\mathcal{H}_y'' + (\beta^2 - k^2)\mathcal{H}_y = 0, \quad 0 < x < l$,
$\mathcal{H}_y'(0) = \mathcal{H}_y'(l) = 0, \quad \mathcal{E}_x = -\frac{\beta}{k}\mathcal{H}_y, \quad \mathcal{E}_z = \frac{i}{k}\mathcal{H}_y', \quad k = \frac{\omega}{c}$.

1.380. $TE-$ моды:

$\frac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2} + (k^2n_1^2 - \beta^2)\mathcal{E}_y = 0, \quad |x| < l, \quad k = \frac{\omega}{c}$,
$\frac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2} + (k^2n_2^2 - \beta^2)\mathcal{E}_y = 0, \quad |x| > l$,
$\mathcal{E}_y|_{|x|=l+0} = \mathcal{E}_y|_{|x|=l-0}$,
$\left.\frac{d\mathcal{E}_y}{dx}\right|_{|x|=l+0} = \left.\frac{d\mathcal{E}_y}{dx}\right|_{|x|=l-0}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{E}_y|^2dx < \infty$,
$\mathcal{H}_x = -\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{H}_z - \frac{i}{k}\frac{d\mathcal{E}_y}{dx}$.

$TM-$моды: $\frac{d^2\mathcal{H}_y}{dx^2}+(k^2n_1^2-\beta^2)\mathcal{H}_y=0, \quad |x|<l,$
$\frac{d^2\mathcal{H}_y}{dx^2}+(k^2n_2^2-\beta^2)\mathcal{H}_y=0, \quad |x|>l,$
$\mathcal{H}_y|_{|x|=l+0}=\mathcal{H}_y|_{|x|=l-0},$
$\frac{1}{n^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}\Big|_{|x|=l+0}=\frac{1}{n^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}\Big|_{|x|=l-0}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{H}_y|^2dx<\infty,$
$\mathcal{E}_x=-\frac{\beta}{kn^2(x)}\mathcal{H}_y, \quad \mathcal{E}_z=\frac{i}{kn^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}, \quad n(x)=\begin{cases} n_1, & |x|<l,\\ n_2, & |x|>l.\end{cases}$

Указания. п.1. Система уравнений (1.106), (1.107)

$$rot(\mathcal{H}e^{i\,\beta\,z})=-\tfrac{i\omega\varepsilon}{c}\mathcal{E}e^{i\,\beta\,z}, \quad rot(\mathcal{E}e^{i\,\beta\,z})\tfrac{i\,\omega}{c}=\mathcal{H}e^{i\,\beta\,z}$$

и граничные условия (непрерывность компонент $\mathcal{E}_\tau$ и $\mathcal{H}_\tau$ на границе раздела двух сред) распадаются на две независимые системы для компонент $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_z$ с одной стороны и $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_y$ — с другой. п.2. Если $\beta<k\,n_2$, то решение уравнения для $\mathcal{E}_z$ в области $x>l$

$$\mathcal{E}_y=A\sin\tfrac{p_2x}{l}+B\cos\tfrac{p_2x}{l}, \qquad p_j=\sqrt{\beta^2-k^2n_j^2}\,l, \quad j{=}1,2,$$

принадлежит $L_2(x>l)$, т.е. $\int_l^\infty\mathcal{E}_x^2dx<\infty$ лишь в случае $A=B=0$. Условия на границе $x{=}l$ выполняются, если $\mathcal{E}_y{=}0$ в области $|x|{<}l$. При $\beta{>}k\,n_1$

$$\mathcal{E}_y=\begin{cases} Ae^{-p_2x}, & l<x,\\ B\,sh\,p_1x+C\,ch\,p_1x, & -l<x<l,\\ De^{p_2x}, & x<-l.\end{cases}$$

Условия на границе ($x{=}\pm\,l$) порождают однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно A, B, C, D, определитель которой (с точностью до множителя, отличного от нуля)

$$\Delta=(p_1ch\,p_1+p_2sh\,p_1)(p_1sh\,p_1+p_2ch\,p_1)\,e^{-p_2}\neq 0.$$

1.381. TE-моды:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2}+(k^2n_1^2(x)-\beta^2)\mathcal{E}_y=0, \quad |x|<l,\\ &\tfrac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2}+(k^2n_2^2-\beta^2)\mathcal{E}_y=0, \qquad |x|>l,\\ &\mathcal{E}_y|_{|x|=l-0}=\mathcal{E}_y|_{|x|=l+0}, \quad \tfrac{d\mathcal{E}_y}{dx}\Big|_{|x|=l-0}=\tfrac{d\mathcal{E}_y}{dx}\Big|_{|x|=l+0},\\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_y^2dx<\infty, \quad \mathcal{H}_x=-\tfrac{\beta}{k}\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{H}_z=-\tfrac{i}{k}\tfrac{d\mathcal{E}_y}{dx}.\end{aligned} \tag{1.191}$$

TM-моды:

$$\begin{aligned}&n_1^2(x)\tfrac{d}{dx}(\tfrac{1}{n_1^2(x)}\tfrac{d\mathcal{H}_y}{dx})+(k^2n_1^2(x)-\beta^2)\mathcal{H}_y=0, \quad |x|<l,\\ &\tfrac{d^2\mathcal{H}_y}{dx^2}+(k^2n_2^2-\beta^2)\mathcal{H}_y=0, \qquad |x|>l,\\ &\mathcal{H}_y|_{|x|=l-0}=\mathcal{H}_y|_{|x|=l+0}, \quad \tfrac{1}{n^2(x)}\tfrac{d\mathcal{H}_y}{dx}\Big|_{|x|=l-0}=\tfrac{1}{n^2(x)}\tfrac{d\mathcal{H}_y}{dx}\Big|_{|x|=l+0},\\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{H}_y^2dx<\infty, \quad \mathcal{E}_x=\tfrac{\beta}{kn^2(x)}\mathcal{H}_y, \quad \mathcal{E}_z=\tfrac{i}{kn^2(x)}\tfrac{d\mathcal{H}_y}{dx}.\end{aligned} \tag{1.192}$$

1.382. $TE-$ моды:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2}+(k^2n^2(x)-\beta^2)\mathcal{E}_y=0,\quad -\infty<x<\infty,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{E}_y|^2dx<\infty,\quad \mathcal{H}_x=-\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y,\quad \mathcal{H}_z=-\frac{i}{k}\frac{d\mathcal{E}_y}{dx}.TM-\text{моды:}$$
$$n^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}\right)+(k^2n^2(x)-\beta^2)\mathcal{H}_y=0,\quad -\infty<x<\infty,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{H}_y|^2dx<\infty,\quad \mathcal{E}_x=\frac{\beta}{kn^2(x)}\mathcal{H}_y,\quad \mathcal{E}_z=\frac{i}{kn^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}.$$

1.383. $TM-$ моды:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathcal{E}_z}{dr}+(k^2n_1-\beta^2)\mathcal{E}_z=0,\quad 0<r<r_0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathcal{E}_z}{dr}+(k^2n_2^2-\beta^2)\mathcal{E}_z=0,\quad r_0<r,$$
$$|\mathcal{E}_z|<\infty,\quad \mathcal{E}_z(r_0-0)=\mathcal{E}_z(r_0+0),$$
$$\frac{n_1^2}{k^2n_1^2-\beta^2}\mathcal{E}_z'(r_0-0)=\frac{n_2^2}{k^2n_2^2-\beta^2}\mathcal{E}_z'(r_0+0),$$
$$\int\limits_0^{\infty}\mathcal{E}_z^2rdr<\infty,\quad \mathcal{E}_r=\frac{i\beta}{k^2n^2-\beta^2}\mathcal{E}_z',\quad \mathcal{H}_\varphi=\frac{ikn^2}{k^2n^2-\beta^2}\mathcal{E}_z'.$$

$TE-$ моды:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathcal{H}_z}{dr}+(k^2n_1-\beta^2)\mathcal{H}_z=0,\quad 0<r<r_0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathcal{H}_z}{dr}+(k^2n_2^2-\beta^2)\mathcal{H}_z=0,\quad r_0<r,$$
$$|\mathcal{H}_z|<\infty,\quad \mathcal{H}_z(r_0-0)=\mathcal{H}_z(r_0+0),$$
$$\frac{1}{k^2n_1^2-\beta^2}\mathcal{H}_z'(r_0-0)=\frac{1}{k^2n_2^2-\beta^2}\mathcal{H}_r'(r_0+0),$$
$$\int\limits_0^{\infty}\mathcal{H}_z^2rdr<\infty,\quad \mathcal{E}_\varphi=-\frac{ik}{k^2n^2-\beta^2}\mathcal{H}',\quad \mathcal{H}_r=-\frac{i\beta}{k^2n^2-\beta^2}\mathcal{H}'$$

Решение п.2. Если $\beta<k\,n_2$, то решение уравнения для $\mathcal{E}_z$ в области $r<r_0$

$$\mathcal{E}_z=AJ_0(\sqrt{k^2n^2-\beta^2}\,r)+BY_0(\sqrt{k^2n^2-\beta^2}\,r)$$

принадлежит L_2 (т.е. $\int_0^{\infty}\mathcal{E}_z^2rdr<\infty$) только при $A=B=0$. Действительно, при $r\to\infty$ функции J_0 и Y_0 убывают как $1/\sqrt{r}$, так что интеграл расходится. В области $r<r_0$ ограниченное решение имеет вид $\mathcal{E}_z=CJ_0(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\,r)$ и удовлетворяет граничному условию при $r=r_0$, если $C=0$. Пусть $\beta>kn_1$, тогда

$$\mathcal{E}_z=\begin{cases}AI_0\left(\frac{p_1r}{r_0}\right), & r<r_0,\\ BK_0\left(\frac{p_2r}{r_0}\right), & r_0<r,\end{cases}$$

где $p_i=\sqrt{\beta^2-k^2n_i^2}\,r_0$, $i=1,2$. Граничные условия при $r=r_0$ выполняются, если

$$AI_0(p_1)-BK_0(p_2)=0,$$
$$A\frac{n_1}{p_1r_0}I_0'(p_1)-B\frac{n_2}{p_2r_0}K_0'(p_2)=0.$$

Определитель этой системы $\Delta=\frac{n_2}{p_2r_0}I_0(p_1)K_1(p_2)+\frac{n_1}{p_1r_0}I_1(p_1)K_0(p_2)>0$, поэтому $A=B=0$.

1.384. $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_x,\mathcal{E}_y,\mathcal{E}_z)$, $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_y,\mathcal{H}_z)$; функции $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$ являются

решениями двух независимых задач

$$\begin{gathered}
\Delta\mathcal{E}_z + (k^2n_1^2 - \beta^2)\mathcal{E}_z = 0, \quad \Delta\mathcal{H}_z + (k^2n_1^2 - \beta^2)\mathcal{H}_z = 0, \\
0 < r < r_0, \\
\Delta\mathcal{E}_z + (k^2n_2^2 - \beta^2)\mathcal{E}_z = 0, \quad \Delta\mathcal{H}_z + (k^2n_2^2 - \beta^2)\mathcal{H}_z = 0, \\
r_0 < r, \\
\mathcal{E}_z|_{r=r_0-0} = \mathcal{E}_z|_{r=r_0+0}, \quad \mathcal{E}_\varphi|_{r=r_0-0} = \mathcal{E}_\varphi|_{r=r_0+0}, \\
|\mathcal{E}| < \infty, \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \mathcal{E}^2 r dr d\varphi < \infty, \\
\mathcal{H}_z|_{r=r_0-0} = \mathcal{H}_z|_{r=r_0+0}, \quad \mathcal{H}_\varphi|_{r=r_0-0} = \mathcal{H}_\varphi|_{r=r_0+0}, \\
|\mathcal{H}| < \infty, \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \mathcal{H}^2 r\, dr\, d\varphi < \infty
\end{gathered} \tag{1.193}$$

остальные компоненты выражаются через E_z и H_z по формулам:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_r &= \tfrac{1}{k^2n^2(r)-\beta^2}\left(i\beta\tfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} - \tfrac{k\,m}{r}\mathcal{H}_z\right), \\
\mathcal{E}_\varphi &= -\tfrac{1}{k^2n^2(r)-\beta^2}\left(\tfrac{\beta\,m}{r}\mathcal{E}_z + i\,k\tfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r}\right), \\
\mathcal{H}_r &= \tfrac{1}{k^2n^2(r)-\beta^2}\left(\tfrac{kmn^2(r)}{r}\mathcal{E}_z + i\,\beta\tfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r}\right), \\
\mathcal{H}_\varphi &= \tfrac{1}{k^2n^2(r)-\beta^2}\left(i\,k\,n^2(r)\tfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} - \tfrac{\beta\,m}{r}\mathcal{H}_z\right).
\end{aligned} \tag{1.194}$$

Указание к п.2. Компоненты $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$ удовлетворяют уравнению Бесселя

$$u'' + \tfrac{1}{r}u' + (k^2n_i^2 - \beta^2 - \tfrac{m^2}{r^2})u = 0, \ i = 1, 2.$$

Если $\beta > k\,n_1$, то ограниченное при $r = 0$, квадратично интегрируемое с весом r непрерывное при $r = r_0$ решение имеет вид

$$\mathcal{E}_z = A\begin{cases} \frac{I_m\left(\frac{p_1}{r_0}r\right)}{I_m(p_1)}, & r \le r_0, \\ \frac{K_m\left(\frac{p_2}{r_0}r\right)}{K_m(p_2)}, & r_0 < r, \end{cases} \qquad \mathcal{H}_z = B\begin{cases} \frac{I_m\left(\frac{p_1}{r_0}r\right)}{I_m(p_1)}, & r \le r_0, \\ \frac{K_m\left(\frac{p_2}{r_0}r\right)}{K_m(p_2)}, & r_0 < r, \end{cases}$$

где $p_j{=}r_0\sqrt{\beta^2-k^2n_i^2}$, $i{=}1,2$. Требование непрерывности при $r{=}r_0$ компонент $\mathcal{E}_\varphi$ и $\mathcal{H}_\varphi$ (см. 1.194) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно A и B

$$\begin{aligned}
\beta\,m\left(\tfrac{1}{p_1^2} - \tfrac{1}{p_2^2}\right)A - ik\left(\tfrac{I_m'(p_1)}{p_1I_m(p_1)} - \tfrac{K_m'(p_2)}{p_2K_m(p_2)}\right)B = 0, \\
ik\left(\tfrac{n_1^2I_m'(p_1)}{p_1I_m(p_1)} - \tfrac{n_2^2K_m'(p_2)}{p_2K_m(p_2)}\right)A - \beta\,m\left(\tfrac{1}{p_1^2} - \tfrac{1}{p_2^2}\right)B = 0,
\end{aligned}$$

определитель которой (с точностью до множителя, не равного нулю)

$$\Delta = \tfrac{1}{m^2}\left(\tfrac{I_m'(p_1)}{p_1I_m(p_1)} - \tfrac{K_m'(p_2)}{p_2K_m(p_2)}\right)\left(\tfrac{n_1^2I_m'(p_1)}{p_1I_m(p_1)} - \tfrac{n_2^2K_m'(p_2)}{p_2K_m(p_2)}\right) - \tfrac{\beta^2}{k^2}\left(\tfrac{1}{p_1^2} - \tfrac{1}{p_2^2}\right)^2.$$

Если $p > 0$, то $pI_m' > mI_m$, $-pK_m' > mK_m$ (это следует из рекуррентных формул), поэтому

$$\Delta > \left(\tfrac{1}{p_1^2} + \tfrac{1}{p_2^2}\right)\left(\tfrac{n_1^2}{p_1^2} + \tfrac{n_2^2}{p_2^2}\right) - \tfrac{\beta^2}{k^2}\left(\tfrac{1}{p_1^2} - \tfrac{1}{p_2^2}\right)^2\tfrac{2(n_1^2+n_2^2)}{p_1^2p_2^2} > 0.$$

1.385. Указание. В цилиндрических координатах система (1.106) имеет вид

$$\begin{array}{l} \frac{m}{r}\mathcal{H}_z - \beta\mathcal{H}_\varphi = -kn^2(r)\mathcal{E}_r, \\ i\beta\mathcal{E}_r - \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} = ik\mathcal{H}_\varphi, \\ \frac{m}{r}\mathcal{E}_z - \beta\mathcal{E}_\varphi = k\mathcal{H}_r, \\ i\beta\mathcal{H}_r - \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r} = -ikn^2(r)\mathcal{E}_\varphi, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{H}_\varphi) - \frac{im}{r}\mathcal{H}_r = -ikn^2(r)\mathcal{E}_z, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{E}_\varphi) - \frac{im}{r}\mathcal{E}_r = ik\mathcal{H}_z. \end{array} \tag{1.195}$$

Если первые два уравнения разрешить относительно $\mathcal{E}_r$ и $\mathcal{H}_\varphi$, а вторые два — относительно $\mathcal{E}_\varphi$ и $\mathcal{H}_r$, то получатся соотношения (1.126) для компонент, подстановка которых в последние два уравнения системы (1.195) приводит к уравнениям (1.124), (1.125).

1.386. Решение. Так как $\Delta \ll 1$, $0 \le q^2/s^2 \le 1$, то

$$\beta^2 = k^2n_1^2 - \frac{q^2}{r_0^2} = k^2n_1^2(1 - 2\Delta\frac{q^2}{s^2}) \approx k^2n_1^2,$$

и уравнения (1.124), (1.125) примут вид

$$\mathcal{L}\mathcal{E}_z = -\frac{i}{n_1}\mathcal{H}_z, \quad \mathcal{L}\mathcal{H}_z = in_1\mathcal{E}_z, \tag{1.196}$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{b^2r}{ms^2f'}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{s^2f'}{b^2}\right)\frac{d}{dr} + \frac{b^2}{r_0^2} - \frac{m^2}{r^2}\right].$$

Из системы (1.196) следует, что каждая из компонент $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$ является решением уравнения

$$\mathcal{L}^2u = u. \tag{1.197}$$

Ввиду того, что $\mathcal{L}^2 - I = (\mathcal{L} - I)(\mathcal{L} + I)$, где I — тождественный оператор, линейно независимые решения уравнений

$$\mathcal{L}u = u, \quad \mathcal{L}u = -u \tag{1.198}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.197). Так как точка $r = 0$ является особой для уравнения (1.198), то каждое из них имеет только одно ограниченное решение. Таким образом, $\mathcal{E}_z = u_j$, $j = 1, 2$, где $\mathcal{L}u_1 = u_1$, $\mathcal{L}u_2 = -u_2$, а первое уравнение системы (1.196) определяет компоненту

$$\mathcal{H}_z = in_1\mathcal{L}\mathcal{E}_z = in_1\mathcal{L}u_j = \pm in_1u_j, \quad j = 1, 2.$$

Подстановка $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$ в первое из соотношений (1.126) преобразует его к виду

$$\mathcal{E}_r = \frac{ikn_1r_0^2}{b^2}(u_j' \mp \frac{m}{r}u_j).$$

Если обозначить

$$\psi_j = \frac{kn_1r_0^2}{b^2}(u_j' \mp \frac{m}{r}u_j), \tag{1.199}$$

где верхний знак соответствует $j=1$, а нижний $-j=2$, то $\mathcal{E}_r = i\psi_j$. Аналогично получаются выражения для $\mathcal{E}_\varphi$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_\varphi$, приведенные в ответе. Функцию u_j можно выразить через ψ_j с помощью последнего (или предпоследнего) соотношения (1.195):

$$\pm\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}(r\psi_j) - \tfrac{im}{r}i\psi_j = ik(\pm in_1\psi_j),$$

откуда

$$u_j = -\frac{1}{kn_1}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial r} + \frac{1\pm m}{r}\psi_j\right). \tag{1.200}$$

Условием совместности (1.199) и (1.200) служит уравнение (1.128). Действительно, подстановка u_j из (1.200) в правую часть уравнения (1.199)

$$\tfrac{b^2}{kn_1r_0^2}\psi_j = u_j' \mp \tfrac{m}{r}u_j$$

приводит к уравнению для ψ_j :

$$\tfrac{b^2}{kn_1r_0^2}\psi_j = -\tfrac{1}{kn_1}\left(\psi_j'' - \tfrac{1\pm m}{r}\psi_j' - \tfrac{1\pm m}{r^2}\psi_j\right) \mp \tfrac{m}{r}\left(-\tfrac{1}{kn_1}\right)\left(\psi_j' + \tfrac{1\pm m}{r}\psi_j\right).$$

После сокращения на $(-1)/(kn_1)$ и приведения подобных это уравнение принимает вид

$$\tfrac{b^2}{r_0^2}\psi_j = -\psi_j'' + \left(\pm\tfrac{m}{r} - \tfrac{1\pm m}{r}\right)\psi_j' + \left(\tfrac{1\pm m}{r^2} \pm \tfrac{m(1\pm m)}{r^2}\right)\psi_j,$$

или

$$\psi_j'' + \tfrac{1}{r}\psi_j' + \left(\tfrac{b^2}{r_0^2} - \tfrac{(1\pm m)^2}{r^2}\right)\psi_j = 0,$$

где, согласно (1.127), $b^2 = q^2 - f\,s^2$.

1.387. Указание. Точные уравнения для $\mathcal{E}_z$ и $\mathcal{H}_z$:

$$\Delta\mathcal{E}_z + (k^2n^2 - \beta^2)\mathcal{E}_z + i\beta(\mathcal{E}_\nu\nabla ln\, n^2) = 0,$$
$$\Delta\mathcal{H}_z + (k^2n^2 - \beta^2)\mathcal{H}_z + ikn^2([\mathcal{E}_\nu\nabla ln\, n^2]\mathbf{e}_z) = 0.$$

1.388. $u_{tt} = c^2\Delta u - 2\pi c^2 p_0 f(t)\frac{\partial\delta(\mathbf{r})}{\partial l}$, $-\infty < x,y,z < \infty$, $0 < t$, $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{p}_0}{p_0}$,

$$A_{tt} = c^2\Delta A + 4\pi c p_0 f'(t)\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A} = A\,\mathbf{l},$$
$$u(\mathbf{r},0) = \tfrac{(\mathbf{p}\,\mathbf{r})}{r^3}, \quad u_t(\mathbf{r},0) = 0,$$
$$A(\mathbf{r},0) = A_t(\mathbf{r},0) = 0,$$

при любом фиксированном $t > 0$ функции $A(\mathbf{r},t)$ и $u(\mathbf{r},t)$ удовлетворяют условиям излучения (1.80). Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электромагнитного поля определяются формулами (1.136).

1.389. $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{l}\,\mathcal{A}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $u(\mathbf{r},t) = v(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{p}_0}{p_0}$, $k = \frac{\omega}{c}$,

$$\Delta\mathcal{A} + k^2\mathcal{A} = -4\pi ikp_0\delta(\mathbf{r}),$$
$$\Delta v + k^2 v = 4\pi p_0\tfrac{\partial\delta(\mathbf{r})}{\partial l}, \qquad -\infty < x,y,z < \infty,$$

функции $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ удовлетворяют условиям излучения (1.80). Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются формулами (1.136).

1.390. $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathcal{A}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $u(\mathbf{r},t) = 0$, функция $\mathcal{A}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathcal{A} + k^2\mathcal{A} = 4Mc^2\tfrac{\delta(r)}{r^3}\cdot\tfrac{\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi, \quad -\infty < x,y,z < \infty,$$

и условиям излучения (1.80). Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются формулами (1.136).

1.391. $\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, $\mathbf{H} = -\nabla u + \mathbf{H}_0$,

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + p^2 A = 0$, $\Delta\, u = 0$,

$r < r_0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $r_0 < r$, $0 \le \varphi < 2\pi$,

$|A| < \infty$, $\lim_{r\to\infty} u = 0$,

$$\mathbf{H}|_{r_0-0} = \mathbf{H}|_{r_0+0},$$

где $p^2 = -\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}$. Указание. Векторы $\mathbf{E}e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{i\omega t}$ электромагнитного поля в цилиндре удовлетворяют системе уравнений (1.132)–(1.135), в которой плотность тока $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}\,exp(i\omega t)$, плотность свободных зарядов $\rho = 0$, а токами смещения можно пренебречь:

$$rot\mathbf{E} = -\tfrac{i\omega}{c}\mathbf{H}, \quad div\mathbf{H} = 0,$$
$$rot\mathbf{H} = \tfrac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}, \quad div\mathbf{E} = 0.$$

Магнитное поле в цилиндре представляет собой суперпозицию внешнего магнитного поля и магнитного поля токов $\mathbf{j}$, источником которых является электрическое поле, индуцируемое внешним переменным магнитным полем. Векторный потенциал $\mathbf{A}$ результирующего магнитного поля в цилиндре удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta\mathbf{A} + p^2\mathbf{A} = 0$ (см. пример 1.26.) Вне цилиндра магнитное поле (в квазистационарном приближении) потенциально. Непрерывность тангенциальной составляющей поля $\mathbf{H}$ и нормальной составляющей поля $\mathbf{B}$ на границе раздела двух сред при $\mu = 1$ эквивалентна непрерывности $\mathbf{H}$.

1.392. Внутри шара магнитное поле $\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, вне шара — поле $\mathbf{H} = -\nabla u + \mathbf{H}_0$; функции $A(r,\theta)$ и $u(r,\theta)$ — решения задач:

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{A}{r^2\sin^2\theta} + p^2 A = 0$, $\Delta\, u = 0$,

$r < r_0$, $r_0 < r$,

$|A| < \infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} u = 0$,

где $p^2 = -\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}$, а на поверхности шара выполняется граничное условие:

$$\mathbf{H}|_{r_0-0} = \mathbf{H}|_{r_0+0}.$$

Указание. Внешнее магнитное поле индуцирует в шаре токи, плотность которых $\mathbf{j} = j(r,\theta)exp(i\omega t)\,\mathbf{e}_\varphi$. См. также указание к предыдущей задаче.

1.394. Указание. Решение системы (1.172) удовлетворяет условиям

$$n \to 1,\ v \to 0,\ E \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Подстановка разложений

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \varepsilon^3 n_3 + \ldots,$$
$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \ldots,$$
$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^3 E_3 + \ldots$$

и приравнивание к нулю коэффициентов при ε, ε^2, ε^3,... приводит к цепочке систем уравнений. Первая система (линейное приближение) имеет

решение

$$n_1{}^{i\,\theta},\ \ v_1=\tfrac{\omega}{k}Ae^{i\,\theta},\ \ E_1=\tfrac{i}{k}Ae^{i\,\theta},\ \ \theta=kx-\omega t,\ \ \omega^2=k^2+1.$$

Решение второй системы при условии

$$\omega\tfrac{\partial A}{\partial T_1}+k\tfrac{\partial A}{\partial X_1}=0$$

которое выражает отсутствие секулярных членов в уравнении для n_2, имеет вид

$$\begin{aligned}&n_2=\tfrac{2}{3}(1+2\omega^2)A^2e^{i\,\theta}+c.c.,\\&v_2+\tfrac{\omega}{3k}(4\omega^2-1)A_2e^{i\,\theta}+\tfrac{i}{\omega\,k^2}\tfrac{\partial A}{\partial X_1}e^{i\,\theta}+c.c.,\\&E_2=i\tfrac{1+2\omega^2}{3k}A^2e^{i\,\theta}-\tfrac{1}{k^2}\tfrac{\partial A}{\partial X_1}e^{i\,\theta}+c.c..\end{aligned}$$

Равенство нулю секулярных членов в уравнении для n_3

$$2i\left(\tfrac{\partial A}{\partial T_2}+\tfrac{k}{\omega}\tfrac{\partial A}{\partial X_2}\right)+\tfrac{1}{\omega^3}\tfrac{\partial^2 A}{\partial X_1^2}-\tfrac{1}{3\omega}(8k^4+21k^2+12)|A|^2A=0$$

после преобразования переменных $\eta=X_2-\frac{k}{\omega}T_2,\quad \tau=T_2,\quad \xi=X_1$ принимает форму НУШ

$$i\tfrac{\partial A}{\partial\tau}+\tfrac{1}{2\omega^3}\tfrac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}-\tfrac{1}{6\omega}(8k^4+21k^2+12)|A|^2A=0.$$

1.395. Указание. Подстановка

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\varepsilon^3u_3+\ldots$$

порождает последовательность уравнений, из которых следует, что

$$u_1=A\,e^{i(kx-\omega t)}+c.c.,\quad \omega=-k^3,$$

а функция A при выполнении условия $\frac{\partial A}{\partial T_1}-3k^2\frac{\partial A}{\partial X_1}=0$ удовлетворяет (в переменных $\xi=X_1,\ \eta=T_2+3k^2X_2,\ \tau=T_2$) уравнению

$$1.i\frac{\partial A}{\partial\tau}-3k\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}-\frac{6}{k}|A|^2A=0\,;\ 2.i\frac{\partial A}{\partial\tau}-3k\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}-9k|A|^2A=0.$$

1.396. Указание. Решение уравнения $u_{xt}=u-u^3$ представить в виде разложения $u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\varepsilon^3u_3+\ldots$, откуда $u_1=Ae^{i(kx-\omega t)},\quad \omega k=1.$

Глава 2

МЕТОД ФУРЬЕ

Метод Фурье, или метод разделения переменных, предложенный французским математиком Ж.Фурье в работе "Аналитическая теория тепла"(1822 г.), является эффективным средством решения линейных задач математической физики для дифференциальных уравнений различных типов. Этот метод применим для смешанных нестационарных задач (т.е. задач с граничными и начальными условиями) в ограниченных областях, а в случае уравнений эллиптического типа — и для некоторого класса неограниченных областей. Метод основан на построении частных решений уравнения, удовлетворяющих однородным граничным условиям, в виде произведения функций, зависящих от разных переменных. Посредством разделения переменных задача для уравнения с частными производными сводится к двум задачам. Одна из них состоит в решении обыкновенного дифференциального уравнения при дополнительных условиях (для нестационарных задач — это задача Коши), другая — задача на собственные значения — заключается в определении собственных функций и собственных значений линейного дифференциального оператора. Для решения второй задачи в n-мерном случае ($n \geq 2$) также используется метод Фурье, применение которого приводит к одномерным задачам на собственные значения. Задача на собственные значении

является основной в данном методе, так как служит источником построения полной ортогональной системы функций. Именно с помощью этих функций конструируется ряд Фурье, представляющий собой решение поставленной задачи.

Процедура разделения переменных особенно проста при решении нестационарных задач для однородных уравнений с однородными граничными условиями или n — мерных краевых задач (т.е. задач без начальных условий) для однородных уравнений с однородными граничными условиями по $n-1$ переменным. Один из методов решения задачи для неоднородного уравнения с неоднородными граничными условиями состоит в преобразовании ее в эквивалентную задачу с однородными граничными условиями. В подобных случаях существует несколько способов построения решения, так что одна и та же задача может иметь различные формы ответа. Следует выделить класс задач для неоднородного уравнения с неоднородными граничными условиями (например, со стационарными неоднородностями), процесс решения которых значительно упрощается и улучшается сходимость рядов, если удается найти частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям.

Литература к главе: [72], [13], [10] , [60], [52].

2.1. Задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями

Пример 2.1. Движение струны с упруго закрепленными концами, на которую действуют упругие силы, определяется (с точностью до обозначений) системой условий (1.16):

$$\rho(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}k(x)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u, \quad x \in \Delta = (l_1, l_2), \ \ 0 < t, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1 u_x(l_1, t) - \beta_1 u(l_1, t) = 0,\\ \alpha_2 u_x(l_2, t) + \beta_2 u(l_2, t) = 0,\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \tag{2.3}$$

$$\alpha_i \geq 0, \ \ \beta_i \geq 0, \ \ \alpha_i + \beta_i > 0, \ \ i = 1, 2; \tag{2.4}$$

коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям

$$\rho(x) \in C(\overline{\Delta}),\ \rho(x) \geq \delta > 0, \quad k(x) \in C^1(\overline{\Delta}),\ k(x) \geq \delta > 0,$$
$$q(x) \in C(\overline{\Delta}),\ q(x) \geq 0,$$

а функция $u(x,t) \in C^2(\Delta) \cap C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$. Если ввести оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial}{\partial x} - q\right), \tag{2.5}$$

область определения $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ которого — множество функций, принадлежащих классу $C^2(\Delta) \cap C^1(\overline{\Delta})$ и удовлетворяющих граничным условиям (2.2), то уравнение (2.1) запишется в виде

$$u_{tt} = -\mathcal{L}u. \tag{2.6}$$

Согласно методу Фурье, решение задачи следует отыскивать в форме произведения $u(x,t)=X(x)\,T(t)$. Подстановка $u(x,t)$ в уравнение (2.6) и деление на $X\,T$ приводит к тождеству двух отношений $T''/T = -\,\mathcal{L}X/X$, зависящих от разных переменных. Следовательно,

$$\frac{T''}{T} = -\frac{\mathcal{L}X}{X} = -\lambda,$$

где λ — некоторая константа. Таким образом, функции X и T удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}X &= \lambda\, X, \\ T'' + \lambda\, T &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} [\,\alpha_1 X'(l_1) - \beta_1 X(l_1)\,]\,T(t) &= 0, \\ [\,\alpha_2 X'(l_2) + \beta_2 X(l_2)\,]\,T(t) &= 0 \end{aligned}$$

выполняются, если равны нулю коэффициенты при $T(t)$. Совокупность условий, которым удовлетворяет функция $X(x)$, определяет задачу на собственные значения (в одномерном случае она

называется задачей Штурма-Лиувилля)

$$\frac{d}{dx}k\frac{dX}{dx} - qX + \lambda\rho X = 0, \quad l_1 < x < l_2, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 X'(l_1) - \beta_1 X(l_1) &= 0, \\ \alpha_2 X'(l_2) + \beta_2 X(l_2) &= 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

или в другой форме

$$\mathcal{L}X = \lambda X, \quad X \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}. \tag{2.10}$$

Значения параметра λ, при котором задача (2.10) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями оператора $\mathcal{L}$, а соответствующие нетривиальные решения $X(x)$ — собственными функциями оператора.

Так как уравнение (2.8) и граничные условия (2.9) задачи Штурма-Лиувилля являются однородными, то собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя. Известно также (см.[14]), что множество собственных значений оператора $\mathcal{L}$ счетно, не имеет конечных предельных точек, собственные значения неотрицательны, каждому из них (в одномерном случае) соответствует одна собственная функция, собственные функции (их можно выбрать вещественными), принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны с весом ρ на промежутке Δ, т.е.

$$(X_m, X_n) = \int_{\Delta} X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Каждому λ_n соответствует решение уравнения (2.7)

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t$$

и функция $u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t)$. Так как $u_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2), то в силу линейности задачи этими свойствами обладает любая линейная комбинация функций $u_n(x,t)$. Поэтому естественно предположить, что

решение имеет форму ряда по собственным функциям

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)\,X_n(x).$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n используются начальные условия. При t=0

$$\begin{array}{ll} u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x) & \Longrightarrow\quad A_n=\frac{(u_0,X_n)}{\|X_n\|^2},\\ u_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda}B_nX_n(x) & \Longrightarrow\quad B_n=\frac{(u_1,X_n)}{\sqrt{\lambda}\|X_n\|^2},\end{array}\qquad(2.11)$$

где $\|X_n\|^2=(X_n,X_n)$ — квадрат нормы собственной функции.

Следует отметить, что норма $\|X\|$ любого решения уравнения (2.8) выражается через производные по λ и x функции X. Действительно, пусть X и X_1 — какие-либо решения уравнения (2.8) с параметрами λ и λ_1 соответственно:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}k\frac{dX}{dx}+(\lambda\,\rho-q)X=0,\\ &\frac{d}{dx}k\frac{dX_1}{dx}+(\lambda_1\,\rho-q)X_1=0.\end{aligned}$$

Если первое уравнение умножить на X_1, а второе на X и взять разность, то получится тождество

$$\frac{d}{dx}W[\,X_1,\,X\,]=(\lambda_1-\lambda)\,X\,X_1\rho,$$

где $W[\,X_1,\,X\,]$ — определитель Вронского. Отсюда следует, что

$$\int_{l_1}^{l_2}\rho\,X^2\,dx=\lim_{\lambda_1\to\lambda}\frac{k\,W[\,X_1,\,X\,]}{\lambda_1-\lambda}\Bigg|_{l_1}^{l_2},$$

или

$$\|X\|^2=k\,W\left[\,\frac{\partial X}{\partial\lambda},\,X\,\right]\Bigg|_{l_1}^{l_2}.\qquad(2.12)$$

В случае свободного движения однородной струны ($0<x<l$) с закрепленными концами задача (2.1)–(2.3) упрощается:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \end{aligned}$$

Функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению $T''+a^2\lambda T=0$, а функция $X(x)$ является решением задачи Штурма—Лиувилля

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ &X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Общее решение $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$ удовлетворяет граничному условию при $x=0$, если $A=0$. Второе граничное условие $\sin\sqrt{\lambda}l=0$ определяет счетное множество собственных значений $\lambda_n=(\pi n/l)^2$, $n \in \mathbf{N}$. Таким образом,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t) X_n(x), \tag{2.14}$$

A_n и B_n выражаются посредством формул (2.11) при $\rho = 1$:

$$A_n = \frac{(u_0,\, X_n)}{\|X_n\|^2}, \quad B_n = \frac{(u_1,\, X_n)}{\sqrt{\lambda}\|X_n\|^2}. \tag{2.15}$$

Функцию $u(x,t)$ можно представить так:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}\, x\, \sin(a\sqrt{\lambda_n}t + \delta_n).$$

Каждый член ряда описывает стоячую волну, точка x колеблется с амплитудой $C_n \sin\frac{\pi n}{l}\, x$ и частотой

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Так как спектр частот колебательной системы является ее важной физической характеристикой, то задача на собственные значения имеет самостоятельный интерес.

2.1. Определить частоты и амплитуды собственных колебаний однородной струны ($-l<x<l$) с закрепленными концами.

2.2. Один конец струны, длина которой l, закреплен, а другой свободен (см. задачу (1.24.)) Найти собственные частоты струны.

2.3. Найти частоты собственных колебаний неоднородной струны ($0 < x < l$) с закрепленными концами, плотность которой

1. $\rho(x) = \begin{cases} \rho_0, & 0 < x < l/2, \\ 4\rho_0, & l/2 < x < l\,; \end{cases}$ 2. $\rho(x) = \begin{cases} \rho_0, & 0 < x < \frac{3}{7}l, \\ 9\rho_0, & \frac{3}{7}l < x < l. \end{cases}$

2.4. В точке $x=0$ однородной струны ($-l<x<l$) с закрепленными концами имеется шарик, масса которого m. Определить частоты собственных колебаний и форму стоячих волн струны.

2.5. Найти частоты продольных колебаний однородного цилиндрического стержня длины l, один конец которого закреплен, а на другом (свободном) имеется сосредоточенная масса m.

2.6. Найти в одномерном приближении частоты продольных колебаний конического стержня (рис.1.2), если 1) его торцы закреплены; 2) торец $x=0$ закреплен, а торец $x=l$ свободен.

2.7. Найти в одномерном приближении собственные частоты продольных колебаний упругого стержня ($0 < x < l$), имеющего форму правильной усеченной птрамиды, торец $x=l$ которого свободен, а торец $x=0$ закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k; площадь торца $x=0$ равна S_0, длина неусеченной пирамиды l_0.

2.8. На однородный цилиндрический стержень с прямоугольным поперечным сечением действует продольная сила $F\mathbf{e_x}$, приложенная к свободному торцу $x=0$, а другой торец закреплен.

Если сила F меньше некоторой критической величины F_k, то стержень находится в состоянии устойчивого равновесия (относительно достаточно малых поперечных возмущений) и остается прямолинейным. В случае $F>F_k$ прямолинейная форма становится неустойчивой и происходит изгиб стержня. Определить величину критической силы F_k.

2.9. Найти собственные частоты поперечных колебаний упругого стержня ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.7), если 1) его торцы жестко закреплены; 2) торец $x=0$ жестко закреплен, а торец $x=l$ свободен; 3) оба торца закреплены шарнирно.

2.10. Найти частоты собственных крутильных колебаний однородного упругого вала ($0<x<l$), торец $x=0$ которого закреплен жестко, а торец $x=l$ — упруго посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k.

2.11. Определить частоты собственных крутильных колебаний однородного упругого вала ($-l<x<l$), на каждом конце которого имеется тонкий диск с моментом инерции K.

2.12. Найти в акустическом приближении собственные частоты радиальных колебаний идеального газа в сферическом сосуде, радиус которого равен r_0.

2.13. Решить следующие задачи на собственные значения

$$\Delta R + \lambda R = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r},$$
$$1.\ R(r_1) = R(r_2) = 0; \quad 2.\ R(r_1) = R'(r_2) = 0;$$
$$3.\ R'(r_1) = R(r_2) = 0; \quad 4.\ R'(r_1) = R'(r_2) = 0.$$

и найти квадрат нормы собственных функций.

2.14. Найти в акустическом приближении собственные частоты радиальных колебаний идеального газа, заполняющего сферический слой ($r_1<r<r_2$).

2.15. Определить частоты звуковых колебаний идеального газа в трубке ($0<x<l$) (задача 1.211), имеющей форму усеченного кругового конуса с основаниями $S(0)=S_1$, $S(l)=S_2$, $S_1<S_2$ (конический рожок).

2.16. Решить предыдущую задачу для трубки, площадь поперечного сечения которой $S(x)=S_0e^{\alpha x}$ (экспоненциальный рожок).

2.17. Сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3 заполнен идеальным газом. Найти частоты собственных звуковых колебаний газа.

2.18. Определить собственные частоты колебаний прямоугольной мембраны ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$), закрепленной по краю. В случае $l_1=l_2=l$ найти узловые линии колебания с частотой 1) $\pi a\sqrt{5}/(2l)$; 2) $\pi a\sqrt{5}/l$, если начальные скорости равны нулю, а начальные смещения такие, что *a.* $u_0(x,y)=u_0(y,x)$; *b.* $u_0(x,y)=-u_0(y,x)$.

2.19. Определить собственные частоты колебаний квадратной мембраны со стороной l, три стороны которой закреплены, а четвертая свободна.

2.20. Найти собственные частоты электрических колебаний в линии без искажения длины l с заземленными концами.

2.21. Определить собственные частоты электрических колебаний в линии, длина которой l с параметрами $L, C(R=G=0)$, если один конец линии заземлен непосредственно, а другой — через сосредоточенную 1) индуктивность L_0; 2) емкость C_0.

2.22. Определить плотность переменного тока в полупространстве (задача 1.367.)

2.23. В однородном проводящем слое ($|z|<l$) течет переменный ток J (задача 1.368.) Определить плотность тока j и удельное сопротивление ρ проводника при больших частотах ($pl \gg 1$).

2.24. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет канал с прямоугольным поперечным сечением; длина канала l, глубина $h \gg l$. В результате внешнего воздействия на поверхность жидкости в ней возникают одномерные (вдоль канала) гравитационные волны малой амплитуды. Определить частоту и форму волн.

2.25. Определить частоты гравитационных волн малой амплитуды в идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей прямоугольный бассейн 1) бесконечной глубины; 2) глубины h ($h \gg \lambda$).

2.26. Полупространство $z<0$ заполнено идеальной несжимаемой жидкостью. Показать, что на ее поверхности могут распространяться волны малой амплитуды и найти их скорость.

2.27. Решить предыдущую задачу для неограниченного бассейна, глубина которого h (h много больше длины волны).

2.28. Найти скорость гравитационных волн малой амплитуды, распространяющихся по поверхности раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, одна из которых имеет плотность ρ_1 и заполняет полупространство $z>0$, а другая с плотностью $\rho_2 > \rho_1$ заполняет полупространство $z<0$.

2.29. Вследствие вращения Земли происходит периодическое изменение уровня воды в водоемах, что приводит к возникновению приливных волн в каналах, сообщающихся с водоемами. Пусть в устье $x=l$ канала ($0<x<l$), глубина которого $h \ll l$, уровень воды изменяется по закону $\zeta(l,t) = A\cos\omega t$. Считая воду идеальной несжимаемой жидкостью, определить установившиеся колебания воды в канале, если $\omega l \le \sqrt{gh}$, а амплитуда $A \ll h$.

2.30. Стационарная диффузия нейтронов в однородном слое ($|x|<l$) сопровождается их поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$); концентрация нейтронов на граничных плоскостях поддерживается при одном и том же постоянном значении. Найти отношение χ максимальной концентрации к ее среднему (по объему) значению.

2.31. Стационарная диффузия нейтронов в однородном шаре, радиус которого r_0, сопровождается их поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$); на поверхности шара поддерживается постоянная концентрация нейтронов. Найти отношение χ максимальной концентрации к ее среднему (по объему) значению.

2.32. Слой ($0<x<l$) однородного замедлителя, слабо поглощающего нейтроны ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$), находится в вакууме. Внутрь слоя в единицу времени через единицу площади поверхности $x=0$ поступает q_0 нейтронов. Решить задачу стационарной диффузии при условии 1) для плотности потока $\Phi(x)$ нейтронов на экстраполированной границе $x=\tilde{l}$; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности $x=0$. Сравнить результаты.

2.33. Шар, радиус которого r_0, изготовлен из замедлителя, слабо поглощающего нейтроны ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$), и находится в вакууме. В центре шара действует точечный изотропный источник нейтронов мощности Q_0. Решить задачу стационарной диффузии при условии 1) для плотности потока $\Phi(r)$ нейтронов на экстраполированной границе $r=\tilde{r}_0$; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности $r=r_0$. Сравнить результаты.

2.34. Образец в форме шара помещен в изотропное нейтронное поле Φ_0. При условиях задачи 1.172 найти плотность потока нейтронов $\Phi(r)$ в шаре и вычислить отношение числа нейтронов, прошедших образец (без поглощения), к числу нейтронов на поверхности S образца (коэффициент прохождения)

$$\gamma = \frac{4}{\Phi_0 S} \int\limits_S \left(\frac{\Phi}{4} - \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds. \tag{2.16}$$

2.35. Слой ($|x|<l$) находится в изотропном нейтронном поле Φ_0. При условиях задачи 1.172 найти плотность потока нейтронов $\Phi(x)$ в слое и вычислить коэффициент прохождения γ (2.16).

2.36. В тонком цилиндрическом образце ($|x|<l$) с непроницаемой боковой поверхностью происходит диффузия нейтронов с размножением. Определить в диффузионном приближении критическую длину образца, поставив условие 1) для плотности потока $\Phi(r)$ нейтронов на экстраполированной границе; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на торцах образца.

2.37. В среде, занимающей область Ω, происходит диффузия нейтронов с размножением. Найти в диффузионном приближении критический размер области, если она представляет собой 1) слой; 2) бесконечно длинный брус с квадратным поперечным сечением; 3) куб, поставив условие а) для плотности потока Φ нейтронов на экстраполированной границе; b) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности Ω.

2.38. Найти в диффузионном приближении критический радиус сферического реактора, находящегося в вакууме, поставив условие 1) для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности реактора.

2.39. Внутри сферического реактора ($r<r_2$) имеется сферическая полость ($r<r_1<r_2$). Определить в диффузионном приближении критический радиус r_2, поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе.

2.40. Внутри сферического реактора ($r<r_2$) находится сильный поглотитель ("черное"тело) в форме шара ($r_1<r<r_2$). Определить в диффузионном приближении критический радиус r_2, поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе реактора.

2.41. Сферический реактор, радиус которого r_0, окружен отражателем в форме сферического слоя ($r_0<r<r_1$), где r_1 — экстраполированный радиус. Сечения поглощения и рассеяния соответственно равны Σ_a^C и Σ_s^C в активной зоне, Σ_c^R и Σ_s^R в отражателе.

Определить в диффузионном приближении критический радиус r_{0k} реактора, поставив условие для плотности потока нейтронов на внешней экстраполированной границе реактора. При условии $D_C = D_R$ рассмотреть случаи 1) $r_1 = \infty$; 2) $\Sigma_c^R = 0$ и сравнить критический радиус r_{0k} с критическим радиусом r_k "голого"реактора (см. задачу 2.38 п.1.).

2.42. Реактор в форме параллелепипеда ($|x|<l_l$, $|y|<l_2$, $|z|<l_3$) с торцевыми отражателями ($|x|<l_l$, $|y|<l_2$, $l_3<|z|<d$) находится в критическом состоянии. Получить в диффузионном приближении условие критичности, если сечения поглощения и рассеяния соответственно равны Σ_a^C и Σ_s^C в активной зоне, Σ_c^R и Σ_s^R — в отражателе. Условие для плотности потока нейтронов поставить на внешней экстраполированной границе, допуская, что экстраполированные длины $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ для реактора и отражателя одинаковы.

2.43. Найти в диффузионно-возрастном приближении критические размеры 1) слоя ($|x|<l$); 2) куба ($|x|<l$, $|y|<l$, $|z|<l$), поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе; делением быстрыми нейтронами пренебречь.

2.44. Найти в диффузионно-возрастном приближении критический радиус сферического реактора, поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе; делением быстрыми нейтронами пренебречь.

2.45. Решить задачу 2.43, учитывая деление ядер быстрыми нейтронами.

2.46. Определить критический радиус сферического реактора (см. задачу 2.44) с учетом деления, осуществляемого быстрыми нейтронами.

2.47. Проводящий слой, ограниченный плоскостями $x=\pm l$ находится в продольном однородном магнитном поле. В момент времени $t=0$ поле отключается. Найти характерное время убывания t_k поля в проводнике.

2.48. Длинный цилиндрический проводник с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) находится в продольном однородном магнитном поле. В момент времени $t=0$ поле отключается. Определить характерное время убывания t_k поля в проводнике.

2.49. Найти частоты собственных колебаний электромагнитного поля в резонаторе, имеющем форму параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3.

2.50. Решить задачу о распространении TE- и TM-волн вида

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(x)e^{i(\beta z-\omega t)}, \qquad \mathbf{H} = \mathcal{H}(x)e^{i(\beta z-\omega t)} \tag{2.17}$$

в пространстве между идеально проводящими параллельными плоскостями $x=0$ и $x=l$. Пропускает ли такой волновод TEM-волну?

2.51. Показать, что в идеально проводящем волноводе с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) могут распространяться TE- и TM-волны. Найти наименьшую частоту (частоту отсечки) волны, которую пропускает волновод.

2.52. Оптический волновод (см. задачу 1.380) состоит из трех различных слоев с показателями преломления $n_1>n_2\geq n_3$ соответственно при $-l < z < 0, z < -l, z > 0$. Решить задачу о распространении TE- и TM-мод вида (2.17). Доказать, что нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда величины β и $k=\omega/c$ удовлетворяют некоторому уравнению, называемому характеристическим. Показать, что это уравнение имеет счетное множество решений $\beta=\varphi_j(k)$, $j\in\mathbf{N}$, каждому из которых соответствует направляемая мода, и построить графики функций $\beta=\varphi_j(k)$. Найти частоту отсечки j-й моды и определить число мод с фиксированной частотой, которые пропускает волновод.

2.53. Найти компоненты электромагнитного поля в TE- и TM-модах вида (2.17), распространяющихся в трехслойном волноводе

(см. предыдущую задачу), если средний по времени поток энергии (на единицу длины оси $0y$) вдоль оси $0z$ в направляемой моде равен W_0.

2.54. Решить задачу о распространении в TE- и TM-мод в плоском симметричном световоде (см. задачу 1.380). Определить отношение средних по времени потоков энергии (на единицу длины оси Oy) в направлении оси Oz — потока в сердцевине (W_1) и полного потока (W) для каждой моды ($P_1{=}W/W_1$ — коэффициент локализации). Показать, что направляемая мода, частота которой велика по сравнению с частотой отсечки, локализуется в сердцевине волновода.

Пример 2.2. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы в потенциальном ящике (1.30). Вычислить среднее значение ее координаты x_{cp} в n-м состоянии.

Задача состоит в определении собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{H}$. В самом деле, подстановка $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{r})\mathbf{T}(\mathbf{t})$ в уравнение Шредингера $i\hbar\Psi_t = \mathcal{H}\Psi$ приводит к тождеству

$$i\hbar\frac{T'}{T} = \frac{\mathcal{H}\psi}{\psi}{=}E.$$

Следовательно, уравнение $\mathcal{H}\psi{=}E\psi$ и условия, которым удовлетворяет функция ψ, представляют собой задачу на собственные значения для оператора $\mathcal{H}$. Пусть E_n, ψ_n определены, тогда $T_n{=}A_n exp(-iE_nt/\hbar)$ и $\Psi_n = \psi_n T_n$. Плотность вероятности $|\Psi_n|^2{=}|\psi_n|^2|T_n|^2{=}|\psi_n|^2$ не зависит от t, то есть волновая функция $\Psi_n(\mathbf{r},\mathbf{t})$ описывает стационарное состояние с энергией E_n.

В данном случае задача на собственные значения имеет вид (см. пример 1.8.):

$$\psi'' + k^2\psi{=}0, \quad -l < x < l, \quad k^2{=}\frac{2mE}{\hbar^2},$$
$$\psi(-l){=}\psi(l){=}0.$$

Ненулевое решение $\psi(x)=A\sin k(l+x)+B\cos k(l+x)$ должно удовлетворять граничным условиям $\psi(-l)=B=0,\ \psi(l)=A\sin 2kl=0$. Так как $A\neq 0$, то $2kl=\pi n$. Таким образом,

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{x}{l}\right),\qquad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{8ml^2}n^2,\qquad n\in\mathbf{N}.$$

Среднее значение

$$x_{cp}=\int_{-l}^{l}x|\psi_n|^2dx=0.$$

2.55. Определить волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы, находящейся 1) в двухмерном; 2) в трехмерном потенциальном ящике.

2.56. В точке $x=0$ потенциальной ямы (1.30) находится полупроницаемая потенциальная перегородка с коэффициентом проницаемости α (предельная форма прямоугольного потенциального барьера высоты U между точками $x=-\varepsilon$, $x=\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$, если $2mU\varepsilon/\hbar^2=\alpha$, где U — высота барьера). Определить уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в таком поле.

2.57. Найти уровни энергии связанных состояний частицы в потенциальной яме вида

$$U(x)=\begin{cases}\infty & , \quad x<0,\\ 0 & , \quad 0<x<l,\\ U_0 & , \quad l<x,\end{cases}$$

где $U_0>0$. Показать, что число таких уровней конечно. При каком условии не существует связанных состояний?

2.58. Найти уровни энергии связанных состояний частицы в потенциальной яме вида

$$U(x)=\begin{cases}0 & , \quad |x|<l,\\ U_0 & , \quad |x|>l,\end{cases}$$

где $U_0>0$. Показать, что число связанных состояний конечно и при любом $U_0>0$ имеется связанное состояние. При каком условии в яме существует только один энергетический уровень?

2.59. Пусть $\Delta_1=(-l_1,\,0),\ \Delta_2=(0,\,l_2),\ \Delta=\Delta_1\bigcup\Delta_2,$

$$D(x)=\begin{cases} D_1, & x\in\Delta_1,\\ D_2, & x\in\Delta_2,\end{cases}\qquad C(x)=\begin{cases} C_1, & x\in\Delta_1,\\ C_2, & x\in\Delta_2.\end{cases}$$

На линейном множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ функций $X(x)$, принадлежащих классу $C^2(\Delta_1)\bigcap C^2(\Delta_2)\bigcap C^1(\overline{\Delta_1})\bigcap C^1(\overline{\Delta_2})$ и таких, что

$$\begin{aligned} &X'(-l_1)=X'(l_2)=0,\\ &\frac{1}{C_1}X(-0)=\frac{1}{C_2}X(+0),\quad D_1X'(-0)=D_2X'(+0), \end{aligned}\tag{2.18}$$

задан оператор

$$\mathcal{L}=-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}.$$

Доказать, что оператор $\mathcal{L}$ обладает простыми собственными значениями $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, его собственные функции ортогональны на Δ с весом $\rho(x)=1/c(x)$. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\mathcal{L}$.

2.60. Решить предыдущую задачу, заменив (2.18) условиями

$$D_1X'(-0)=D_2X'(+0)=\alpha\left(\frac{X(+0)}{C_2}-\frac{X(-0)}{C_1}\right),\qquad \alpha>0.$$

Пример 2.3. Струна $(0<x<l)$ с закрепленными концами находится в статическом равновесии под действием постоянной силы $F_0\,\mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x_0\in(0,\,l)$. В момент времени $t=0$ действие силы прекращается. Найти профиль струны в момент времени $t>0$.

Функция $u(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,\\ &u(0,t)=u(l,t)=0,\\ &u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=0, \end{aligned}$$

где $u_0(x)$ удовлетворяет условиям

$$u_0'' + \frac{F_0}{T_0}\delta(x - x_0) = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$u_0(0) = u(l) = 0.$$

Решение задачи дано в примере 2.1; оно представляет собой ряд (2.14), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2.14)

$$A_n = \frac{2}{l}(u_0,\, X_n), \qquad B_n = 0.$$

Для определения A_n необязательно отыскивать $u_0(x)$ в явном виде; достаточно применить свойство (10.34) оператора $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ и воспользоваться уравнением (2.13):

$$A_n = -\frac{2}{l\lambda_n}(u_0,\, X_n'') = -\frac{2}{l\lambda_n}(u_0'',\, X_n(x)) =$$
$$= \frac{2}{l\lambda_n}\left(\frac{F_0}{T_0}\,\delta(x - x_0),\, X_n(x)\right) = \frac{2F_0 X_n(x_0)}{lT_0\lambda_n}.$$

Таким образом,

$$u(x,t) = \frac{2lF_0}{\pi^2 T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x_0}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n a t}{l}.$$

2.61. Точку $x=0$ струны $(-l<x<l)$ с закрепленными концами смещают вдоль оси $0u$ на расстояние u_0 и отпускают без начальной скорости. Решить задачу о движении струны.

2.62. Струна $(-l<x<l)$ находится в статическом равновесии под действием трех сил (рис.2.3). В момент $t=0$ действие сил прекращается. Решить задачу о движении струны.

2.63. Однородный цилиндрический стержень $(0<x<l)$, торец $x=0$ которого упруго закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, находится в статическом равновесии под действием постоянной силы $F_0\,\mathbf{e}_u$, приложенной к свободному торцу $x=l$. Определить движение стержня после прекращения действия силы.

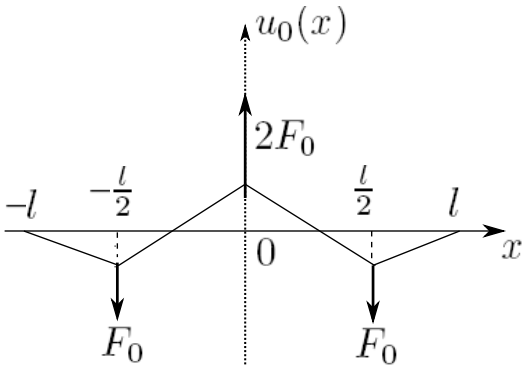

Рис. 2.1

2.64. Неподвижный однородный стержень ($0<x<l$), расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, получает импульс I в результате продольного удара в торец $x=0$. Решить задачу о движении стержня.

2.65. Конец $x=l$ линии ($0<x<l$) с параметрами $R, C, L(G=0)$ заземлен, а к другому концу подключена батарея с постоянной э.д.с. E_0; в линии течет постоянный ток. В момент $t=0$ батарею отключают, а конец $x=0$ заземляют. Определить потенциал и ток в линии.

2.66. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$), торцы которого закреплены упруго посредством пружинок с коэффициентами жесткости k_1 (при $x=0$) и k_2 (при $x=l$), получает импульс I в результате продольного удара в торец $x=0$. Решить задачу о движении стержня, если до удара он был недеформирован и находился в покое.

Пример 2.4. Определить концентрацию $u(x,t)$ газа, диффундирующего в трубке ($-l<x<l$), на концах которой концентрация равна нулю, если начальная концентрация $u_0(x)=u_0(1-x/l)$.

Уравнение диффузии и дополнительные условия формируют задачу для $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_t{=}Du_{xx}, \quad -l<x<l, \;\; 0<t,\\ &u(0,t){=}u(l,t){=}0,\\ &u(x,t){=}u_0(x). \end{aligned}$$

В результате разделения переменных $u(x,t){=}X(x)T(t)$ получается уравнение $T'{+}D\lambda T{=}0$ и задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} &X''+\lambda X{=}0, \quad -l<x<l,\\ &X(-l){=}X(l){=}0, \end{aligned}$$

собственные значения и собственные функции которой (см. пример 2.2)

$$\lambda_n{=}\left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2, \qquad X_n(x){=}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{x}{l}\right), \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Так как

$$T_n(t){=}C_n e^{-D\lambda_n t},$$

то

$$u(x,t){=}\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) e^{-D\lambda_n t}.$$

Вследствие ортогональности собственных функций

$$C_n=\frac{(u_0,\,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{1}{l}(u_0,\,X_n).$$

Интеграл (u_0, X_n) можно вычислить непосредственно или с помощью следующего приема. Если заменить функцию $u_0(x)$ на

$$\tilde{u}_0(x){=}\left\{\begin{array}{ccc} u_0(x) & , & -l<x\le l,\\ 0 & , & x{=}-l, \end{array}\right. \qquad \tilde{u}_0'(x)\equiv u_0'(x),$$

то численная величина интеграла останется той же. Следовательно, (см. пример 2.3.)

$$\begin{aligned}(u_0,\, X_n) &= (\tilde{u}_0,\, X_n) = -\frac{1}{\lambda_n}(\tilde{u}_0,\, X_n'') = -\frac{1}{\lambda_n}(\tilde{u}_0'',\, X_n) = \\ &= -\frac{1}{\lambda_n}(2u_0\delta'(x+l),\, X_n(x)) = \frac{2u_0 X_n'(-l)}{\lambda_n} = \frac{2u_0}{\sqrt{\lambda_n}}.\end{aligned}$$

Итак,

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\left(x+\frac{x}{l}\right)e^{-(\frac{\pi n}{2l})^2 Dt}.$$

2.67. Начальная концентрация частиц в трубке $(0<x<l)$ равна нулю при $0<x<l/2$, и u_0 при $l/2<x<l$. Решить задачу диффузии, если конец $x=l$ закрыт непроницаемой перегородкой, а концентрация на конце $x=0$ равна нулю.

2.68. В трубке $(0<x<l)$ диффундирует неустойчивый газ (распад пропорционален концентрации), начальная концентрация которого u_0. Найти концентрацию газа в трубке, если конец $x=0$ закрыт, а на другом конце имеется полупроницаемая перегородка; концентрация газа во внешней среде равна нулю.

2.69. Найти температуру тонкого стержня $(0<x<l)$ с теплоизолированными торцами, через боковую поверхность которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры; начальная температура стержня $u_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l}$.

2.70. Тонкий стержень $(0<x<l)$ находится в стационарном тепловом состоянии, при этом торец $x=l$ имеет температуру u_1, а на торце $x=0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. С момента $t=0$ температура торца $x=l$ становится равной нулю. Решить задачу теплопроводности.

2.71. В сечении $x_0 \in (0,\, l)$ стержня $(0<x<l)$ с теплоизолированной боковой поверхностью длительное время действует источник

тепла постоянной мощности Q_0. Определить температуру стержня после отключения источника, если 1) торец $x{=}l$ имеет нулевую температуру; 2) через торец $x{=}l$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

2.72. Через боковую поверхность и торец $x{=}0$ тонкого стержня $(0{<}x{<}l)$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, а на торец $x{=}l$ длительное время подается тепловой поток постоянной плотности q_0. В момент $t{=}0$ торец $x{=}l$ покрывают теплоизоляцией. Решить задачу теплопроводности.

2.73. Дана линия $(0{<}x{<}l)$ с параметрами R, $(G{=}L{=}0)$, один конец $(x{=}0)$ которой заземлен непосредственно, а другой — через сосредоточенное сопротивление R_0. Найти потенциал линии при $t{>}0$, если начальный потенциал $u_0(1 - x/l)$.

2.74. Дана линия $(0{<}x{<}l)$ с параметрами $R, C, G\,(L{=}0)$, концы которой заземлены. Найти потенциал $u(x,t)$ при $t{>}0$, если

$$u(x,0){=}\begin{cases} u_0, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ -u_0, & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

2.75. К концу $x{=}0$ линии $(0{<}x{<}l)$ с параметрами $R, C\,(L{=}G{=}0)$ подключена через сопротивление R_1 батарея с э.д.с. E_0, а на другом конце находится сопротивление R_2; в линии течет стационарный ток. Найти силу тока после отключения батареи и замыкания линии.

2.76. Определить волновую функцию $\Psi(x,t)$ частицы, находящейся в потенциальной яме (1.30), если

$$1.\ \ \Psi(x,0){=}A\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}; \qquad 2.\ \ \Psi(x,0){=}A\sin^3\frac{2\pi x}{l}.$$

Какова вероятность P_n обнаружить частицу в n-м стационарном состоянии?

2.77. Найти волновую функцию $\Psi(x,t)$ частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме (1.30), если

$$1.\ \Psi(x,0)=A(1-x^2/l^2)\,; \qquad 2.\ \Psi(x,0)=Ax(1-x^2/l^2).$$

Определить вероятность $P(E=E_n)$ того, что энергия частицы равна E_n.

Пример 2.5. Один торец ($x=0$) упругого вала ($0<x<l$) закреплен, а другой — свободен. На свободном торце находится тонкий диск с осевым моментом инерции K, жестко связанный с валом. Диск поворачивают на небольшой угол u_0 и отпускают без начальной скорости. Решить задачу о крутильных колебаниях вала.

Если считать диск частью вала, то момент инерции на единицу длины равен $K_0+K\delta(x-l)$. В этом случае задача ставится следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\rho(x)u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ 0<x<l,\ 0<t, \quad \rho(x)=1+\frac{K}{K_0}\delta(x-l),\\
&u(0,t)=u_x(l,t)=0,\\
&u(x,0)=u_0\frac{x}{l}, \quad u_t(x,0)=0.
\end{aligned}$$

Подстановка $u(x,t)=X(x)T(t)$ в уравнение и в граничные условия приводит к задаче Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned}
&X''+\lambda\rho(x)X=0, \quad 0<x<l,\\
&X(0)=X(l)=0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

и уравнению $T''+a^2\lambda T=0$. Множитель $\rho(x)$ указывает на то, что собственные функции ортогональны на отрезке $[\,0,\,l\,]$ с весом$\rho(x)$. Преобразование задачи (2.19) к эквивалентной (см. пример 1.4.)

$$\begin{aligned}
&X''+\lambda X=0, \quad 0<x<l,\\
&X(0)=0, \quad X'(l)-\lambda\frac{K}{K_0}X(l)=0
\end{aligned}$$

позволяет найти $X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$. Из краевых условий

$$X(0)=B=0, \qquad \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l-\lambda\frac{K}{K_0}X(l)=0$$

вытекает, что собственные значения задачи (2.49) определяются из уравнения $\mu\, tg\,\mu=p$, в котором $\mu=l\sqrt{\lambda}$, $p=lK_0/K$. Пусть μ_n, $n\in\mathbf{N}$ — положительные корни уравнения, тогда $\lambda_n=(\mu_n/l)^2$,

$$X_n(x)=\sin\frac{\mu_n}{l}x, \quad T_n(t)=A_n\cos\frac{\mu_n a}{l}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{l}t.$$

Решение запишется в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n a}{l}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{l}t\right)X_n(x).$$

При $t=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)=u_0\frac{x}{l}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n a}{l}B_nX_n(x)=0,$$

откуда, согласно формулам (2.11)

$$A_n=\frac{(u_0\frac{x}{l},X_n}{\|\,X_n\,\|^2}=(-1)^{n+1}\frac{2pu_0\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}, \qquad B_n=0.$$

2.78. Торец $x=0$ круглого вала $(-l<x<l)$ закреплен, а другой торец свободен. В сечении $x=l/2$ имеется тонкий диск с моментом инерции K. Вал находится в статическом равновесии под действием момента сил $M_0\mathbf{e}_x$, приложенного к диску. Решить задачу о крутильных колебаниях вала после прекращения действия момента.

2.79. Однородный цилиндрический стержень $(-l<x<l)$ с сосредоточенной массой m на торце $x=0$ находится на гладкой горизонтальной поверхности. В результате продольного удара в торец $x=0$ стержень получает импульс I. Решить задачу о движении стержня.

2.80. В точке $x{=}0$ струны $(-l{<}x{<}l)$ с закрепленными концами находится шарик, масса которого m. В момент $t{=}0$ шарик получает ударный импульс $I\,\mathbf{e}_u$. Определить скорость шарика.

2.81. Струна $(-l{<}x{<}l)$ с шариком в точке $x{=}0$ находится в состоянии покоя; коны струны закреплены. Шарик, масса которого m, смещают в направлении оси $0u$ и отпускают без начальной скорости. Решить задачу о движении струны.

2.82. Струна, рассмотренная в предыдущей задаче, имеет начальный профиль $h\frac{x}{l}(1-\frac{|x|}{l})$ и нулевую начальную скорость. Найти профиль струны при $t{>}0$.

2.83. Неоднородная струна $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами, плотность которой

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0<x<x_0,\\ \rho_2, & x_0<x<l,\end{cases}$$

получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара в точку $x{=}x_0$. Решить задачу о движении струны.

2.84. Один конец $(x{=}0)$ линии $(0{<}x{<}l)$ с параметрами L, C $(R{=}G{=}0)$ заземлен, а на другом — имеется конденсатор C_0 с зарядом Q_0. В момент $t{=}0$ конденсатор заземляется; найти ток через конденсатор.

2.85. На торце $x{=}0$ однородного цилиндрического стержня, длина которого l, имеется тонкая пластинка с теплоемкостью C_0, торец $x{=}l$ поддерживается при нулевой температуре, а остальная поверхность теплоизолирована. Найти температуру стержня при $t{>}0$, если при $t{=}0$ стержень и пластинка имели температуру u_0.

2.86. Цилиндрический стержень $(0{<}x{<}l)$ с теплоизолированной боковой поверхностью составлен из двух различных однородных стержней $(0{<}x{<}x_0)$ и $(x_0{<}x{<}l)$, физические характеристики которых ρ_1, C_1, k_1 и ρ_2, C_2, k_2 соответственно. В результате длительного нагревания торца $x{=}l$ тепловым потоком постоянной

плотности $\mathbf{q}= - q_0\mathbf{e}_u$ в стержне устанавливается стационарный тепловой режим, при этом торец $x=0$ поддерживается при 0^o. Определить температуру стержня после того, как торец $x=l$ теплоизолируют.

2.87. Один конец ($x=l$) линии ($0<x<l$) с параметрами R, C ($L=G=0$) заземлен, а на другом — находится конденсатор C_0 с зарядом Q_0. В момент $t=0$ конденсатор заземляется. Как будет изменяться заряд конденсатора?

2.88. Слой с непроницаемыми границами $x= - l_1$, и $x=l_2$ состоит из двух различных однородных слоев ($-l_1<x<0$) и ($0<x<l_2$) (см. задачу 1.157 п.1). Определить концентрацию $u(x,t)$ частиц, диффундирующих в слое, если начальная концентрация

$$u(x,0)=\begin{cases} u_1, & -l_1 < x < 0, \\ u_2, & 0 < x < l_2, \end{cases}$$

а отношение концентраций на границе $x=0$ пропорционально отношению предельных растворимостей. Найти также установившееся распределение частиц.

2.89. Решить предыдущую задачу в предположении, что поток частиц через границу $x=0$ пропорционален разности отношений u_1/c_1, u_2/c_2 (см. задачу 1.157 п.2). Показать, что установившееся распределение частиц будет таким же, как и в предыдущем случае.

Пример 2.6. Начальная температура шара с теплоизолированной поверхностью равна $u_0(r) = u_0(1 - r^2/r_0^2)$, радиус шара r_0,. Решить задачу теплопроводности.

В данном случае температура зависит от r и t и является решением задачи

$$\begin{aligned} &u_t = a^2\Delta u, \quad r \in B = \{r : r < r_0\}, \quad t > 0, \\ &u_r(r_0,t) = 0, \quad u(r,0) = u_0(r), \\ &u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B}) \cap C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned}$$

Пусть $u(r,t)=R(r)T(t)$; из тождества

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta R}{R}=-\lambda$$

следует, что $T(t)$ удовлетворяет уравнению $T'+a^2\lambda T=0$, а $R(r)$ — решение задачи на собственные значения

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dr}r^2\tfrac{dR}{dr}+\lambda r^2R=0,\quad r<r_0,\\&R'(r_0)=0,\quad R(r)\in C^2(r<r_0)\cap C^1(r\le r_0),\end{aligned}\tag{2.20}$$

собственные функции которой ортогональны на отрезке $[\,0,\,r_0\,]$ с весом r^2. Замена $R=X(r)/r$ преобразует задачу (2.20) к виду

$$\begin{aligned}&X''+\lambda X=0,\quad 0<r<r_0,\\&X(0)=0,\quad r_0X'(r_0)-X(r_0)=0.\end{aligned}$$

Условие при $r=0$ для функции $X=rR$ вытекает из ограниченности функции $R(r)$. Если $\lambda=0$, то $X_0=Ar+B$; граничные условия выполняются при $B=0$. Если $\lambda>0$, то уравнение имеет решение $X=A\sin\sqrt{\lambda}r+B\cos\sqrt{\lambda}r$; граничные условия будут выполнены при $B=0$, $\sin\sqrt{\lambda}r_0-r_0\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r_0=0$. Следовательно, $\lambda_n=(\mu_n/r_0)^2$, $n\in\mathbf{N}$, где $\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\mu=\mu$,

$$R_0(r)=r,\quad R_n(r)=\sin\frac{\mu_n}{r_0}r,\quad T_0(t)=C_0,\quad T_n(t)=C_ne^{-(\frac{\mu_n a}{r_0})^2t},$$

Квадрат нормы собственных функций

$$\|R_0\|=\frac{r_0^3}{3},\qquad \|R_n\|=\frac{r_0}{2}\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}.$$

Решение представляет собой ряд по собственным функциям

$$u(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nR_n(r)e^{-(\frac{\mu_n a}{r_0})^2t}.$$

При $t{=}0$

$$u_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(r),$$

откуда

$$A_n = \frac{(u_0, R_n)}{\|R_n\|} = \frac{\int_0^{r_0} u_0(r) R_n(r) r^2 dr}{\int_0^{r_0} R_n^2(r) r^2 dr}.$$

Для вычисления A_n можно применить прием, использованный в примере 2.4. Пусть $\tilde{u}_0(r){=}u_0(r)$ при $0{\le}r{\le}r_0$, $\tilde{u}'(r){=}u'(r)$ при $0{\le}r{<}r_0$, $\tilde{u}'(r_0){=}0$, тогда по формуле (10.40)

$$\Delta u_0(r) = -\frac{6u_0}{r_0^2} + \frac{2u_0}{r_0}\delta(r - r_0).$$

На основании свойства (10.44) при $n{>}0$

$$(u_0(r), R_n(r)) = -\frac{1}{\lambda_n}(u_0(r), \Delta R_n) = -\frac{1}{\lambda_n}(\Delta u_0(r), R_n(r)),$$

следовательно,

$$A_n = \frac{1}{\lambda_n \|R_n\|^2}\left[\frac{6u_0}{r_0^2}(1, R_n) - 2u_0 r_0 R_n(r_0)\right] - \frac{2u_0 r_0 R_n(r_0)}{\lambda_n \|R_n\|^2}$$

(первое слагаемое равно нулю в силу ортогональности собственных функций). В итоге

$$u(r,t) = \frac{2u_0}{5} + \frac{4u_0 r_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{1+\mu_n^2}}{\mu_n^3} \sin\frac{\mu_n}{r_0} r\, e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}.$$

2.90. Найти волновую функцию частицы, находящейся в сферической потенциальной яме

$$u(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < r_0, \\ \infty, & r_0 < r, \end{cases}$$

если волновая функция начального состояния $\frac{A}{r}\sin^3\frac{3\pi r}{r_0}$. Какова вероятность обнаружить частицу в основном состоянии?

2.91. В однородном шаре, радиус которого r_0, диффундирует неустойчивый газ (распад пропорционален концентрации), начальная концентрация которого u_0. Как будет меняться концентрация газа в шаре, если на поверхности шара она равна нулю при любом t?

2.92. В однородном шаре с полупроницаемой поверхностью происходит диффузия неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации), радиус шара r_0. Решить задачу диффузии, если начальная концентрация газа в шаре u_0, а концентрация вне шара при любом t равна нулю.

2.93. Поверхность шара, радиус которого r_0, поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна 1) $u_0(1 - r/r_0)$; 2) $u_0(1 - r^2/r_0^2)$. Решить задачу теплопроводности.

2.94. Через поверхность однородного шара, радиус которого r_0, происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой 0^o. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура шара равна $u_0(1 - \frac{r^2}{r_0^2})$.

2.95. Поверхности сферического слоя ($r_1<r<r_2$) поддерживаются при нулевой температуре, его начальная температура равна 1) u_0; 2) $u_0(\frac{r}{r_1} - 1)(1 - \frac{r}{r_2})$. Решить задачу теплопроводности.

2.96. Найти температуру сферического слоя ($r_1<r<r_2$), внутренняя поверхность которого поддерживается при 0^o, внешняя — теплоизолирована, а начальная температура $u_0(1 - r_1/r)$.

2.97. Найти температуру сферического слоя ($3<r<4$) с теплоизолированными поверхностями, начальная температура которого равна $\frac{A}{r}$.

2.98. Основание прямого кругового конуса, высота которого l, поддерживается при нулевой температуре, боковая поверхность теплоизолирована, начальная температура u_0. Решить задачу об охлаждении конуса при условии, что изотермические поверхности параллельны основанию (одномерное приближение).

2.99. В усеченном конусе (рис.1.3) с теплоизолированной боковой поверхностью устанавливается стационарный тепловой режим, при этом основания $x{=}0$ и $x{=}l$ имеют температуру u_0 и 0^o соответственно. С момента $t{=}0$ температура основания $x{=}0$ становится равной нулю. Решить задачу об охлаждении конуса, предполагая, что изотермические поверхности параллельны основаниям (одномерное приближение).

2.100. В процессе стационарной диффузии газа в однородном сферическом слое ($1{<}r{<}2$) через его поверхности проходит радиальный (в направлении от центра) поток частиц газа Q, равномерно распределенный по каждой из поверхностей. В момент времени $t{=}0$ поверхности слоя покрывают непроницаемой для частиц оболочкой. Решить задачу диффузии.

2.101. Решить задачи:
$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0,$
$u(r_1, t) = u(r_2, t) = 0,$
1) $u(r, 0) = \frac{A(r_2-r)(r-r_1)}{r}, \quad u_t(r, 0) = 0;$
2) $u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = A(r_2 - r)(r - r_1).$
где Δ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^3$.

2.102. Решить задачу:
$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0,$
$u(r_1, t) = u_r(r_2, t) = u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = A(r - r_1)(\frac{r_2^2}{r_1 r} - 1).$
где Δ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^3$.

2.103. Упругий стержень имеет форму усеченной пирамиды, высота которой l, площади оснований $S(0){=}S_1$, $S(l){=}S_2$ (рис.1.4); торец $x{=}0$ закреплен, торец $x{=}l$ свободен. В результате продольного удара в свободный торец стержень получает импульс I. Решить задачу о колебаниях стержня, пренебрегая деформацией поперечных сечений (одномерное приближение).

Пример 2.7. В проводящей прямоугольной пластинке толщины h протекает постоянный ток J (см. задачу1.346). Определить плотность тока в пластинке.

Потенциал электростатического поля в пластинке определяется условиями (см. задачу 1.346)

$$\Delta u(x,y)=0, \quad |x|<l_1, \ \ |y|<l_2,$$
$$u_x(\pm l_1,y)=-\frac{J}{h\sigma}\,\delta(y), \ \ u_y(x,\pm l_2)=0.$$

Пусть $u(x,y)$=$X(x)Y(y)$, тогда для функции $Y(y)$ можно поставить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} &Y''+\lambda Y=0, \quad |y|<l_2, \\ &Y'(-l_2)=Y'(l_2)=0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

а функция $X(x)$ — решение уравнения

$$X''-\lambda X=0. \tag{2.22}$$

Общее решение уравнения (2.21)

$$Y(y)=\begin{cases} A_0+B_0y, & \lambda=0 \\ A\sin\sqrt{\lambda}(l_2+y)+B\sin\sqrt{\lambda}(l_2+y), & \lambda>0 \end{cases}$$

удовлетворяет граничным условиям при B_0=B=0, $\sin 2\sqrt{\lambda}\,l_2$=0, откуда

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{2l_2}\right)^2, \qquad Y_n(y)\cos\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{y}{l_2}\right), \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Каждому λ_n соответствует решение уравнения (2.22)

$$\begin{aligned} X_0(x) &= A_0+B_0x, \\ X_n(x) &= A_n sh\,\sqrt{\lambda_n}\,x+B_n ch\,\sqrt{\lambda_n}\,x, \quad n\in\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Решение задачи имеет вид

$$u(x,y)=A_0+B_0x+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n sh\sqrt{\lambda_n}x+B_n ch\sqrt{\lambda_n}x)Y_n(y).$$

При $x=\mp l_1$

$$-\frac{J}{h\sigma}\delta(y)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\lambda_n}A_n ch\sqrt{\lambda_n}l_1\overline{+}\sqrt{\lambda_n}B_n sh\sqrt{\lambda_n}l_1)Y_n(y),$$

следовательно,

$$B_0=-\frac{J}{2hl_2\sigma},\quad B_n=-\frac{JY_n(0)}{hl_2\sigma\sqrt{\lambda_n}ch\sqrt{\lambda_n}l_1},\quad A_n=0,\quad n\in\mathbf{N}.$$

В результате

$$u(x,y)=A_0-\frac{J}{h\sigma}\left(\frac{x}{2l_2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{\pi nx}{l_2}\cos\frac{\pi ny}{l_2}}{n\,ch\frac{\pi nl_1}{l_2}}\right),\qquad \mathbf{j}=-\sigma\nabla u.$$

2.104. Найти электростатический потенциал бесконечного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$), если грани $x=l_1$ и $y=l_2$ поддерживаются при потенциалах u_1 и u_2 соответственно, а грани $x=0$ и $y=0$ — при нулевом потенциале.

2.105. Найти форму мембраны ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$), находящейся в статическом равновесии, если сторона $x=0$ имеет профиль $u_0\frac{y}{l_2}(1-\frac{y^2}{l_2^2})u_0$, сторона $x=l_1$ свободна, а стороны $y=0$ и $y=l_2$ закреплены в положениях $u(x,0)=0$ и $u(x,l_2)=0$.

2.106. Найти стационарную температуру полубесконечной пластинки ($0<x<\infty$, $|y|<l$, $|z|<h$), через грань $x=0$ которой поступает тепловой поток плотности 1) $q(y)=q_0\sin(2\pi y/l)$; 2) $q(y)=q_0$, грани $y=\pm l$ имеют нулевую температуру, а остальная поверхность теплоизолирована.

2.107. Однородный параллелепипед ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$, $|z|<l_3$) изготовлен из материала с проводимостью σ. Постоянный ток J втекает через центр грани $z=-l_3$ и вытекает через центр грани $z=l_3$. Определить электростатический потенциал и плотность тока в параллелепипеде.

Пример 2.8. Найти стационарную температуру толстостенной трубы ($r_1<r<r_2$), внешняя поверхность которой поддерживается при температуре $f(\varphi)=u_0\cos\varphi$, а внутренняя — теплоизолирована.

Задачу естественно поставить в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\quad r_1<r<r_2,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1}=0,\quad u(r_2,\varphi)=u_0\cos\varphi.$$

Подстановка $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ приводит к тождеству

$$\frac{r\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr}}{R}+\frac{\Phi''}{\Phi}=0.$$

Функция $\Phi(\varphi)$, являющаяся непрерывной, а поэтому периодической с периодом 2π, удовлетворяет условиям

$$\Phi''+\lambda\Phi=0,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$
$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),$$

которые определяют задачу на собственные значения. Решение уравнения $\Phi=A\varphi+B$ при $\lambda=0$ и $\Phi=A\sin\sqrt{\lambda}\varphi+B\cos\sqrt{\lambda}\varphi$ при $\lambda>0$ имеет период 2π при $\sqrt{\lambda}=n$, $n\in\mathbf{N}_0$, и только при таких λ. Собственным значениям $\lambda_n=n^2$ соответствуют собственные функции $\Phi_n(\varphi)=a_n\sin n\varphi+b_n\cos n\varphi$. Функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr}-n^2R=0,$$

общее решение которого в зависимости от n имеет вид

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r, \quad R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}, \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Решение задачи выражается рядом по собственным функциям

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) \sin n\varphi \right], \quad (2.23)$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий при $r{=}r_1$ и $r{=}r_2$:

$$\frac{B_0}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(nA_n r_1^{n-1} - \frac{nB_n}{r_1^{n+1}} \right) \cos n\varphi + \left(nC_n r_1^{n-1} - \frac{nD_n}{r_1^{n+1}} \right) \sin n\varphi = 0,$$

$$A_0 + B_0 ln r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_2^n + \frac{B_n}{r_2^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n r_2^n + \frac{D_n}{r_2^n} \right) \sin n\varphi = f(\varphi).$$

Так как система $1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \ldots$ является ортогональной на отрезке $[\,0,\, 2\pi]$, то при $n{=}1$

$$\begin{cases} A_1 - \frac{B_1}{r_1^2} = 0 \\ A_1 r_1 + \frac{B_1}{r_2} = u_0, \end{cases}$$

откуда

$$A_1 = \frac{u_0 r_2}{r_1^2 + r_2^2}, \qquad B_1 = \frac{u_0 r_1^2 r_2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Если $n{\neq}1$, то соответствующие коэффициенты равны нулю. В итоге

$$u(r,\varphi) = u_0 \frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r} \right) \cos\varphi.$$

2.108. Найти равновесную форму пленки, натянутой на изогнутое кольцо (см. задачу 1.83.), если
1) $f(\varphi) = u_0 \cos^2\varphi$; 2) $f(\varphi) = u_0 \sin^3\varphi$.

2.109. По поверхности ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) течет ток, линейная плотность которого 1. $i_0\,\mathbf{e}_z$; 2. $i_0 \sin^2\varphi\,\mathbf{e}_z$. Определить векторный потенциал магнитного поля.

2.110. Полый цилиндр ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$), заряд единицы площади поверхности которого σ_0, вращается около оси $0z$ с постоянной угловой скоростью $\omega\,\mathbf{e}_z$. Определить векторный потенциал магнитного поля.

2.111. Бесконечный проводящий цилиндр, радиус которого r_0, внесен в однородное электростатическое поле E_0, перпендикулярное оси цилиндра. Определить плотность заряда, индуцированного на поверхности цилиндра.

2.112. Бесконечный цилиндр, радиус которого r_0, движется в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $V(t)\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор, перпендикулярный оси цилиндра. Найти давление на поверхности цилиндра, считая течение жидкости потенциальным.

2.113. Найти распределение скоростей в жидкости при условиях задачи 1.230, если Ω_1 — полукруг радиуса r_0, S — полуокружность. Какова скорость жидкости на свободной поверхности?

2.114. На цилиндр, радиус которого r_0, падает перпендикулярно оси плоскопараллельный тепловой поток плотности q_0. Найти стационарную температуру цилиндра, если через его поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой равна нулю.

2.115. Бесконечный диэлектрический цилиндр (радиус r_0, диэлектрическая проницаемость ε) находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$, перпендикулярном оси цилиндра. Определить поле в цилиндре и дипольный момент единицы длины цилиндра.

2.116. Труба ($r_1<r<r_2$) из железа с магнитной проницаемостью μ внесена в однородное магнитное поле H_0, перпендикулярное оси трубы. Найти магнитное поле в полости $r<r_1$ и магнитный момент единицы длины трубы.

2.117. По поверхности ($r=r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$) течет постоянный ток, линейная плотность которого $\mathbf{i}=i(\varphi)\mathbf{e}_z$. Определить векторный потенциал магнитного поля тока в случаях: 1) $i(\varphi)=i_0$; 2) $i(\varphi)=i_0\sin\varphi$.

2.118. Определить магнитное поле круглого цилиндрического соленоида, радиус которого r_0 (см. задачу1.341).

2.119. Внешняя поверхность трубы ($r_1<r<r_2$) облучается тепловым потоком плотности $q_0\cos 2\varphi$, а внутренняя — поддерживается при температуре u_0. Определить стационарную температуру трубы.

2.120. Поверхность $r=r_1$ трубы ($r_1<r<r_2$) имеет температуру $u_0\sin\varphi$, а поверхность $r=r_2$ излучает тепло по закону Ньютона во внешнюю среду, температура которой равна нулю. Найти стационарное распределение температуры в трубе.

2.121. Найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является сектор ($r<r_0$, $0<\varphi<\alpha<2\pi$), если температура поверхности $r=r_0$ равна $u_0\sin^2\frac{\pi\varphi}{\alpha}$, а остальная поверхность теплоизолирована.

2.122. Найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является область ($r_1<r<r_2$, $0<\varphi<\alpha<2\pi$), если температура поверхностей $r=r_1$ и $r=r_2$ равна соответственно 0^o и $u_0\cos\frac{2\pi\varphi}{\alpha}$, а остальная поверхность теплоизолирована.

2.123. В тонкую оболочку ($r=r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), находящуюся на металлическом основании $z=0$, через точку с координатами ($r=r_0$, $\varphi=0, z=l$) втекает ток J. Определить потенциал электростатического поля и плотность тока в оболочке, если ее проводимость σ.

2.124. В тонкой оболочке ($r{=}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $|z|{<}-l$) течет ток J, точка входа которого ($r{=}r_0$, $\varphi{=}0$, $z{=}-l$), а точка выхода ($r{=}r_0$, $\varphi{=}\pi$, $z{=}l$). Определить потенциал электростатического поля и плотность тока в оболочке, если ее проводимость σ.

2.125. Постоянный ток J втекает в тонкую цилиндрическую оболочку ($r{=}r_0$, $z{>}0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$) через точку, координаты которой $r{=}r_0$, $z{=}0$, $\varphi{=}0$. Определить плотность тока в оболочке.

2.126. Тонкая оболочка ($r{=}r_0$, $0{<}\varphi{<}\pi$, $0{<}z{<}\infty$) изготовлена из материала с проводимостью σ. Определить потенциал электростатического поля и плотность тока J в оболочке, если он втекает через точку ($r{=}r_0$, $\varphi{=}\pi/2$, $z{=}0$).

2.127. Через точку $\theta{=}0$ проводящей сферической оболочки (радиус r_0, проводимость σ) втекает постоянный ток J, а через точку с координатами $\theta{=}\frac{\pi}{2}$, $\varphi{=}0$ вытекает. Определить потенциал электростатического поля и плотность тока в оболочке.

2.128. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний плоского ротатора, момент инерции которого I.

2.129. Плоский ротатор, момент инерции которого I, масса m, заряд e вращается в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси вращения. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний ротатора.

2.130. Найти волновую функцию $\Psi(\varphi, t)$ плоского ротатора с моментом инерции I, если волновая функция начального состояния 1) $\Psi(\varphi, 0) = A\cos^2\varphi$; 2) $\Psi(x, 0) = A(\sin 2\varphi + \cos^2\varphi)$. Определить также вероятность $P(E{=}E_n)$.

2.131. Плоский ротатор с моментом инерции I, вращается около оси Oz; M_z — проекция момента количества движения на ось $0z$. Найти вероятность $P(M_z{=}m\hbar)$ в момент времени $t{>}0$, если 1) $\Psi(\varphi, 0) = A\sin\varphi$; 2) $\Psi(\varphi, 0) = A\sin^n\varphi$, $n \in \mathbf{N}_0$.

2.132. Плоский ротатор находится в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси вращения. Определить волновую функцию $\Psi(\varphi, t)$, если $\Psi(\varphi, 0) = A\sin^3\varphi$. Найти вероятность $P(E = E_n)$ и вероятность $P(M_z = m\hbar)$.

Пример 2.9. Прямоугольная мембрана ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) с закрепленным краем находится в статическом равновесии под действием поперечной силы, приложенной вдоль линии $y=0$ с линейной плотностью $f_0 \sin\frac{\pi x}{l_1}\,\mathbf{e}_u$. В момент времени $t=0$ действие силы прекращается. Решить задачу о колебаниях мембраны.

Требуется найти функцию $u(x, y, t)$, которая удовлетворяет условиям

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad |x| < l_1, \ \ |y| < l_2, \ \ 0 < t,$$
$$u|_\Gamma = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \ \ u_t(x, y, 0) = 0,$$

где $u_0(x, y)$ — решение стационарной задачи

$$\Delta u_0 = -\frac{f_0}{T_0}\,\delta(y) \cdot \sin\frac{\pi x}{l_1}, \quad |x| < l_1, \ \ |y| < l_2,$$
$$u_0|_\Gamma = 0,$$

Γ — контур мембраны. Пусть $u(x, y, t)=v(x, y)T(t)$, тогда $v(x, y)$ — решение задачи на собственные значения

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad |x| < l_1, \ \ |y| < l_2,$$
$$v|_\Gamma = 0, \tag{2.24}$$

а $T(t)$ удовлетворяет уравнению $T'' + a^2\lambda T = 0$. К задаче (2.24) также применим метод разделения переменных; после стандартной подстановки $v(x, y)=X(x)Y(y)$ эта задача приобретает форму

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$
$$XY|_\Gamma = 0.$$

Таким образом, задача (2.24) сводится к двум задачам Штурма-Лиувилля

$$\begin{array}{ll} X''+\alpha X=0, \quad |x|<l_1, & Y''+\beta Y=0 \quad |y|<l_2, \\ X(-l_1)=X(l_1)=0, & Y(-l_2)=Y(l_2)=0, \end{array}$$

где $\lambda{=}\alpha{+}\beta$, решения которых (см. пример 2.2.)

$$X_m(x)=\sin\frac{\pi m}{2}\left(1+\frac{x}{l_1}\right), \;\; Y_n(y)=\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{y}{l_2}\right), \;\; m,n\in\mathbf{N}.$$

Следовательно, собственные значения и собственные функции задачи (2.24) имеют вид

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{\pi m}{2l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{2l_2}\right)^2, \quad v_{mn}(x,y)=X_m(x)Y_n(y).$$

Каждому λ_{mn} соответствует функция

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t, \quad \omega_{mn}=a\sqrt{\lambda_{mn}}.$$

Решение выражается рядом по собственным функциям

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t)v_{mn}(x,y).$$

Если $t{=}0$, то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}v_{mn}(x,y)=u_0(x,y), \quad \sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\omega_{mn}v_{mn}(x,y)=0.$$

Коэффициенты $A_{mn}{=}0$, а

$$B_{mn}=\frac{(u_0,v_{mn})}{\|v_{mn}\|^2}=-\frac{1}{\lambda_{mn}}\frac{(u_0,\Delta v_{mn})}{l_1l_2}=-\frac{1}{\lambda_{mn}}\frac{(\Delta u_0,v_{mn})}{l_1l_2}=$$
$$=\frac{f_0}{T_0l_1l_2\lambda_{mn}}Y_n(0)(\sin\frac{\pi x}{l_1},X_m)=\frac{f_0Y_n(0)l_1}{T_0l_1l_2\lambda_{mn}}\delta_{m\,2}.$$

Отличны от нуля коэффициенты

$$B_{2k+1,2} = \frac{(-1)^{k+1} f_0}{T_0 l_2 \lambda_{2k+1,2}}.$$

В результате

$$u(x,y,t)=\frac{f_0 l_1^2}{\pi^2 l_2 T_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi y}{l_2}(k+\frac{1}{2}) \cos\frac{\pi a}{l_1}\sqrt{1+\frac{l_1^2}{l_2^2}(k+\frac{1}{2})^2}\, t}{1+\frac{l_1^2}{l_2^2}(k+\frac{1}{2})^2} \sin\frac{\pi x}{l_1}.$$

2.133. Квадратная мембрана ($|x|<l$, $|y|<l$) с закрепленным краем получает поперечный импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате удара молоточком в область ($|x|<l_1$, $|y|<l_1$), где $l_1<l$. Решить задачу о колебаниях мембраны.

2.134. Прямоугольная мембрана ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) с закрепленным краем находится в равновесии под действием силы $F_0\mathbf{e}_u$, равномерно распределенной по поверхности мембраны. С момента $t=0$ сила не действует. Решить задачу о движении мембраны.

2.135. Грани бесконечного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$) поддерживаются при нулевой температуре. Найти температуру $u(x,y,t)$ бруса при $t>0$, если

$$u(x,y,0) = u_0 \frac{xy}{l_1 l_2}\left(1-\frac{x}{l_1}\right)\left(1-\frac{y}{l_2}\right).$$

2.136. На грань $y=l_2$ неограниченного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$) длительное время подается тепловой поток плотности $\mathbf{q}=-q_0\mathbf{e}_u$, а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре. Как будет меняться температура бруса, если грань $y=l_2$ теплоизолировать?

2.137. Грань $z=0$ однородного куба ($0<x,y,z<l$) длительное время поддерживается при температуре u_0, а остальная поверхность — при 0^o. С момента $t=0$ вся поверхность куба имеет нулевую температуру. Решить задачу об охлаждении куба.

2.138. Цилиндрический стержень ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11), торец $x=0$ которого жестко закреплен, находится в равновесии под действием поперечной силы $F_0\mathbf{e}_z$, приложенной к свободному торцу $x=l$. Как будет двигаться торец $x=l$ после прекращения действия силы?

2.139. Цилиндрический стержень ($-l<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11), торцы которого шарнирно закреплены, находится в равновесии под действием двух равных противоположно направленных поперечных сил, приложенных в точках $x=-l/2$ и $x=l/2$ и создающих момент $M_0\mathbf{e}_y$. Решить задачу о движении стержня после прекращения действия сил.

2.140. Стержень, описанный в предыдущей задаче, находится в равновесии под действием силы $F_0\mathbf{e}_z$, приложенной в сечении $x=0$. Решить задачу о движении стержня после прекращения действия силы.

2.141. Цилиндрический стержень ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11) получает импульс $I\,\mathbf{e}_z$ в результате поперечного удара в сечение $x_0 \in (0,\, l)$. Решить задачу о колебаниях стержня при нулевых начальных условиях, если торец $x=0$ закреплен жестко, а торец $x=l$ — шарнирно.

2.142. Цилиндрический стержень ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11), один торец ($x = 0$) которого закреплен шарнирно, а другой — жестко, находится в статическом равновесии под действием момента $M_0\,\mathbf{e}_y$, приложенного в сечении $x=x_0\in(0,l)$. Решить задачу о движении стержня после прекращения действия момента.

2.143. Цилиндрический стержень ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11), один торец ($x=0$) которого жестко закреплен, находится в равновесии под действием момента $M_0\mathbf{e}_y$, приложенного к свободному торцу $x=l$. Решить задачу о движении стержня после прекращения действия момента.

2.2. Задачи с неоднородностями в уравнении и граничных условиях

Пример 2.10. С точки зрения метода разделения переменных предыдущие задачи решались по единой схеме, так как имели одинаковую математическую структуру: они содержали однородное уравнение с однородными граничными условиями. Прежде чем распространить метод Фурье на задачи с произвольными неоднородностями, следует выделить класс задач, которые достаточно просто сводятся к уже рассмотренным. К ним относятся смешанные задачи со стационарными неоднородностями (т.е. не зависящими от времени) и краевые задачи, в которых неоднородности не зависят от одной из переменных. Суть метода состоит в выделении частного решения, удовлетворяющего уравнению и граничным условиям. Следует подчеркнуть, что ряды, входящие в состав решения, полученного таким путем, сравнительно быстро сходятся, так как коэффициенты рядов содержат достаточно высокие отрицательные степени собственных значений (известно (см [39], т1), что в одномерном случае собственные значения λ_n растут с ростом n как n^2). Методику построения решения можно продемонстрировать на следующей задаче:

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x), \quad l_1 < x < l_2, \ \ 0 < t,\\
&\alpha_1 u_x(l_1, t) - \beta_1 u(l_1, t) = \mu_1,\\
&\alpha_2 u_x(l_2, t) + \beta_2 u(l_2, t) = \mu_2,\\
&u(x, 0) = u_0(x),
\end{aligned}
$$

где α_i, β_i, i=1, 2 удовлетворяют условиям (2.4), μ_1, μ_2 — константы. Пусть $u(x,t)$=$v(x,t)$+$w(x)$, где функция $w(x)$ выбрана так, что

$$
a^2 w''(x) + f(x) = 0, \quad l_1 < x < l_2, \tag{2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 w'(l_1) - \beta_1 w(l_1) = \mu_1,\\
&\alpha_2 w'(l_2) + \beta_2 w(l_2) = \mu_2,
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

тогда $v(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} &v_t = a^2 v_{xx}, \quad l_1 < x < l_2, \ \ 0 < t, \\ &\alpha_1 v_x(l_1,t) - \beta_1 v(l_1,t) = 0, \\ &\alpha_2 v_x(l_2,t) + \beta_2 v(l_2,t) = 0, \\ &v(x,0) = u_0(x) - w(x), \end{aligned}$$

которая рассмотрена в примере 2.1. С физической точки зрения функция $w(x)$ описывает стационарное состояние, обусловленное источниками f(x) и влиянием граничного режима. Решение уравнения (2.25) имеет вид

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_{l_1}^{x} f(\xi)(\xi - x)d\xi + C_1 x + C_2.$$

Условия (2.26) приводят к системе

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1 l_1)C_1 - \beta_1 C_2 = \mu_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2 l_2)C_2 + \beta_2 C_2 = \mu_2 + \frac{\alpha_2}{a^2}\int\limits_{l_1}^{l_2} f(\xi)d\xi + \frac{\beta_2}{a^2}\int\limits_{l_1}^{l_2} f(\xi)(\xi - l_2)d\xi. \end{cases}$$

Если определитель системы $\Delta = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \beta_1\beta_2(l_2 - l_1)$ не равен нулю, то существует единственное решение (C_1, C_2), которое определяет функцию $w(x)$. Если Δ=0, что возможно только при β_1=β_2, то система совместна при условии

$$\alpha_1\mu_2 - \alpha_2\mu_1 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2}\int_{l_1}^{l_2} f(\xi)d\xi = 0, \tag{2.27}$$

следовательно, $w(x)$ также существует. Наконец, при нарушении условия (2.27) функцию $w(x)$ построить нельзя. Физический смысл равенства (2.27) становится ясным, если задаче дать тепловую трактовку:

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q(x)}{c\rho}, \quad l_1 < x < l_2, \ \ 0 < t, \\ &u_x(l_1,t) = -\frac{q_1}{k}, \quad u_x(l_2,t) = -\frac{q_2}{k}, \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Тогда условие (2.27) выражает стационарный тепловой баланс, при нарушении которого стационарного режима нет. Однако и в этом случае можно построить функцию $w(x,t)$, которая снимает неоднородности задачи (2.28). Достаточно это сделать для $Q{=}0$. Функция $w(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям задачи (2.28), если ее производная имеет вид

$$w_x(x,t) = -\frac{q_1}{k}\frac{l_2-x}{l_2-l_1} + \frac{q_2}{k}\frac{l_1-x}{l_2-l_1}.$$

Следовательно,

$$w(x,t) = \frac{q_1}{2k}\frac{(l_2-x)^2}{l_2-l_1} - \frac{q_2}{2k}\frac{(l_1-x)^2}{l_2-l_1} + C(t).$$

Теперь нужно выбрать $C(t)$ так, чтобы $w(x,t)$ удовлетворяла уравнению, т.е.

$$C'(t) = -\frac{(q_2-q_1)a^2}{k(l_2-l_1)}.$$

В результате

$$w(x,t) = \frac{q_1}{2k}\frac{(l_2-x)^2}{l_2-l_1} - \frac{q_2}{2k}\frac{(l_1-x)^2}{l_2-l_1} - \frac{q_2-q_1}{k(l_2-l_1)}a^2t.$$

Если представить решение суммой $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, то для $v(x,t)$ получится задача с однородным уравнением и однородными граничными условиями:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad l_1 < x < l_2, \;\; 0 < t,$$

$$v_x(l_1,t) = v_x(l_2,t) = 0, \;\; v(x,0) = u_0(x) - w(x).$$

2.144. На струну $(-l{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила, линейная плотность которой $f_0 \cos\frac{\pi x}{2l}\,\eta(t)\,\mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.145. Струна ($-l<x<l$) с закрепленными концами расположена на горизонтальной подставке. В момент $t=0$ подставку убирают. Определить движение струны под действием силы тяжести.

2.146. Решить предыдущую задачу для струны ($-l<x<l$), с сосредоточенной массой m в точке $x=0$.

2.147. На струну ($-l<x<l$) с закрепленными концами действует постоянная сила $F_0\mathbf{e}_u$, приложенная с момента времени $t=0$ в точке $x=0$. Решить задачу о движении струны, если начальные смещения и скорости равны нулю.

2.148. В точке $x=0$ струны ($-l<x<l$) с закрепленными концами имеется шарик, масса которого m. Решить задачу о движении шарика под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_u$, приложенной к шарику; начальные условия нулевые.

2.149. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$) расположен на гладкой горизонтальной поверхности. С момента времени $t=0$ торец $x=0$ движется в положительном направлении оси $0x$ 1) с постоянной скоростью v_0; 2) с постоянным ускорением w. Решить задачу о движении стержня.

2.150. Тонкая трубка ($0<x$) с закрытым концом заполнена идеальным газом, давление которого P_0, плотность ρ_0. В сечении $x=l>0$ трубки находится поршень, который начинает двигаться в положительном направлении оси $0x$ 1) с постоянной скоростью v_0; 2) с постоянным ускорением w_0. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа на участке между $x=0$ и поршнем.

2.151. Конец $x=l$ линии ($0<x<l$) с пренебрежимо малой утечкой заземлен, а к концу $x=0$ в момент времени $t=0$ подключается батарея с постоянной э.д.с. E_0. Определить потенциал линии.

2.152. Один конец ($x=l$) линии ($0<x<l$) с параметрами L, C ($R=G=0$), заземлен через сосредоточенную индуктивность L_0, а

к другому концу в момент времени t=0 подключается батарея с постоянной э.д.с. E_0. Определить потенциал линии.

2.153. В трубке ($0<x<l$) с открытыми концами находится идеальный газ, давление которого P_0, плотность ρ_0. С момента времени t=0 в сечении $x=x_0 \in (0, l)$ действует источник того же газа постоянной мощности Q_0. Найти потенциал скоростей газа в акустическом приближении.

2.154. Трубка ($0<x<l$) заполнена идеальным газом. Конец x=0 закрыт, а на конце $x=l$ находится легкий перемещающийся без трения поршень, закрепленный на пружинке с коэффициентом упругости k. Давление и плотность газа в трубке P_0 и ρ_0 соответственно, внешнее давление P_1. Пружинка находится в недеформированном состоянии под действием силы, приложенной к поршню. В момент времени t=0 действие силы прекращается. Найти в акустическом приближении закон движении поршня.

2.155. Пространство между параллельными плоскостями x=0 и $x=l$ заполнено вязкой несжимаемой жидкостью. С момента времени t=0 плоскость $x=l$ движется со скоростью $V_0\mathbf{e}_z$, а плоскость x=0 остается неподвижной. Определить скорость жидкости, если давление вдоль оси $0x$ постоянно.

2.156.
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

2.157.
$$e^{\alpha x} u_{tt} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} + A, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

2.158.
$$e^{-\alpha x} u_{tt} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = A, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

2.159.
$$e^{\alpha x} u_{tt} a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(l,t) = A, \ \ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

2.160. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + Ar, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 < t,$
$|u| < \infty, \ \ u_r(r_0, t) = u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0.$

2.161. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + Ar^2, \quad 0 < r < r_0, \ \ 0 < t,$
$|u| < \infty, \ \ u_r(r_0, t) = u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0.$

2.162. В стержне ($0<x<l$) с теплоизолированной поверхностью (включая торцы) действуют источники тепла, плотность которых 1) $Q_0 cos\frac{\pi x}{l}$; 2) $Q_0 sin\frac{\pi x}{l}$. Найти температуру стержня при $t>0$, если при $t=0$ его температура равна нулю.

2.163. Конец $x=l$ линии ($0<x<l$) с параметрами R, C ($L=G=0$) заземлен, а другой конец подключен через сосредоточенное сопротивление R_0 к батарее с постоянной э.д.с. E_0. Определить потенциал линии при нулевых начальных условиях.

2.164. Концы $x=0$ и $x=l$ линии ($0<x<l$) с параметрами L, C ($R=G=0$), заземлены через индуктивности L_1 и L_2 соответственно. В момент времени $t=0$ к концу $x=0$ подключают (последовательно с L_1) батарею с э.д.с. E_0. Найти потенциал линии.

2.165. Через торцы стержня ($0<x<l$) с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен по закону Ньютона; коэффициенты теплообмена и температура внешней среды равны α_1 и 0, при $x=0$, α_2 и τ_0 при $x=l$. Определить температуру стержня при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.166. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u_x(0, t) = u_x(l, t) = u(x, 0) = 0.$

2.167. $e^{-\alpha x} u_t = a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u_x(0, t) = 0, \ \ u_x(l, t) = A, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

2.168. $e^{-\alpha x} u_t = a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} + A \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$
$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

2.169. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен малосжимаемой жидкостью, начальное давление в которой P_0. Сечение $x=0$ граничит со скважиной, а сечение $x=l$ представляет собой тонкую перемычку, расход жидкости (поток скорости) через единицу площади которой пропорционален разности давлений по обе стороны перемычки (коэффициент пропорциональности α задан). Найти расход Q жидкости, поступающей в скважину в процессе изотермической фильтрации, если давление в скважине P_1, давление за перемычкой $P_0>P_1$, площадь поперечного сечения пласта S_0.

2.170. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) граничит со скважиной при $x=0$. Начальное давление газа в пласте P_0, давление в скважине P_1, боковая поверхность пласта и сечение $x=l$ непроницаемы для газа. Обычно $P_0 \gg P_1$ и в коэффициенте при лапласиане в уравнении (1.103) полагают $P=P_0$. Решить линеаризованную задачу фильтрации.

2.171. Горизонтальный цилиндрический пласт ($0<x<l$) с непроницаемой боковой поверхностью заполнен газом, давление которого при $x=0$ и $x=l$ равно соответственно P_1 и P_2. Определить плотность потока $\mathbf{q}$ газа через поперечное сечение пласта при установившемся фильтрационном процессе; μ, m, k и температура T— постоянные величины.

2.172. Тонкий горизонтальный пласт ($0<x<l$) с непроницаемым основанием $z=0$ граничит при $x=0$ со скважиной. Пласт частично (по высоте) заполнен жидкостью, высота которой в скважине равна H. Определить форму свободной поверхности жидкости в процессе установившейся безнапорной фильтрации, если расход жидкости (поток скорости), поступающей в скважину через вертикальную полоску единичной ширины сечения $x=0$ равен q.

2.173. Часть горизонтального пористого пласта заполнена нефтью, которая в процессе фильтрации вытесняется водой. При

условиях задачи 1.265. определить время t_0 вытеснения всей нефти. В приближении $\frac{\mu_1}{k_1} \gg \frac{\mu_2}{k_2}$ найти функцию $L(t)$.

2.174. Боковая поверхность прямого кругового конуса, высота которого l, теплоизолирована, а через основание происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0. Определить температуру конуса при $t>0$, если его начальная температура равна нулю; предполагается, что изотермические поверхности параллельны основанию.

2.175. Прямой круговой конус, высота которого l, с теплоизолированной боковой поверхностью имеет нулевую температуру. С момента $t=0$ в конусе происходит выделение тепла с объемной плотностью Q в единицу времени. Определить в одномерном приближении температуру конуса, если его основание поддерживается при нулевой температуре.

2.176. Упругий стержень (см. задачу 1.19) находится в статическом равновесии под действием силы $F_0\mathbf{e_x}$, приложенной к свободному торцу $x=l$, а другой торец, площадь которого S_0, закреплен посредством пружинки с коэффициентом упругости k. Как будет двигаться стержень после прекращения действия силы?

2.177. Упругий стержень (см. задачу 1.19.) начинает двигаться под действием постоянной продольной силы F_0, приложенной к свободному торцу $x=l$, а другой торец, площадь которого S_0, закреплен посредством пружинки с коэффициентом упругости k. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.178. Шар, начальная температура которого равна нулю, нагревается радиальным тепловым потоком плотности $\mathbf{q}= - q_0\mathbf{e}_r$, радиус шара r_0. Решить задачу теплопроводности.

2.179. В шаре с полупроницаемой поверхностью диффундирует газ, начальная концентрация которого равна нулю. Решить задачу диффузии, если концентрация газа вне шара при любом t равна u_0, радиус шара r_0.

2.180. В сферическом слое ($r_1<r<r_2$) действуют источники, выделяющие в единицу времени в единице объема постоянное количество тепла Q. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура слоя равна нулю, а 1. его поверхности поддерживаются при нулевой температуре; 2. поверхность $r = r_1$ теплоизолирована, а поверхность $r = r_2$ имеет нулевую температуру; 3. его поверхности теплоизолированы.

2.181. В сферическом слое ($r_1<r<r_2$) с момента $t = 0$ действуют тепловые источники, плотность мощности которых $\frac{AC\rho}{r}$. Решить задачу теплопроводности для слоя при нулевой начальной температуре, если 1. его поверхности поддерживаются при нулевой температуре; 2. поверхность $r = r_2$ теплоизолирована, а поверхность $r = r_1$ имеет нулевую температуру; 3. его поверхности $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$ теплоизолированы.

2.182. В сферическом слое ($r_1<r<r_2$) с момента $t = 0$ действуют тепловые источники, плотность мощности которых $AC\rho r$. Решить задачу теплопроводности для слоя при нулевой начальной температуре, если 1. его поверхности поддерживаются при нулевой температуре; 2. поверхность $r = r_2$ теплоизолирована, а поверхность $r = r_1$ имеет нулевую температуру; 3. его поверхности $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$ теплоизолированы.

2.183. В сферическом слое ($r_1<r<r_2$) диффундирует газ, концентрация которого на поверхности $r=r_2$ равна u_0, а поверхность $r=r_1$ непроницаема для газа. Найти концентрацию газа в слое при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.184. Внешняя поверхность сферического слоя ($1<r<2$) теплоизолирована, а через внутреннюю поверхность проходит тепловой поток постоянной плотности $q_0\mathbf{e}_r$; начальная температура слоя равна нулю. Решить задачу теплопроводности.

2.185. Чрез поверхности сферического слоя ($1<r<2$) проходит постоянный радиальный тепловой поток Q, равномерно распре-

деленный по каждой из поверхностей. Начальная температура слоя равна нулю. Решить задачу теплопроводности.

2.186. Чрез поверхности сферического слоя ($1<r<2$) проходит тепловой поток постоянной плотности $q_0\mathbf{e_r}$; начальная температура слоя равна нулю. Решить задачу теплопроводности.

2.187. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r} + Ar,\ \ 1 < r < 2,\ t > 0,$
1. $u(1,t) = u(2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0;$
2. $u_r(1,t) = u(2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0;$
3. $u_r(1,t) = u_r(2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.188. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r},\ \ r_1 < r < r_2,\ t > 0,$
1. $u(r_1,t) = u_1,\ u(r_2,t) = u_2,\ u(r,0) = u_t(r,0) = 0;$
2. $u_r(r_1,t) = 0,\ u(r_2,t) = u_0,\ u(r,0) = u_t(r,0) = 0;$
3. $u_r(r_1,t) = A,\ u(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0;$
4. $u_r(1,t) = A,\ u_r(2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.189. Прямоугольная мембрана ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$), закрепленная по краю, находится в статическом равновесии под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_u$, равномерно распределенной по линии $y=0$. Определить форму мембраны.

2.190. На прямоугольную мембрану ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) с закрепленным краем действует сила, приложенная с момента $t=0$ вдоль линии $x=0$ с линейной плотностью $\frac{F_0}{l_2}\sin\frac{\pi y}{l_2}\mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.191. Треугольная мембрана ($0<x<l, 0<y<l-x$) с закрепленным краем получает импульс $I\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара в точку с координатами $x=y=l/4$ в момент времени $t=0$. Решить задачу о движении мембраны, если до удара смещения ее точек из положения равновесия и их скорости были равны нулю.

2.192. Решить предыдущую задачу для мембраны, если сторона, являющаяся гипотенузой треугольника, свободна, а две другие стороны закреплены.

В задачах 2.193–2.198 найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого плоскостью $x0y$ является треугольник с вершинами $O(0,0), A(0,l_2), B(l_1,0)$, тепловые потоки Q, Q_1, Q_2, Q_1+Q_2 постоянны, равномерно распределены по соответствующим граням и отнесены к единице длины бруса (вдоль его оси).

2.193. Поток Q входит внутрь бруса через грань OB и выходит через грань AB; грань OA теплоизолирована.

2.194. Поток Q входит внутрь бруса через грань OB и выходит через грань OA; грань AB теплоизолирована.

2.195. Через грани OA и OB внутрь бруса поступают потоки Q_1, Q_2 соответственно, а через грань AB выходит суммарный поток Q_1+Q_2.

2.196. Внутрь бруса с двумя одинаковыми гранями $(l_1=l_2=l)$ через грань AB поступает поток постоянной плотности q_0, а остальная часть поверхности поддерживается при нулевой температуре. Определить также наибольшее значение температуры бруса.

2.197. Внутрь бруса с двумя одинаковыми гранями $(l_1=l_2=l)$ через грань AB входит поток Q; грань OA теплоизолирована, а грань AB имеет нулевую температуру.

2.198. Две грани бруса одинаковы $(l_1=l_2=l)$ и теплоизолированы, а грань AB поддерживается при температуре u_0x/l.

2.199. В однородную треугольную пластинку (треугольник такой же, квк в задаче 2.193), с двумя одинаковыми гранями $(l_1=l_2=l)$ втекает через грань AB ток, плотность которого постоянна и равна j_0; грани OA и AB поддерживаются при нулевом потенциале. Найти вектор $j(x,y)$ плотности тока в пластинке.

2.200. 1. Найти стационарную температуру бруса с прямоугольным поперечным сечением 1) $(0<x<l_1, 0<y<l_2$ через грань

$x = 0$, которого входит поток Q, а через грань $y = 0$ такой же поток выходит; 2) $(0 < x < l_1, 0 < y < l_2)$, через каждую из граней $x = 0$ и $y = 0$ которого входит поток Q, а через грань $x = l_1$ поток $2Q$ выходит; 3) $(|x|, l_1, 0 < y < l_2)$, через каждую из граней $x = \pm l_1$ которого входит поток Q, а через грань $y = l_2$ поток $2Q$ выходит. Все указанные потоки проходят через единицу длины бруса (вдоль оси), равномерно распределены по поверхности грани, а грани, свободные от потоков, теплоизолированы.

2.201. На грани $x= \mp l_1$, $y= \mp l_2$, $z= \mp l_3$ однородного параллелепипеда ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$, $|z|<l_3$) падают тепловые потоки $Q_{\mp 1}$, $Q_{\mp 2}$, $Q_{\mp 3}$, соответственно. Определить стационарную температуру параллелепипеда, если плотность потока через каждую грань постоянна, а суммарный поток, проходящий через параллелепипед, равен нулю.

2.202. Найти стационарную температуру бруса, поперечное сечение которого — полукруг ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$), если поверхность $r=r_0$ теплоизолирована, кроме линии ($r=r_0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $-\infty<z<\infty$), по которой вводится тепловой поток с линейной плотностью Q_0, а через диаметральную плоскость (с единицы длины бруса) этот поток выводится, причем плотность его постоянна.

2.203. Поперечным сечением цилиндрического бруса является сектор ($r<r_0$, $0<\varphi<\alpha<2\pi$). Определить стационарную температуру бруса, если грань $\varphi=0$ имеет температуру u_0, а на остальной поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

2.204. В трубе ($0<z<l$), поперечное сечение которой — эллипс с полуосями a и b, течет вязкая несжимаемая жидкость; давление на концах трубы $P(0)=P_1$, $P(l) = P_2$. Определить скорость жидкости, если ее течение стационарно.

2.205. Упругий стержень ($-l<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис. 1.11) находится в горизонтальном положении.

Решить задачу о поперечных колебаниях стержня под действием силы тяжести; концы стержня закреплены, начальные условия нулевые.

2.206. Горизонтальный недеформируемый пласт с непроницаемыми основаниями имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2; в центре линзы пробита скважина, радиус которой $r_1<r_2$. Найти давление газа в пласте при установившейся изотермической фильтрации, если при r_1 и r_2 давление равно P_1 и P_2 соответственно.

2.207. Горизонтальный недеформируемый пласт с непроницаемыми основаниями заполнен газом. Пласт имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2, в центре пласта пробита скважина, радиус которой $r_1<r_2$. Внешняя поверхность $r=r_2$ пласта представляет собой тонкую перегородку, расход газа (поток скорости) через единицу площади которой пропорционален разности давлений по обе стороны перегородки (коэффициент пропорциональности α задан). Найти плотность потока $\mathbf{q}$ газа через поверхность скважины в процессе стационарной изотермической фильтрации, если давление в скважине P_1, давление вне пласта $P_2>P_1$.

2.208. Тонкий круговой пласт, радиус которого r_2, расположен на непроницаемом горизонтальном основании $z=0$. В центре пласта имеется скважина, радиус которой $r_1<r_2$. Пласт частично (по высоте) заполнен жидкостью, высота которой в скважине равна H. Определить форму свободной поверхности жидкости при установившейся безнапорной фильтрации, если расход жидкости (поток скорости), поступающей в скважину равен Q.

2.209. Горизонтальный круговой пласт со скважиной частично заполнен нефтью, которая в процессе фильтрации вытесняется водой. При условиях задачи 1.266. и в приближении $\frac{\mu_1}{k_1} \gg \frac{\mu_2}{k_2}$ определить время t_0 вытеснения всей нефти.

2.210. Упругая круглая пластинка, радиус которой r_0, закреплена по краю; в центре пластинки приложена сила $F_0\mathbf{e}_u$. Определить равновесную форму пластинки.

2.211. Решить предыдущую задачу для пластинки, опертой по краю.

Пример 2.11. Метод, рассмотренный в предыдущем примере, основан на выделении частного решения, снимающего неоднородности. Этот метод применим и для некоторых задач с нестационарными неоднородностями, к числу которых относится следующая задача.

На струну ($0<x<l$), конец $x=0$ которой закреплен, а конец $x=l$ свободен (см. задачу 1.24.), действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x=x_0\in(0,\, l)$. Определить колебания струны при нулевых начальных условиях.

Задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \tfrac{F_0}{\rho}\delta(x-x_0)\cdot \sin \omega t, \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$$
$$u(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

сводится посредством подстановки $u(x,t)=f(x)\sin \omega t+v(x,t)$ к двум более простым. Первое слагаемое (частное решение неоднородного уравнения) описывает вынужденные колебания, второе — свободные колебания струны:

$$f'' + \tfrac{\omega^2}{a^2} f = -\tfrac{F_0}{T}\delta(x-x_0), \quad 0<x<l,$$
$$f(0) = f'(l) = 0,$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$$
$$v(0,t) = v_x(l,t) = 0,$$
$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = -\omega\, f(x).$$

Первая задача имеет следующую (эквивалентную) постанов-

ку (см. 10.15):

$$\begin{aligned}
&f'' + \tfrac{\omega^2}{a^2} f = 0, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l \\
&f(0) = f'(l) = 0, \\
&f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 0, \\
&f'(x_0 + 0) - f'(x_0 - 0) = -\tfrac{F_0}{T}.
\end{aligned}$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\omega x}{a}, & 0 \le x \le x_0, \\ B \cos \frac{\omega(l-x)}{a}, & x_0 \le x_0 \le l. \end{cases}$$

Если $x{=}x_0$, то

$$\begin{cases} A \sin \frac{\omega x_0}{a} - B \cos \frac{\omega(l-x_0)}{a} = 0 \\ A \cos \frac{\omega x_0}{a} - B \sin \frac{\omega(l-x_0)}{a} = \frac{aF_0}{\omega T}, \end{cases}$$

откуда при условии $\omega l/a{\neq}(2n+1)\pi/2$

$$A = -\frac{F_0 \cos \frac{\omega(l-x_0)}{a}}{a\omega\rho \cos \frac{\omega l}{a}}, \qquad B = -\frac{F_0 \sin \frac{\omega x_0}{a}}{a\omega\rho \cos \frac{\omega l}{a}}.$$

Решение второй задачи имеет форму ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) X_n(x),$$

где $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$, $\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$, $\sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$. Согласно начальным условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n X_n(x) = -\omega f(x);$$

отсюда следует, что

$$A_n = -\frac{2\omega}{l\omega_n}(f, X_n), \qquad B_n = 0.$$

Вычисление интеграла проще всего осуществить способом, изложенным в примере 2.3.:

$$(f, X_n) = -\frac{1}{\lambda_n}(f, X_n'') = -\frac{1}{\lambda_n}(f'', X_n) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n}\left(-\frac{\omega^2}{a^2}f - \frac{F_0}{T}\delta(x-x_0), X_n\right) = \frac{\omega^2}{a^2\lambda_n}(f, X_n) + \frac{F_0}{\lambda_n T}X_n(x_0),$$

откуда

$$(f, X_n) = \frac{F_0 X_n(x_0)}{T\left(\lambda_n - \frac{\omega^2}{a^2}\right)} = \frac{F_0 X_n(x_0)}{\rho\,(\omega_n^2 - \omega^2)}.$$

Итак, если $\omega \neq \omega_n$, то

$$u(x,t) = f(x)\sin\omega t - \frac{2\omega F_0}{\rho l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)},$$

где

$$f(x) = -\frac{F_0}{a\omega\rho\cos\frac{\omega l}{a}}\begin{cases}\cos\frac{\omega(l-x_0)}{a}\sin\frac{\omega x}{a}, & 0 \le x \le x_0,\\ \cos\frac{\omega(l-x)}{a}\sin\frac{\omega x_0}{a}, & x_0 \le x \le l.\end{cases}$$

Если $\omega = \omega_{n_0}$, то задача для $f(x)$, записанная в виде

$$\mathcal{L}f = g, \quad 0 < x < l,$$
$$f(0) = f'(l) = 0,$$

где $\mathcal{L} = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2}\right)$, $g = -\frac{F_0}{T}\delta(x - x_0)$, не имеет, вообще говоря, решения. Действительно, в данном случае (т.е. при $\omega = \omega_{n_0}$) $\lambda = 0$ — собственное значение, а $X_{n_0}(x) = \sin\frac{(2n_0+1)\pi x}{2l}$ — соответствующая собственная функция оператора $\mathcal{L}$, поэтому функции g и X_{n_0} — ортогональны: $(g, X_{n_0}) = (\mathcal{L}f, X_{n_0}) = (f, \mathcal{L}X_{n_0}) = 0$. Следовательно, для разрешимости задачи необходимо, чтобы $g(x)$ и $X_{n_0}(x)$ были ортогональны. Если

$$(g, X_{n_0}) = -\frac{F_0}{T}\left(\delta(x - x_0), X_{n_0}(x)\right) = -\frac{F_0}{T}X_{n_0}(x_0) = 0,$$

т.е. $\sin\frac{(2n_0+1)\pi x_0}{2l}=0$, то $x_0=\frac{2lm}{2n_0+1}$, где $0<m<n_0+\frac{1}{2}$, (m — целое), и

$$f(x)=\begin{cases} AX_{n_0}(x), & 0\le x\le x_0,\\ BX_{n_0}(x), & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Для определения констант A и B имеется только одно уравнение $[\,f'\,]_{x_0}=-F_0/T$ (другое — $[\,f\,]_{x_0}=0$ — выполняется при любых A и B), поэтому их можно связать дополнительным условием, например, (f,X_{n_0})=0. В результате получается система

$$\begin{cases} A-B=\frac{(-1)^m F_0}{a\omega\rho}\\ Ax_0+B(l-x_0)=0,\end{cases}$$

откуда

$$A=(-1)^m\frac{F_0(l-x_0)}{a\omega\rho l},\quad B=(-1)^{m+1}\frac{F_0x_0}{a\omega\rho l}.$$

Решение задачи для $v(x,t)$ строится так же, как и в случае отсутствия резонанса.

Таким образом, если ω=ω_{n_0} и $X_{n_0}(x_0)$=0, то

$$u(x,t)=f(x)\sin\omega t-\frac{2\omega F_0}{\rho l}\sum_{\substack{n=0\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)},$$

где

$$f(x)=\frac{(-1)^m F_0}{a\omega\rho l}\sin\frac{\omega x}{a}\begin{cases} l-x_0, & 0\le x\le x_0,\\ -x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Если же $X_{n_0}(x_0)\ne0$, то в правую часть уравнения $\mathcal{L}f=g$ можно ввести слагаемое, заведомо не ортогональное функции X_{n_0}, так чтобы полученная сумма и $X_{n_0}(x)$ были ортогональны. С этой целью следует переписать уравнение исходной задачи в виде

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{F_0}{\rho}\delta(x-x_0)\cdot\sin\omega t+C_0X_{n_0}(x)\sin\omega t-C_0X_{n_0}(x)\sin\omega t$$

и разбить задачу на две, полагая $u(x,t) = U(x,t) + w(x,t)$:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + \tfrac{F_0}{\rho}\delta(x-x_0)\cdot\sin\omega t + C_0 X_{n_0}(x)\sin\omega t$$
$$0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$U(0,t) = U_x(l,t) = U(x,0) = U_t(x,0) = 0,$$

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - C_0 X_{n_0}(x)\sin\omega t,\quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$w(0,t) = w_x(l,t) = w(x,0) = w_t(x,0) = 0.$$

Для решения первой задачи пригоден тот же способ, что и при отсутствии резонанса. В результате введения функции $U(x,t)=f(x)\sin\omega t + v(x,t)$ получаются две задачи:

$$f'' + \tfrac{\omega^2}{a^2} f = -\tfrac{F_0}{T}\delta(x-x_0) - \tfrac{C_0}{a^2} X_{n_0}(x),\quad 0 < x < l,$$
$$f(0) = f'(l) = 0,$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},\quad 0 < x < l,\ \ 0 < t,$$
$$v(0,t) = v_x(0,t) = 0,$$
$$v(x,0) = 0,\quad v_t(x,0) = -\omega f(x).$$

Задача для $f(x)$ разрешима, если

$$\left(-\frac{F_0}{T}\delta(x-x_0) - \frac{C_0}{a^2} X_{n_0}(x), X_{n_0}(x)\right) = 0,$$

откуда $C_0 = -\frac{2F_0}{\rho l}\sin\frac{\omega}{a}x_0$. Решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A\sin\frac{\omega x}{a} + \frac{C_0}{2a\omega} x\cos\frac{\omega x}{a}, & 0 \le x \le x_0, \\ B\sin\frac{\omega x}{a} + \frac{C_0}{2a\omega}(l-x)\cos\frac{\omega x}{a}, & x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Уравнения $[\,f\,]_{x_0}=0$ и $[\,f'\,]_{x_0} = -F_0/T$ относительно A и B эквивалентны и к ним можно присоединить условие ортогональности $(f, X_{n_0})=0$. В результате получается система

$$\begin{cases} A - B = \frac{F_0}{a\omega\rho}\cos\frac{\omega x_0}{a} \\ (A-B)(x_0 - \frac{a}{2\omega}\sin\frac{2\omega x_0}{a}) + Bl = -\frac{F_0}{2\rho\omega^2}\sin\frac{\omega x_0}{a}\cos\frac{2\omega x_0}{a}, \end{cases}$$

решение которой

$$A = \frac{F_0}{a\omega\rho l}\left[\frac{a}{2\omega}\sin\frac{\omega x_0}{a} + (l-x_0)\cos\frac{\omega x_0}{a}\right],$$
$$B = \frac{F_0}{a\omega\rho l}\left(\frac{a}{2\omega}\sin\frac{\omega x_0}{a} - x_0\cos\frac{\omega x_0}{a}\right).$$

Построение решения задачи для $v(x,t)$ проводится так же, как и в случае $\omega{\neq}\omega_n$.

Решение последней задачи следует отыскивать в виде произведения $w(x,t){=}h(t)X_{n_0}(x)$. Для $h(t)$ получается задача Коши

$$h'' + \omega^2 h = -C_0\sin\omega t, \quad 0 < t,$$
$$h(0) = f'(0) = 0,$$

решение которой $h(t){=}\frac{C_0}{2\omega^2}(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t)$.

Таким образом, если $\omega{=}\omega_{n0}$, а $X_{n_0}(x_0){\neq}0$, то

$$u(x,t) = f(x)\sin\omega t + \frac{F_0\sin\frac{\omega x_0}{a}}{\omega^2\rho l}\sin\frac{\omega x}{a}\,(\sin\omega t - \omega t\,\cos\omega t) - \\ - \frac{2\omega F_0}{\rho l}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)},$$

где

$$f(x) = \frac{F_0}{a\omega\rho l}\left[\left(\frac{a}{2\omega}\sin\frac{\omega x}{a} - x\,\cos\frac{\omega x}{a}\right)\sin\frac{\omega x_0}{a} + \right. \\ \left. + (l-x_0)\cos\frac{\omega x_0}{a}\sin\frac{\omega x}{a}\right]$$

при $0{\leq}x{\leq}x_0$; если $x_0{\leq}x{\leq}l$, то в выражении для $f(x)$ нужно сделать замены $x{\to}x_0,\ x_0{\to}x$.

Решить задачи 2.212 – 2.234, выделяя частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям.

2.212. Один конец ($x{=}{-}l$) струны ($-l{<}x{<}l$), закреплен, а другой свободен (см. задачу 1.24.) Решить при нулевых начальных условиях задачу о колебаниях струны под действием силы, линейная плотность которой $\frac{F_0}{l\sqrt{2}}(\sin\frac{\pi x}{4l} + \cos\frac{\pi x}{4l})\,\sin\omega t\,\mathbf{e}_u$.

2.213. С момента $t{=}0$ на однородную струну $(0{<}x{<}l)$, конец $x{=}l$ которой закреплен, а конец $x{=}0$ свободен (см. задачу 1.24.), действует сила с линейной плотностью $f_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$. Определить движение струны при нулевых начальных условиях.

2.214. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила, линейная плотность которой $f_0 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.215. На струну $(-l{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила, линейная плотность которой $f_0 \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, $n \in \mathbf{N}$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.216. Решить предыдущую задачу для струны с сосредоточенной массой m в точке $x{=}0$.

2.217. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами, натяжение которой T, линейная плотность ρ, действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, $\omega{=}\frac{3\pi a}{2l}$, $a{=}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, приложенная в точке $x_0{=}\frac{2l}{3}$. Решить задачу о поперечных колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.218. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами, натяжение которой T, линейная плотность ρ, действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, $\omega{=}\frac{2\pi a}{l}$, $a{=}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, приложенная в точке 1) $x_0{=}\frac{l}{2}$; 2) $x_0{=}\frac{l}{3}$. Решить задачу о поперечных колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.219. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x_0 \in (0,\, l)$. Решить задачу о поперечных колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.220. Один конец $(x{=}0)$ однородной струны $(0{<}x{<}l)$ закреплен, а другой движется (в направлении, перпендикулярном оси Ox) по закону $u_0 \sin \omega t$, где $\omega{=}\frac{\pi a}{l}$, $a{=}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

2.221. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$) расположен на гладкой горизонтальной поверхности. С момента $t=0$ на торец $x=0$ действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_x$, где $\omega=\frac{\pi a}{l}$, $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, а другой торец остается свободным. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.222. На однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$) с закрепленным торцом $x=0$ действует продольная сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_x$, $\omega=\frac{\pi a}{2l}$, $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, приложенная к торцу $x=l$. Решить задачу о колебаниях стержня при нулевых начальных условиях.

2.223. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$), находится на гладкой горизонтальной поверхности. С момента $t=0$ торец $x=0$ движется (вдоль оси Ox) по закону $u_0 \sin \omega t$, а другой торец остается свободным. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.224. Один конец ($x = 0$) трубки ($0<x<l$) с идеальным газом закрыт, а на другом — находится поршень, движущийся со скоростью $u_0 \sin \omega t$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если начальные давление и плотность P_0 и ρ_0 соответственно.

2.225. Однородный цилиндрический стержень ($0<x<l$) находится на гладкой горизонтальной поверхности. С момента $t=0$ на торец $x=0$ действует сила $At^2\mathbf{e}_x$, а другой торец остается свободным. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.226. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + At, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.227. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + At^2, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.228. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t), \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.229. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axt, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.230. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axt^2, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.231. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + A(r_0 - r)t, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.232. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + At^2, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.233. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + A(r_0^2 - r^2)t^2, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.234. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u_0 \sin \omega t, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.235. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + Ae^{-\alpha t}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0, \;\; \alpha \le 0.$

2.236. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + Art, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.237. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + A(r_0 - r)^2 t, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.238. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = At, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.239. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = At^2, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0, \quad \alpha > 0.$

2.240. Торец (x=0) цилиндрического стержня (0<x<l) с прямоугольным поперечным сечением (см. рис.1.11) закреплен жестко, а торец (x=l) — шарнирно. Решить задачу о движении стержня под действием момента сил $M_0\mathbf{e}_y$, приложенного к торцу x=l; начальные условия нулевые.

2.241. Решить предыдущую задачу для стержня, оба торца которого закреплены шарнирно.

2.242. На цилиндрический стержень ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (см. рис.1.11) действует сила $F_0\eta(t)\mathbf{e}_z$, приложенная в сечении $x=x_0\in(0,l)$. Решить при нулевых начальных условиях задачу о движении стержня, если его торцы жестко закреплены.

2.243. В сечении $x=x_0\in(0,l)$ цилиндрического стержня ($0<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11) действует момент сил $M_0\eta(t)\mathbf{e}_y$. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях, если торец $x=0$ жестко закреплен, а торец $x=l$ — свободен.

2.244. В однородном цилиндрическом стержне ($0<x<l$) с теплоизолированной боковой поверхностью действуют источники тепла, мощность которых в единице объема $Q_0\exp(-\alpha t)$, где $\alpha\geq 0$. Определить температуру стержня, если его концы 1) поддерживаются при 0^o; 2) теплоизолированы, а начальная температуру равна нулю.

2.245. Через боковую поверхность однородного цилиндрического стержня ($0<x<l$) с теплоизолированными торцами происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры (коэффициент теплообмена на единицу длины стержня β задан). Найти температуру стержня при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю, а в сечении $x=x_0\in(0,\,l)$ действует источник тепла, мощность которого на единицу площади сечения равна $Q_0e^{-\alpha t}$, $\alpha\geq 0$.

2.246. В сечении $x=x_0$ тонкой трубки ($0<x<l$) действует источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации, коэффициент пропорциональности β задан), мощность которого на единицу площади сечения равна $Q_0e^{-\alpha t}$, $\alpha\geq 0$. Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если его начальная концентрация и концентрация на концах трубки при $t\geq 0$ равна нулю.

2.247. Торец $x{=}0$ цилиндрического стержня $(0{<}x{<}l)$ поддерживается при 0^o. Определить температуру $u(x,t)$ стержня при $t{>}0$, если $u(x,0){=}0$, а температура торца $x{=}l$ равна At.

2.248. Через торец $x{=}l$ внутрь однородного цилиндрического стержня $(0{<}x{<}l)$ поступает тепловой поток плотности At, а другой торец поддерживается при 0^o. Найти температуру стержня при $t{>}0$, если при $t{=}0$ она равна нулю.

2.249. Найти концентрацию $u(x,t)$ газа, диффундирующего в трубке $(0{<}x{<}l)$ с закрытым концом $x{=}0$, если $u(x,0){=}0$, а на конце $x{=}l$ концентрация равна At.

2.250. В трубку $(0{<}x{<}l)$ с закрытым концом $x{=}0$ поступает газ, плотность потока которого на конце $x{=}l$ равна At. Определить концентрацию газа в трубке в процессе диффузии при $t{>}0$, если начальная концентрация равна нулю.

2.251. В трубке $(0{<}x{<}l)$ с закрытым концом $x{=}0$ диффундирует газ, проникающий через полупроницаемую перегородку на конце $x{=}l$ (коэффициент пропорциональности α задан). Определить концентрацию $u(x,t)$ газа в трубке при $t{>}0$, если начальная концентрация равна нулю, а концентрация во внешнем пространстве равна At.

2.252. Определить температуру однородного цилиндрического стержня $(0{<}x{<}l)$ с теплоизолированной боковой поверхностью, торцы $x{=}0$ и $x{=}l$ которого имеют температуру 0^o и $u_0e^{-\alpha t}$, $\alpha{\geq}0$ соответственно, а начальная температура равна нулю.

2.253. Определить температуру однородного цилиндрического стержня $(0{<}x{<}l)$, боковая поверхность и торец $x{=}l$ которого теплоизолированы, температура торца $x{=}0$ равна $u_0e^{-\alpha t}$, $\alpha{\geq}0$, начальная температура равна нулю.

2.254. Определить температуру однородного цилиндрического стержня $(0{<}x{<}l)$ с теплоизолированной боковой поверхностью,

торец $x{=}l$ которого поддерживается при 0^o, через торец $x{=}0$ поступает тепловой поток плотности $q_0 e^{-\alpha t}\mathbf{e}_x$, $\alpha{\geq}0$; начальная температура равна нулю.

2.255. Начальная температура однородного цилиндрического стержня ($0{<}x{<}l$) равна нулю. С момента $t{=}0$ через торец $x{=}0$ проходит тепловой поток плотности $q_0 e^{-\alpha t}\mathbf{e}_x$, $\alpha{\geq}0$, а остальная поверхность теплоизолирована. Найти температуру стержня.

2.256. Торец $x{=}0$ цилиндрического стержня ($0{<}x{<}l$) поддерживается при 0^o, а через другой торец происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой At. Определить температуру стержня при $t{>}0$, если при $t{=}0$ она равна нулю.

2.257. $u_t = a^2 u_{xx} + At, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0.$

2.258. $u_t = a^2 u_{xx} + Axt, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0.$

2.259. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + At, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0.$

2.260. $u_t = a^2 u_{xx} + Axt, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = 0.$

2.261. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) = At^2, \;\; u(x,0) = 0.$

2.262. $e^{\alpha x} u_t = a^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} + A\,t, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

2.263. Определить температуру однородного шара радиуса r_0, поверхность которого имеет температуру At, а начальная температура равна нулю.

2.264. Решить задачу теплопроводности для шара, радиус которого r_0, если температура поверхности равна $u_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha \geq 0$, а начальная температура равна нулю.

2.265. Внутрь однородного шара через его поверхность поступает радиальный тепловой поток; радиус шара r_0, плотность потока At. Какова температура шара при $t>0$, если его начальная температура равна нулю?

2.266. Однородный шар нагревается радиальным тепловым потоком; радиус шара r_0, плотность потока на поверхности шара равна $\mathbf{q} = -q_0 e^{-\alpha t}\mathbf{e}_r$, $\alpha > 0$. Определить температуру шара при $t>0$, если его начальная температура равна нулю.

2.267. Через поверхность однородного шара происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой; радиус шара r_0, температура внешней среды At. Найти температуру шара при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.268. Начальная температура шара, радиус которого r_0, равна нулю. Шар нагревается в результате действия тепловых источников, мощность которых в единице объема $Q_0(1-r/r_0)\,e^{-\alpha t}$, $\alpha \geq 0$. Решить задачу теплопроводности, если поверхность шара поддерживается при нулевой температуре.

2.269. $u_t = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0, t) = At^2 \;\; u(r, 0) = 0.$

2.270. $u_t = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + Art, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0, t) = u(r, 0) = 0.$

Пример 2.12. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями. Если струна, рассмотренная в примере 2.1, находится в поле внешних сил, то ее движение определяется уравнением

$$u_{tt} = -\mathcal{L}u + f(x, t), \quad x \in \Delta, \;\; 0 < t, \tag{2.29}$$

и условиями (2.2), (2.3). Метод разделения переменных сводится к следующим операциям:

1) определение собственных функций и собственных значений оператора $\mathcal{L}$ (т.е. решение задачи (2.8), (2.9));

2) разложение решения в ряд по собственным функциям

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{2.30}$$

в котором $u_n(t)$ — решение задачи Коши

$$u_n'' + \lambda_n u_n = f_n(t), \quad 0 < t, \tag{2.31}$$

$$u_n(0) = u_{0n}, \quad u_n'(0) = u_{1n}, \tag{2.32}$$

где f_n, u_{0n}, u_{1n} — коэффициенты Фурье функций f, u_0, u_1 соответственно. В самом деле, из уравнения (2.29) вытекает соотношение

$$(u_{tt}, X_n) = -(\mathcal{L}u, X_n) + (f, X_n) \tag{2.33}$$

или, так как $(\mathcal{L}u, X_n) = (u, \mathcal{L}X_n) = \lambda_n (u, X_n)$,

$$(u, X_n)_{tt} + \lambda_n (u, X_n) = (f, X_n),$$

что эквивалентно (2.31); условия (2.32) следуют из начальных данных (2.3). Задача Коши (2.31), (2.32) имеет решение

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau + \\ + u_{0n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{u_{1n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t, \tag{2.34}$$

которое завершает построение ряда (2.30).

Замечание. Если $f(x,t)$=0, то уравнение (2.31) совпадает с уравнением (2.7), а коэффициенты u_{0n}, u_{1n} представляют собой не что иное, как A_n и B_n (см.(2.11)).

Пусть на неподвижную струну $(0<x<l)$, конец $x=0$ которой закреплен жестко, а конец $x=l$ — упруго посредством пружинки с коэффициентом упругости k, действует с момента $t=0$ сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x_0 \in (0, l)$. Задача, которую нужно решить, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{F_0}{\rho_0} \sin \omega t \cdot \delta(x - x_0), \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h = \frac{k}{T_0},$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Здесь $\mathcal{L}=-d^2/dx^2$, $X_n(x)=\sin \sqrt{\lambda}_n x$, $\sqrt{\lambda_n}=\frac{\mu_n}{l}$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $p\,tg\,\mu=-\mu$, $p=hl$. Коэффициенты $u_n(t)$ ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$$

определяются условиями:

$$\begin{aligned} &u_n'' + \omega_n^2 u_n = \tfrac{F_0 X_n(x_0)}{\rho_0 \|X_n\|^2} \sin \omega t, \quad \omega_n = a\sqrt{\lambda_n}. \\ &u_n(0) = u_n'(0) = 0, \quad \|X_n\|^2 = \tfrac{l}{2} \tfrac{\mu_n^2 + p^2 + p}{\mu_n^2 + p^2}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Решение задачи (2.35) дается формулой (2.34), в которой надо заменить $\sqrt{\lambda_n}$ на $a\sqrt{\lambda_n}$. Функцию $u_t(n)$ можно найти непосредственно, записав общее решение уравнения как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения:

$$u_n(t) = \begin{cases} A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + M_n \sin \omega t, & \omega \neq \omega_n, \\ C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t + N_n t \cos \omega t, & \omega_n = \omega_{n_0}. \end{cases}$$

Из начальных условий следует, что $B_n=0$, $A_n=-\frac{\omega M_n}{\omega_n}$, $D_n=0$, $C_n=-\frac{N_n}{\omega_n}$, а коэффициенты

$$M_n = \frac{F_0 X_n(x_0)}{\rho_0 \|X_n\|^2 (\omega_n^2 - \omega^2)}, \quad N_n = -\frac{F_0 X_n(x_0)}{\omega \rho_0 \|X_n\|^2}$$

получаются подстановкой частного решения в уравнение задачи (2.35). В итоге, если $\omega \neq \omega_n$, то

$$u(x,t) = \frac{\omega F_0}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x_0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2 - \omega_n^2)} \left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right). \quad (2.36)$$

Если $\omega{=}\omega_{n_0}$ (резонанс), то

$$u(x,t) = \frac{F_0 X_{n_0}(x_0)X_{n_0}(x)}{2\rho_0 \omega \|X_n\|^2} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t \right) + \\ + \frac{\omega F_0}{\rho_0 l} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{X_n(x_0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

Замечание. Резонансное решение можно получить также из ряда (2.36) предельным переходом при $\omega \to \omega_n$ (например, по правилу Лопиталя) в соответствующем слагаемом.

2.271. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила $F_0\mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x_0 \in (0,\, l)$ в течение времени от $t{=}0$ до $t{=}t_0{>}0$. Решить задачу о движении струны после прекращения действия силы; начальные условия нулевые.

2.272. Концы струны $(0{<}x{<}l)$ закреплены с помощью пружинок, коэффициенты упругости которых k_1 и k_2. Решить задачу о движении струны под действием силы $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x_0 \in (0,\, l)$ с момента времени $t{=}0$; начальные условия нулевые.

2.273. К струне $(-l{<}x{<}l)$ с закрепленными концами прикреплен в точке $x{=}0$ шарик, масса которого m. Решить задачу о движении струны под действием силы $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, приложенной к шарику с момента времени $t{=}0$; начальные условия нулевые.

2.274. Концы линии $(0{<}x{<}l)$ с пренебрежимо малой утечкой заземлены. В момент времени $t{=}0$ в точку $x_0 \in (0,\, l)$ помещают заряд Q_0. Определить потенциал линии.

2.275. В стержне ($-l<x<l$) с теплоизолированной поверхностью (включая торцы) в течение времени от $t=0$ до $t=t_0>0$ действуют тепловые источники, мощность которых в единице объема равна Q_0. Определить температуру стержня при $t>t_0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.276. В сечении $x_0 \in (0,\, l)$ стержня ($0<x<l$) действует источник тепла постоянной мощности Q_0 в течение времени от $t=0$ до $t=t_0>0$. Найти температуру стержня при $t>0$, если начальная температура равна нулю, конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а остальная поверхность теплоизолирована.

2.277. Один конец ($x=l$) линии ($0<x<l$) с параметрами R, C ($L=G=0$) изолирован, а другой — заземлен через конденсатор C_0. В момент $t=0$ в точку $x_0 \in (0, l)$ линии помещают заряд Q_0. Определить заряд конденсатора.

2.278. На прямоугольную мембрану ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) с закрепленным краем действует сила $F_0\mathbf{e}_u$, равномерно распределенная по поверхности мембраны. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.279. На прямоугольную мембрану ($0<x<l_1, 0<y<l_2$) с закрепленным краем действует сила $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$, равномерно распределенная по диагонали $y=\frac{l_2}{l_1}x$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.280. На оси длинного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$) находится проводник с током. Ток включается на время от $t=0$ до $t=t_0>0$; при прохождении тока с единицы длины проводника выделяется тепловая мощность Q_0. Определить температуру бруса при $t>0$, если его поверхность теплоизолирована, а начальная температура равна нулю.

2.281. На прямоугольную мембрану ($0<x<l_1, 0<y<l_2$) с закрепленным краем действует сила $F_0\mathbf{e}_u$, равномерно распределенная

по диагонали $y=\frac{l_2}{l_1}x$. Найти равновесную форму мембраны и прогиб в центре.

2.282. На полукруглую мембрану ($r<r_0$, $0\le\varphi<\pi$) с закрепленным краем действует сила, распределенная по линии $\varphi=\pi/2$ с плотностью 1) $p_0\,\mathbf{e}_u$; 2) $p_0\frac{r}{r_0}\,\mathbf{e}_u$. Определить статический прогиб мембраны.

2.283. Бесконечная нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно оси проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0, на расстоянии r_1 от оси. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра, если 1) $r_1<r_0$; 2) $r_1>r_0$.

2.284. Решить предыдущую задачу для незаземленного незаряженного цилиндра.

2.285. Параллельно оси цилиндра (радиус r_0, магнитная проницаемость $\mu=\infty$) на расстоянии $d>r_0$ расположен прямой ток J. Определить векторный потенциал магнитного поля.

2.286. Прямой ток $\mathbf{J}=J\,\mathbf{e}_z$ расположен параллельно оси (ось $0z$) длинного цилиндра, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ. Найти векторный потенциал магнитного поля в цилиндре, если расстояние тока от оси цилиндра $r_1>r_0$.

2.287. В среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется цилиндрическая полость (радиус r_0, $\varepsilon_0=1$). Внутри полости параллельно оси на расстоянии r_1 от нее расположена бесконечная нить, дипольный момент единицы длины которой $\mathbf{p}=p\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$. Найти силу, действующую на единицу длины нити.

2.288. По оболочке ($r=r_0$, $0<\varphi<\pi$, $-\infty<z<\infty$), расположенной на проводящем заземленном основании, течет постоянный ток J, втекающий через точку ($r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$, $z=0$) Определить потенциал электрического поля и плотность тока в оболочке, если ее проводимость σ.

2.289. Круглая пластинка, радиус которой r_0, находится в статическом равновесии под действием поперечной силы $F_0\,\mathbf{e}_u$, равномерно распределенной по диаметру. Найти максимальный прогиб пластинки, если 1) ее край жестко закреплен; 2) она свободно оперта по краю.

2.290. Решить предыдущую задачу для силы, распределенной по диаметру с плотностью $p_0\frac{r}{r_0}\,\mathbf{e}_u$.

2.291. Прямоугольная пластинка ($0<x<l_1, 0<y<l_2$), опертая по краю, находится в статическом равновесии под действием поперечной силы $F_0\,\mathbf{e}_u$, равномерно распределенной по диагонали $y=\frac{l_2}{l_1}x$. Определить форму пластинки и прогиб ее центра.

2.292. На эллиптическую пластинку (полуоси эллипса a и b) с закрепленным краем действуют поперечные силы, плотность которых на единицу площади равна $p_0\,\mathbf{e}_u$. Определить равновесную форму пластинки.

Пример 2.13. Смешанная задача с неоднородными граничными условиями. Решение этой задачи завершает построение схемы метода разделения переменных.

Дан стержень ($0<x<l$) с теплоизолированной боковой поверхностью, начальная температура которого равна нулю, а торцы $x=0$ и $x=l$ имеют температуру 0^o и $\mu(t)$ соответственно. Для определения температуры стержня при $t>0$ нужно решить задачу

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} \quad 0<x<l,\ \ 0<t,\\ &u(0,t)=0, \quad u(l,t)=\mu(t),\\ &u(x,0)=0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Метод Фурье в форме, изложенной в примере 2.1, не применим из-за неоднородности граничных условий (переменные не разделяются).

Один из способов решения задачи 2.37 основан на преобразовании неоднородных граничных условий в однородные. Этого можно достичь двумя путями.

1. Пусть функция $w(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (и только им). Из множества подобных функций естественно выбрать наиболее просто зависящую от x, так как впоследствии нужно вычислять коэффициенты Фурье именно этой функции. Пусть $w{=}(Ax{+}B)\mu(t)$. Так как (согласно граничным условиям)

$$u(0,t) = B\mu(t) = 0, \qquad u(l,t) = (Al+B)\mu(t) = \mu(t),$$

то $w{=}\frac{x}{l}\mu(t)$. Если решение задачи 2.37 представить в виде суммы $u(x,t) = v(x,t){+}w(x,t)$, то для функции $v(x,t)$ получится задача

$$\begin{aligned} &v_t = a^2 v_{xx} - \frac{x}{l}\cdot\mu'(t), \quad 0<x<l, \;\; 0<t,\\ &v(0,t) = v(l,t) = 0,\\ &v(x,0) = -\frac{x}{l}\mu(0), \end{aligned}$$

рассмотренная в примере 2.12.

2. Задача (2.37) имеет эквивалентную постановку (см. задачу 10.75):

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + a^2\mu(t)\cdot\delta'(x-l), \quad 0<x<l, \;\; 0<t,\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = 0. \end{aligned}$$

В примере 2.12 показано, что решение имеет вид ряда по собственным функциям, коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &u_n' + a^2\lambda_n u_n = (-1)^{n+1}\tfrac{2a^2\pi n}{l}\mu(t), \quad 0<t,\\ &u_0 = 0, \end{aligned} \tag{2.38}$$

и, следовательно,

$$u_n(t) = (-1)^{n+1}\frac{2\pi a^2 n}{l^2}\int_0^t \mu(\tau)e^{-(\frac{\pi a n}{l})^2(t-\tau)}d\tau.$$

Таким образом,

$$u(x,t)=\frac{2\pi a^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nsin\frac{\pi nz}{l}\int_0^t \mu(\tau)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2(t-\tau)}d\tau. \quad (2.39)$$

Замечание. При $t>0$ ряд (2.39) медленно сходится в окрестности точки $x=l$, так как каждый член ряда при $x\to l$ стремится к нулю и требуется большое число слагаемых для формирования ненулевой суммы ($u(x,t)\to\mu(t)$ при $x\to l$.) Сходимость ряда (2.39) можно улучшить интегрированием по частям

$$\int_0^t \mu(\tau)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2(t-\tau)}d\tau=$$
$$=\left(\frac{l}{\pi an}\right)^2\left\{\left[\mu(t)-\mu(0)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2t}\right]-\int_0^t \mu'(\tau)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2(t-\tau)}d\tau\right\}$$

и применением формулы суммирования. После этих преобразований решение приобретает форму

$$u(x,t)=\frac{x}{l}\mu(t)-$$
$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sin\frac{\pi nx}{l}}{n}\left[\mu(0)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2t}+\int_0^t \mu'(\tau)e^{-(\frac{\pi an}{l})^2(t-\tau)}d\tau\right].$$

Если $x\to l$, то ряд сходится к нулю и $u(l,t)=\mu(t)$.

Другой способ использует методику, изложенную в примере 2.12. Решение $u(x,t)$ записывается в виде ряда (2.30), коэффициенты $u_n(t)$ которого определяются из соотношения (аналогичного (2.33))

$$(u_t,X_n)=a^2(u_{xx},X_n) \quad (2.40)$$

при условии $u_n(0)=0$. После интегрирования по частям выражения в правой части (2.40)

$$(u_{xx},X_n)=(u_xX_n-u\,X_n')\Big|_0^l+(u,X_n'')=-\mu(t)X_n'(l)-\lambda_n(u,X_n)$$

уравнение (2.40) приобретает форму:

$$u_n(t) + a^2\lambda_n u_n(t) = -\mu(t)X_n'(l).$$

Таким образом, для $u_n(t)$ получается задача (2.38), так что решение $u(x,t)$ имеет вид (2.39).

Третий способ — метод Дюамеля — основан на решении вспомогательной задачи со стационарными неоднородностями в граничных условиях (см. задачу 2.293.)

2.293. Метод Дюамеля. Пусть $u(x,t)$ — решение смешанной задачи

$$-\mathcal{L}u = \begin{cases} u_{tt} \\ u_t \end{cases}, \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t,$$
$$\alpha_1 u_x(0,t) - \beta_1 u(0,t) = \mu(t), \quad \alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = 0,$$

с нулевыми начальными условиями, где оператор $\mathcal{L}$ имеет вид (2.5), $\mu(t)$ — произвольная допустимая функция, а $v(x,t)$ — решение той же задачи при μ=1. Доказать, что

$$u(x,t) = \int_0^t \mu(\tau)\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau.$$

2.294. К торцу x=l цилиндрического стержня (0<x<l) приложена сила $F_0 \sin\omega t\,\eta(t)\,\mathbf{e}_x$. Применяя метод Дюамеля решить задачу о продольных колебаниях стержня, если торец x=0 1) закреплен; 2) свободен; 3) закреплен упруго. Начальные условия нулевые.

2.295. На стержень (0<x<l), торец x=0 которого закреплен, действует с момента времени t=0 сила $F(t)\,\mathbf{e}_x$, приложенная к свободному торцу x=l. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.296. Однородный цилиндрический стержень, расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, начинает двигаться под

действием силы $F_0\mathbf{e}_x$, приложенной к торцу $x{=}l$ с момента времени $t{=}0$ до $t{=}t_0{=}\frac{2l}{a}$, где $a^2{=}E/\rho$. Определить движение стержня при $t{>}t_0$.

2.297. Торец $x{=}l$ однородного стержня закреплен жестко, а торец $x{=}0$ — упруго посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, расположенной на оси $0x$. С момента времени $t{=}0$ свободный конец пружинки движется (относительно положения равновесия) по закону $\alpha(t)$, $\alpha(0){=}0$. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

2.298. Решить предыдущую задачу для стержня, торец $x{=}l$ которого свободен.

2.299. Решить в акустическом приближении задачу о движении идеального газа в трубке $(0{<}x{<}l)$, на одном конце $(x{=}l)$ которой находится поршень, движущийся со скоростью $v(t)\,\eta(t)$, $v(0){=}0$, а другой конец закрыт. До момента $t{=}0$ газ находился в равновесном состоянии.

2.300. Трубка $(0{<}x{<}l)$ заполнена идеальным газом, давление которого P_0, плотность ρ_0. На конце $x{=}0$ имеется перегородка, которая движется со скоростью $v(t)\eta(t)$, $v(0){=}0$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если 1) конец $x{=}l$ закрыт; 2) на конце $x{=}l$ находится легкий перемещающийся без трения поршень, закрепленный посредством пружинки с коэффициентом упругости k.

2.301. К концу $x{=}0$ линии $(0{<}x{<}l)$ с пренебрежимо малой утечкой подключена с момента $t{=}0$ батарея с э.д.с. $E(t)$, а другой конец заземлен. Найти потенциал линии при условии $4\pi L^2{>}CR^2l^2$.

2.302. Сфера, радиус которой r_0, заполнена газом. С момента $t{=}0$ радиус меняется по закону $r_0(1+\alpha(t))$, $\alpha(0){=}0$, $|\alpha(t)|{\ll}1$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

2.303. Внутрь слоя ($0<x<l$) через поверхность $x=l$ поступает неустойчивый газ (распад пропорционален концентрации), плотность потока которого $q(t)$, концентрация газа на поверхности $x=0$ при любом t равна нулю. Решить задачу диффузии, если до момента $t=0$ газа в слое не было.

2.304. Начальная температура стержня ($0<x<l$) равна нулю. Найти его температуру при $t>0$, если на конце $x=l$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(t)$, а остальная поверхность теплоизолирована.

2.305. Один конец ($x=0$) линии ($0<x<l$) с параметрами R, C ($L=G=0$) заземлен через сопротивление R_1, а к другому концу через сопротивление R_2 подключается на время от $t=0$ до $t=t_0>0$ батарея с э.д.с. E_0. Найти потенциал линии после отключения батареи, если конец $x=l$ остается заземленным через R_2.

2.306. Через поверхность однородного шара проходит тепловой поток; радиус шара r_0, плотность потока $\mathbf{q}=-q(t)\,\mathbf{e}_r$. Найти температуру шара при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.307. Грань $x=0$ неограниченного бруса ($-\infty<z<\infty$) с прямоугольным поперечным сечением ($0<x<l_1$, $0<y<l_2$) имеет температуру $u_0 e^{-\alpha|z|}$, $\alpha\geq 0$, а остальная поверхность поддерживается при 0^o. Определить стационарную температуру бруса.

2.308. Внутрь полуограниченного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l_1$, $|y|<l_2$, $0<z$) через грань $y=0$ поступает тепловой поток постоянной плотности q_0, а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре. Определить стационарную температуру бруса.

2.309. Грань $z=l$ куба ($0<x, y, z<l$) имеет температуру u_0, а остальная поверхность — температуру 0^o. Определить температуру $u(x, y, z, t)$ куба при $t>0$, если $u(x, y, z, 0)=0$.

2.310. В проводящем слое ($-l<x<l$) течет постоянный ток. Ток втекает и вытекает вдоль линий ($x=-l, y=0$) и ($x=l, y=0$) соответственно, параллельных оси $0z$, и распределен вдоль них с постоянной линейной плотностью J. Определить плотность тока в слое.

2.311. В полукруглой пластинке, толщина которой h, течет постоянный ток J. Ток втекает и вытекает по образующим и равномерно распределен вдоль них (см. задачу 1.349). Найти плотность тока в пластинке.

2.312. Определить плотность тока в тонкой цилиндрической оболочке ($r=r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$), в точку $(r_0, 0, 0)$ которой втекает ток J, а через точку $(r_0, \pi, 0)$ вытекает.

2.313. Постоянный ток J течет в тонкой проводящей оболочке, имеющей форму полусферы ($r=r_0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<\varphi<2\pi$). Токовые контакты входа и выхода расположены в точках $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ и $(r_0, \frac{\pi}{2}, 0)$ соответственно. Определить плотность тока в оболочке.

2.3. Задачи, в которых применяются специальные функции и ортогональные полиномы

Пример 2.14. Стержень ($0<x<l$) в форме клина (см. рис.2.2), торец $x=0$ которого упруго закреплен, расположен на идеально гладкой горизонтальной поверхности и находится в статическом равновесии под действием силы $F\mathbf{e}_x$, приложенной к торцу $x=0$.

В момент $t=0$ действие силы прекращается. Решить задачу о движении стержня, пренебрегая деформацией поперечных сечений.

В одномерном приближении движение стержня моделируется

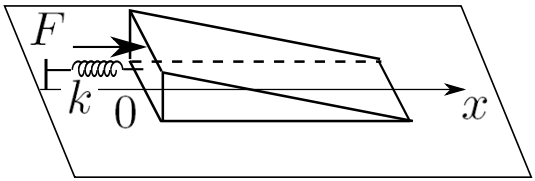

Рис. 2.2

совокупностью условий

$$\rho_0(l-x)u_{tt} = E_0\frac{\partial}{\partial x}(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0<x<l, \;\; 0<t,$$
$$E_0S_0u_x(0,t) - ku(0,t) + F_0 = 0, \quad |u|<\infty,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

В переменных $v(x,t) = u(x,t) - F_0/k$, $\xi = l - x$ задача приобретает вид

$$\xi v_{tt} = a^2\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}, \quad 0<\xi<l, \;\; 0<t,$$
$$|v|<\infty, \quad v_\xi(l,t) + hv(l,t) = 0,$$
$$v(\xi,0) = -\frac{F_0}{k}, \quad v_t(\xi,0) = 0, \quad a^2 = \frac{E_0}{\rho_0}, \;\; h = \frac{k}{E_0S_0}.$$

В результате разделения переменных $v(\xi,t) = X(\xi)\,T(t)$ получается задача на собственные значения для уравнения Бесселя

$$\xi\frac{d}{d\xi}\xi\frac{dX}{d\xi} + \lambda X = 0, \quad 0<\xi<l, \tag{2.41}$$
$$X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \tag{2.42}$$

и уравнение $T'' + a^2\lambda T = 0$.

Оператор $\mathcal{L} = -\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\xi\frac{d}{d\xi}$ — положителен, так как

$$(\xi\,\mathcal{L}X,\,X) = \int_0^l \overline{X}\,\frac{d}{d\xi}\xi\,\frac{dX}{d\xi}\,d\xi = -\xi\,\overline{X}X'\Big|_0^l + \int_0^l \xi\left|\frac{dX}{d\xi}\right|^2 d\xi =$$
$$= lh|X(l)|^2 + \int_0^l \xi\left|\frac{dX}{d\xi}\right|^2 d\xi \ge 0,$$

поэтому все его собственные значения $\lambda_n \geq 0$, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом ξ на промежутке $(0,\, l)$. Общее решение уравнения (2.41) $X = AJ_0(\sqrt{\lambda}\xi) + BY_0(\sqrt{\lambda}\xi)$ удовлетворяет граничным условиям (2.42) при $B=0$, $\sqrt{\lambda}J_0'(\sqrt{\lambda}l) + hJ_0(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Если обозначить $l\sqrt{\lambda} = \mu$, $lh = p$ и учесть, что $J_0'(x) = -J_1(x)$, то уравнение для собственных значений примет вид

$$\mu J_1(\mu) - pJ_0(\mu) = 0. \tag{2.43}$$

Пусть $\mu_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, — корень уравнения (2.43), тогда

$$\lambda_n = \mu_n^2/l^2, \quad X_n(\xi) = J_0\left(\frac{\mu_n}{l}\xi\right),$$

при этом

$$\int_0^l J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\xi\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{l}\xi\right) \xi\, d\xi = 0, \quad m \neq n.$$

Для вычисления нормы $\|X_n\|$ можно применить формулу (2.12), в которой $k = \xi$, $X = X(\sqrt{\lambda}\xi)$, $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\xi}{2\lambda}\frac{\partial X}{\partial \xi}$, $l_1 = 0$, $l_2 = l$, поэтому

$$kW\left[\frac{\partial X}{\partial \lambda},\, X\right] = \frac{\xi}{2\lambda} W\left[\xi\frac{\partial X}{\partial \xi},\, X\right] = \frac{\xi}{2\lambda}\left[\xi\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 - X\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial X}{\partial \xi}\right] =$$

$$= \frac{\xi^2}{2\lambda}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 + \lambda X^2\right] = \frac{\xi^2}{2}\left[(X')^2 + X^2\right],$$

где X' — производная по всему аргументу. Так как подстановка при $\xi = 0$ равна нулю, то

$$\|X_n\| = \frac{l^2}{2}\left\{\left[J_0'(\mu_n)\right]^2 + J_0^2(\mu_n)\right\}. \tag{2.44}$$

Решение задачи для $v(x,t)$ представляет собой ряд по собственным функциям

$$v(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) X_n(\xi), \quad \omega_n = \frac{a\mu_n}{l}.$$

Из начальных условий следует, что D_n=0,

$$C_n = -\frac{F_0}{k\|X_n\|^2}\int_0^l J_0\left(\frac{\mu_n}{l}\xi\right)\,\xi\,d\xi = -\frac{l^2F_0J_1(\mu_n)}{k\mu_n\|X_n\|^2} = \\ = -\frac{2pF_0}{k(\mu_n^2+p^2)J_0(\mu_n)}.$$

При вычислении интеграла использована рекуррентная формула $(\xi J_1)'=-\xi J_0$, а при вычислении нормы — формула (2.44) и уравнение (2.43). Решение поставленной задачи имеет форму ряда

$$u(x,t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - 2p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n(1-\frac{x}{l})\right)}{(\mu_n^2+p^2)J_0(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n}{l}t\right).$$

2.314. Круглая мембрана, радиус которой r_0, закреплена по краю. Найти частоты и амплитуды собственных колебаний мембраны

2.315. Мембрана в форме сектора ($0<r<r_0$, $0<\varphi<\alpha$) закреплена по краю. Определить частоты и амплитуды собственных колебаний мембраны.

2.316. Тяжелая струна ($0<x<l$) подвешена за конец x=0 в поле тяжести. Найти частоты собственных колебаний струны, если ее плотность $\rho(x)=\rho_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\nu}$, где $\nu>-1$.

2.317. Вертикальный стержень ($0<x<l$) находится в поле тяжести; нижний конец (x=0) закреплен, а верхний свободен. Равновесие прямолинейного стержня остается устойчивым (относительно малых поперечных возмущений), если его длина l меньше некоторой критической величины l_k. При $l>l_k$ равновесие нарушается и стержень изгибается. Определить критическую длину однородного цилиндрического стержня с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.7).

2.318. Стационарная диффузия нейтронов в бесконечном цилиндре, радиус которого r_0, сопровождается поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$); на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация. Определить отношение χ максимальной концентрации к ее среднему (по объему) значению.

2.319. Длинный цилиндр, радиус которого r_0, изготовлен из замедлителя, поглощающего нейтроны ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$), и находится в вакууме, На оси цилиндра расположен линейный изотропный источник нейтронов, мощность единицы длины которого q_0. Решить задачу стационарной диффузии, поставив условие 1) для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе $r = \tilde{r}_0$; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности $r{=}r_0$. Сравнить полученные результаты.

2.320. Длинный цилиндр, радиус которого r_0, находится в изотропном нейтронном поле Φ_0. При условиях задачи 1.172 найти плотность потока нейтронов $\Phi(r)$ в цилиндре и вычислить коэффициент прохождения γ (см.2.16).

2.321. Определить в диффузионном приближении критический радиус длинного цилиндра, поставив условие 1) для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе; 2) для односторонней плотности тока нейтронов на поверхности цилиндра.

2.322. Найти в диффузионном приближении наименьший критический объем реактора, имеющего форму конечного цилиндра ($r{<}r_0$, $0{\leq}\varphi{<}2\pi$, $|z|{<}l$), поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе реактора.

2.323. Получить в диффузионном приближении условие критичности для цилиндрического реактора ($r{<}r_0$, $0{\leq}\varphi{<}2\pi$, $|z|{<}l$) с торцевыми отражателями ($r{<}r_0$, $0{\leq}\varphi{<}2\pi$, $l{<}|z|{<}h$). Сечения поглощения и рассеяния соответственно равны Σ_a^C и Σ_s^C для активной зоны, Σ_c^R и Σ_s^R — для отражателя. Поставить условие

для плотности потока нейтронов на внешней экстраполированной поверхности, предполагая, что экстраполированные радиусы реактора и отражателя одинаковы.

2.324. Найти в диффузионно-возрастном приближении критический радиус длинного цилиндра, поставив условие для плотности потока нейтронов на экстраполированной границе; делением быстрыми нейтронами пренебречь.

2.325. Решить предыдущую задачу с учетом деления, осуществляемого быстрыми нейтронами.

2.326. В неограниченном круглом цилиндре происходит диффузия нейтронов с размножением. Определить критический радиус цилиндра (см. задачу 2.36.) если 1) концентрация нейтронов на поверхности равна нулю; 2). цилиндр находится в вакууме.

2.327. Цилиндрический проводник, радиус которого r_0, находится в однородном магнитном поле, параллельном оси проводника. В момент времени $t = 0$ поле отключается и остается равным нулю вне проводника. Найти характерное время t_k затухания поля в проводнике.

2.328. Вертикальный сосуд в форме цилиндра радиуса r_0 заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, глубина которой $h_0 \gg r_0$. Определить частоту и форму гравитационных волн малой амплитуды: $A \ll \lambda \ll h_0$.

2.329. Канал $(-l<x<l)$ с прямоугольным поперечным сечением, дно которого имеет форму $h(x)=h_0(1-|x|/l)$, $h_0 \ll l$, заполнен идеальной несжимаемой жидкостью. В жидкости возбуждаются одномерные (вдоль канала) длинные гравитационные волны малой амплитуды ($A \ll h_0 \ll \lambda$). Определить две первые (наименьшие) частоты колебаний жидкости.

2.330. Решить задачу 2.29. для канала ($0<x<l$), ширина d и глубина h которого зависят от x :

1. $d(x)=\frac{d_0}{l}\,x$, $h(x)=h_0$;
2. $d(x)=d_0$, $h(x)=\frac{h_0}{l}\,x$;
3. $d(x)=\frac{d_0}{l}\,x$, $h(x)=\frac{h_0}{l}\,x$.

2.331. В круглом цилиндрическом волноводе с идеально проводящей поверхностью, радиус которого r_0, распространяется волна типа 1) TM; 2) TE. Определить частоту отсечки волны.

2.332. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы в двухмерной потенциальной яме

$$U(r)=\begin{cases} 0, & 0\le r<r_0,\\ \infty, & r_0<r. \end{cases}$$

2.333. Круглая мембрана с закрепленным краем получает импульс I в результате удара молоточком, основанием которого является круг, радиус мембраны r_0, радиус основания молоточка $r_1<r_0$; при ударе центры обоих кругов совпадают. Решить задачу о колебаниях мембраны.

2.334. Круглая мембрана ($r<r_0$) с закрепленным краем находится в статическом равновесии под действием силы, равномерно распределенной по кругу, радиус которого $r_1<r_0$, с плотностью $p_0\mathbf{e_u}$. В момент $t=0$ действие сил прекращается. Решить задачу о колебаниях мембраны.

2.335. Полый цилиндр, радиус которого r_0, заполнен идеальным газом и движется со скоростью $v_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор, перпендикулярный оси цилиндра. В момент $t=0$ цилиндр мгновенно останавливается. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

2.336. Упругий стержень ($0<x<l$) в форме клина (рис.1.6.), расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, получает импульс I в результате продольного удара в торец $x=0$, площадь которого S_0. Решить в одномерном приближении задачу о движении стержня.

2.337. Упругий стержень ($0<x<l$) в форме клина (рис.1.6.), расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, получает импульс в результате продольного удара в торец $x=0$ сосредоточенной массы m, имеющей скорость v_0 и движущейся вместе со стержнем.. Решить в одномерном приближении задачу о движении стержня.

2.338. Тяжелая однородная струна ($0<x<l$), подвешенная за один конец ($x=0$) в поле тяжести, находится в статическом равновесии под действием горизонтальной силы F_0, приложенной в точке $x_0 \in (0,\, l)$. Решить задачу о колебаниях струны после прекращения действия силы.

2.339. Тяжелая однородная струна ($0<x<l$), подвешенная за один конец ($x=0$) в поле тяжести, имеет начальный профиль $u_0 x/l$ и нулевую начальную скорость. Решить задачу о колебаниях струны.

2.340. Струна ($0<x<l$), плотность которой $\rho(x)=\rho_0(1-\frac{x}{l})^{\nu}$, где $\nu>-1$, подвешена за один конец ($x=0$) в поле тяжести и находится в статическом равновесии. Решить задачу о колебаниях струны, возбужденных поперечным ударом в точку $x_0 \in (0,\, l)$, в результате которого струна получает импульс I.

2.341. Круглая мембрана, радиус которой r_0, закреплена по краю. С момента $t=0$ на мембрану действует сила $F_0\mathbf{e_u}$, равномерно распределенная по окружности, радиус которой $r=r_1<r_0$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.342. Круглая мембран, радиус которой r_0, закреплена по краю. С момента $t=0$ на мембрану действует сила $F_0 \cos \omega t\, \mathbf{e_u}$, равномерно распределенная по окружности, радиус которой $r=r_1<r_0$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.343. Круглая мембран, радиус которой r_0, закреплена по краю. С момента времени $t{=}0$ до $t{=}t_0{>}0$ на мембрану действует сила, равномерно распределенная с плотностью $p_0\,\mathbf{e}_u$ по кругу, радиус которого $r_1{<}r_0$. Решить задачу о движении мембраны при нулевых начальных условиях.

2.344. Круглая мембран, радиус которой r_0, закреплена по краю. С момента времени $t{=}0$ на мембрану действует сила, равномерно распределенная с плотностью $p_0 \sin \omega t\,\mathbf{e}_u$ по кругу, радиус которого $r_1{<}r_0$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.345. На гибкую упругую нить $(0{<}x{<}l)$, подвешенную за один конец $(x{=}0)$ в поле тяжести, действует с момента времени $t{=}0$ сила $p_0\mathbf{e_u}$ на единицу длины нити. Определить форму нити в момент времени $t{>}0$.

2.346. Идеальный газ заполняет бесконечно длинный цилиндрический сосуд, радиус которого меняется со временем по закону $r_0(1 + \alpha(t))$, где $|\alpha| \ll 1$, $\alpha(0){=}0$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если до момента $t{=}0$ газ находился в равновесии.

2.347. В длинном полом цилиндре, радиус которого r_0, находится идеальный газ. С момента времени $t{=}0$ поверхность цилиндра движется со скоростью $v_0\alpha(t)\sin\varphi\,\mathbf{e_r}$, $|\alpha| \ll 1$, $\alpha(0){=}0$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

2.348. В полом цилиндре $(r{<}r_0,\ 0{\le}\varphi{<}2\pi,\ 0{<}z{<}l)$ находится идеальный газ. С момента времени $t{=}0$ основание $z{=}l$ цилиндра движется со скоростью $V_0(1 - r^2/r_0^2)\alpha(t)$, $|\alpha| \ll 1$, $\alpha(0){=}0$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

2.349. На клиновидный стержень $(0{<}x{<}l)$, расположенный на гладкой горизонтальной поверхности (рис.1.6), с момента $t{=}0$ действует сила $F_0\,\mathbf{e_x}$, приложенная к торцу $x{=}l$, площадь которого S_0. Решить в одномерном приближении задачу о движении стержня.

2.350. На оси длинного цилиндра, радиус которого $r{=}r_0$, расположен проводник с током; с единицы длины проводника выделяется тепловая мощность Q_0. После того, как тепловое поле стало стационарным, ток отключили. Определить температуру цилиндра, если 1) его поверхность поддерживается при 0^o; 2) на его поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой равна нулю.

2.351. Круглая мембрана, радиус которой r_0, упруго закреплена по краю, Мембрана получает импульс $I\,\mathbf{e_u}$ в результате поперечного удара в ее центр. Решить задачу о движении мембраны, если до удара ее отклонение и скорость равны нулю.

2.352. Поверхность цилиндра ($r{<}r_0$, $0{\le}\varphi{<}2\pi$, $0{<}z{<}l$) поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна $u_0 \sin\frac{\pi z}{l}$. Найти температуру цилиндра при $t{>}0$.

2.353. Начальная температура неограниченного цилиндра, радиус которого r_0, равна $u_0\frac{r}{r_0}\sin\varphi$. Определить температуру цилиндра при $t{>}0$, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре.

2.354. Неограниченный круглый цилиндр с теплоизолированной поверхностью нагрет до температуры $u_0\frac{r}{r_0}(1-\frac{r^2}{r_0^2})\sin\varphi$, радиус цилиндра r_0. Как будет изменяться его температура со временем?

2.355. На поверхности неограниченного круглого цилиндра происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна нулю, радиус цилиндра r_0 . Определить температуру $u(r,\varphi,t)$ цилиндра при $t{>}0$, если $u(r,\varphi,0){=}u_0\frac{r^2}{r_0^2}\cos 2\varphi$.

2.356. Полукруглая мембрана ($r{<}r_0$, $0{<}\varphi{<}\pi$) с закрепленным краем получает начальное отклонение $u_0(r){=}u_0\frac{r}{r_0}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$ при нулевой начальной скорости. Решить задачу о колебаниях мембраны.

2.357. Полукруглая мембрана ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$) с закрепленным краем получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате удара в точку $(r_1,\,\pi/2)$, где $0<r_1<r_0$. Решить задачу о колебаниях мембраны, если до удара смещения и скорости ее точек были равны нулю.

2.358. Длинный цилиндр радиуса r_0 охлаждается снаружи теплоносителем, температуру которого можно считать равной температуре поверхности цилиндра. Определить температуру $u(r,t)$ цилиндра при $t>0$, если $u(r,0)=u_0(r)$, а теплоемкость теплоносителя на единицу длины (вдоль оси цилиндра) равна C_0.

2.359. В неограниченном цилиндре, радиус которого r_0, с момента времени $t=0$ действуют тепловые источники, их мощность в единице объема равна $Q_0e^{-\alpha t}$, $\alpha\geq 0$. Поверхность цилиндра поддерживается при нулевой температуре, его начальная температура равна нулю. Решить задачу теплопроводности..

2.360. Поверхность неограниченного цилиндра , радиус которого r_0, поддерживается при температуре u_0. Найти температуру $u(r,t)$ цилиндра при $t>0$, если $u(r,0)=0$.

2.361. Полый цилиндр, радиус которого r_0, с вязкой несжимаемой жидкостью начинает вращаться с угловой скоростью ω относительно своей оси. Найти скорость жидкости в момент $t>0$ и при $t\to+\infty$, если скорости поверхности и прилегающего элемента жидкости одинаковы.

2.362. Найти температуру бесконечного цилиндра, радиус которого r_0, если его начальная температура равна нулю, а на поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0.

2.363. На поверхности неограниченного цилиндра происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой At, , радиус цилиндра r_0, Определить температуру цилиндра при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.364. В цилиндре, радиус которого r_0, высота l, диффундирует газ. Боковая поверхность цилиндра представляет собой полупроницаемую перегородку, а основания непроницаемы для газа. Решить задачу диффузии, если начальная концентрация газа в цилиндре равна u_0, а концентрация во внешнем пространства $u_1 \exp(-\alpha t)$, $\alpha \geq 0$.

2.365. Круглая мембрана, радиус которой r_0, закреплена по краю. С момента $t=0$ на мембрану действует сила, распределенная с линейной плотностью $f_0 \cos\varphi\, \mathbf{e_u}$ по окружности, радиус которой $r_1 < r_0$. Решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.366. Определить температуру неограниченного цилиндра, радиус которого r_0, если начальная температура равна нулю, а температура поверхности $u_0 \sin\varphi$.

2.367. Через поверхность длинного цилиндра, радиус которого r_0, проходит поток частиц, радиальная компонента плотности которого $q_0 \cos\varphi$. Определить концентрацию частиц в цилиндре в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

2.368. На поверхности длинного цилиндра, радиус которого r_0, происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_0 \cos 2\varphi$. Найти температуру $u(r, \varphi, t)$ цилиндра при $t>0$, если $u(r, \varphi, 0)=0$.

2.369. Через поверхность $r=r_0$ бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$), проходит тепловой поток постоянной плотности $\mathbf{q_0} = -q_0 \mathbf{e_r}$, а диаметральная плоскость имеет нулевую температуру. Найти температуру бруса при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.370. Начальная температура цилиндра, радиус которого r_0, высота l, равна нулю. Определить температуру цилиндра при $t>0$, если его основания теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $At\cos\varphi$.

2.371. Основания цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$) поддерживаются при нулевой температуре, боковая поверхность — при температуре $u_0 \sin\frac{\pi z}{l}$, а начальная температура равна нулю. Определить температуру цилиндра при $t>0$.

2.372. Основания цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$) имеют нулевую температуру, боковая поверхность — температуру u_0. Определить температуру цилиндра при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.373. Основания цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$) теплоизолированы, а температура поверхности $r=r_0$ равна $u_0 \cos\frac{\pi z}{l} e^{-\alpha t}$, где $\alpha\geq 0$. Найти температуру цилиндра при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.374. Определить стационарную температуру однородного цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$), если боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре, а основания $z=0$ и $z=l$ имеют температуру 0^o и $u_0\frac{r}{r_0}\cos\varphi$ соответственно.

2.375. В проводящий сплошной цилиндр ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $|z|<l$) через центр основания $z=-l$ втекает постоянный ток I, а через центр другого основания вытекает. Какова плотность тока в цилиндре?

2.376. Дан цилиндр ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$). Его боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре, основание $z=l$ теплоизолировано, а через основание $z=0$ поступает тепловой поток, плотность, $q_0\mathbf{e_z}$ столь длительное время, что в цилиндре устанавливается стационарный тепловой режим. В момент $t=0$ основание $z=0$ покрывают теплоизоляцией. Найти температуру цилиндра при $t>0$.

2.377. Определить стационарную температуру однородного цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$), основания $z=0$ и $z=l$ которого имеют температуру 0 и u_0 соответственно, а на боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

2.378. Боковая поверхность цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$) поддерживается при нулевой температуре, основание $z=0$ теплоизолировано, а через основание $z=l$ поступает тепловой поток постоянной плотности $q_0\mathbf{e_z}$. Определить стационарную температуру цилиндра, если в нем происходит выделение тепловой мощности Q_0 в единице объема.

2.379. Основание $z=0$ цилиндра ($r<r_0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0<z<l$) имеет нулевую температуру, на основание $z=l$ падает тепловой поток $\mathbf{Q_0}=-Q_0\mathbf{e_z}$, равномерно распределенный по кругу, радиус которого $r_1<r_0$, а остальная часть основания и боковая поверхность теплоизолированы. Найти стационарную температуру цилиндра.

2.380. Определить температуру бесконечного цилиндра, радиус которого r_0, если начальная температура равна нулю, а температура поверхности не зависит от времени и равна $f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — нечетная 2π-периодическая функция.

2.381. На поверхности $r=r_0$ бесконечно длинного бруса с поперечным сечением ($r<r_0$, $0<\varphi<\pi$) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0, а диаметральная плоскость поддерживается при 0^o. Найти температуру бруса при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.382. Поперечным сечением бесконечно длинного бруса является сектор ($r<r_0$, $0<\varphi<\alpha$). Грани $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ теплоизолированы, а поверхность $r=r_0$ поддерживается при стационарной температуре $u_0\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}$. Решить задачу теплопроводности при нулевой начальной температуре.

Пример 2.15. Задачи следующей группы содержат стационарные неоднородности. Метод их решения (см. пример 2.14.) состоит в построении частного решения, удовлетворяющего уравнению и граничным условиям. В результате редукции неоднородная задача преобразуется в однородную (однородные граничные усло-

вия и уравнение). Техника решения одной из таких задач

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Ar^2, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$|u| < \infty, \;\; u_r(r_0, t) = 0, \quad u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0$$

сводится к нескольким заменам. Подстановка $u(r,t)=v(r,t)+f(r)$ в уравнение

$$v_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + Ar^2$$

приводит к однородному уравнению для $v(r,t)$, если $f(r)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{Ar^2}{a^2} = 0, \quad |f| < \infty,$$

откуда $f(r) = -\frac{Ar^4}{16a^2}$ (одно из ограниченных решений). В этом случае функция $v(r,t)$ — решение задачи

$$v_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$|v| < \infty, \;\; v_r(r_0, t) = \frac{Ar_0^3}{4a^2}, \quad v(r, 0) = \frac{Ar^4}{16a^2}, \;\; v_t(r, 0) = 0.$$

Сразу придти к однородной задаче таким путем не удается из-за конструкции граничного условия. Замена $v(r,t)=w(r,t)+g(r)$ где $g(r) = \frac{Ar_0^2 r^2}{8a^2}$ убирает неоднородность в граничном условии, и для функции $w(r,t)$ получается следующая задача:

$$w_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{Ar_0^2}{2}, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$|w| < \infty, \quad u_r(r_0, t) = 0, \quad w(r, 0) = \frac{Ar^4}{16a^2}, \;\; w_t(r, 0) = 0$$

Хотя уравнение снова стало неоднородным, однако, характер неоднородности изменился: вместо функции вошла константа.

Именно этим фактом диктуется выбор $g(r)$ из множества возможных функций. Теперь замена $w(r,t)=U(r,t)+\frac{Ar_0^2t^2}{4}$ снимает неоднородность в уравнении и не влияет на граничные условия. Итак, $u(r,t)=u_0(r,t)+U(r,t)$, где

$$u_0(r,t)=-\frac{Ar^4}{16a^2}+\frac{Ar_0^2r^2}{8a^2}+\frac{Ar_0^2r^2}{4}$$

частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, а $U(r,t)$ — решение однородной задачи

$$U_{tt}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial U}{\partial r},\quad 0<r<r_0,\ \ 0<t,$$

$$|U|<\infty,\ \ U_r(r_0,t)=0,\ \ U_0(r)=\frac{Ar^4}{16a^2}-\frac{Ar_0^2r^2}{8a^2},\ \ U_t(r,0)=0$$

где $U_0(r)=U(r,0)$.

Далее методом Фурье определяются собственные значения λ_n и собственные функции $R_n(r)$ оператора $\mathcal{L}=-\frac{1}{r}\frac{d}{r}r\frac{d}{dr}$:

$$\mathcal{L}R=\lambda R,\quad 0<r<r_0,$$
$$|r|<\infty,\ \ R'(r_0)=0.$$

В данном случае $\lambda_n=(\frac{\mu_{1n}}{r_0})^2$, $R_n(r)=J_0(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r)$, $n=0,1,2,...$ при этом $\lambda_0=0$. Функция $U(r,t)$ имеет форму ряда

$$U(r,t)=B_0+C_0t+\sum_1^\infty\big(B_n\cos\frac{a\mu_{1n}t}{r_0}+C_n\sin\frac{a\mu_{1n}t}{r_0}\big)R_n(r),$$

коэффициенты которого нужно выбрать так, чтобы были выполнены начальные условия

$$U_0(r)=\sum_0^\infty B_nR_n(r),\quad U_t(r,0)=C_0+\sum_1^\infty\frac{a\mu_{1n}}{r_0}C_nR_n(r).$$

Так как $u_t(r,0)=0$, то $C_n=0$, а коэффициенты $B_n=\frac{(U_0,R_n)}{||R_n||^2}$. При $n=0$ коэффициент $B_0=-\frac{Ar_0^4}{24a^2}$, при $n>0$ можно применить методику, изложенную в примерах 2.4. и 2.6. Так как

$U_0'(r_0) = 0$, то $U_0(r)$ принадлежит области определения оператора $\mathcal{L}$, поэтому в силу эрмитовости

$$\begin{aligned}(U_0, R_n) &= \frac{1}{\lambda_n}(U_0, \mathcal{L}R_n)=\frac{1}{\lambda_n}(\mathcal{L}U_0, R_n)=\frac{1}{\lambda_n}\Big(\frac{Ar^2}{a^2}-\frac{Ar_0^2}{4a^2}, R_n\Big) = \\ &= \frac{A}{\lambda_n a^2}(r^2, R_n)-\frac{Ar_0^2}{4\lambda_n a^2}(1, R_n)=\frac{A}{\lambda_n a^2}(r^2, R_n),\end{aligned}$$

где $(1, R_n) = 0$ вследствие ортогональности собственных функций. Пусть

$$\varphi = r^2, \;\; \tilde{\varphi} = \varphi, \;\; 0 \le r \le r_0, \;\; \tilde{\varphi}\,' = \begin{cases} \varphi\,', & 0 \le r < r_0, \\ 0, & r = r_0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{L}\tilde{\varphi} = \{\mathcal{L}\tilde{\varphi}\} - 2r_0\delta(r - r_0) = 4 - 2r_0\delta(r - r_0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(r^2, R_n) &= (\varphi, R_n) = (\tilde{\varphi}, R_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\tilde{\varphi}, \mathcal{L}R_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\mathcal{L}\tilde{\varphi}, R_n) = \\ &= \frac{1}{\lambda}\big(4 - 2r_0\delta(r - r_0), R_n\big) = -\frac{2r_0^2 J_0(\mu_{1n})}{\lambda_n}.\end{aligned}$$

Таким образом, $B_n = -\frac{4Ar_0^4}{a^2\mu_1 n}{}^4 J_0(\mu_{1n})$, $n = 1, 2, 3...$, так что решение исходной задачи

$$u(r,t) = \frac{Ar^2}{8a^2}\big(r_0^2 - \frac{r^2}{2}\big) + \frac{Ar_0^2 t^2}{4} - \frac{Ar_0^2}{24a^2} - \frac{4Ar_0^4}{a^2}\sum_1^\infty \frac{J_0(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r)\cos\frac{a\mu_{1n}t}{r_0}}{\mu_{1n}^4 J_0(\mu_{1n})}.$$

Решить задачи 2.383 – 2.389 со стационарными неоднородностями, преобразуя их в однородные с помощью частного решения, удовлетворяющего уравнению и граничным условиям.

2.383. Круглая мембрана, радиус которой r_0, поддерживается в горизонтальном положении с помощью подставки; $\mathbf{e}_u$=$\mathbf{e}_g$. В момент t=0 подставку убирают. Решить задачу о движении мембраны под действием силы тяжести, если ее край 1) закреплен жестко; 2) свободен; 3) закреплен упруго.

2.384. Решить задачу о колебаниях мембраны, радиус которой r_0, с закрепленным краем под действием давления $p_0\eta(r_1 - r)\,\mathbf{e_u}$, $r_1 \le r_0$ при нулевых начальных условиях, если край мембраны закреплен.

2.385. Неограниченный цилиндр, радиус которого r_0, имеет нулевую температуру. С момента $t = 0$ через поверхность цилиндра проходит тепловой поток, плотность которого постоянна и равна $-q_0\mathbf{e}_r$. Решить задачу теплопроводности.

2.386. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + Ar^4, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
$1)\, u(r_0,t) = 0;\; 2)\, u_r(r_0,t) = 0;\; 3)\, u_r(r_0,t) + hu(r_0,t) = 0.$

2.387. $u_{tt} = a^2\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}u\big) + AJ_\nu(\beta r), \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0, \;\; 1)\, u(r_0,t) = 0, \; \nu \ge 0;$
$2)\, u_r(r_0,t) = 0, \; \nu > 0;\; 3)\, u_r(r_0,t) + hu(r_0,t) = 0, \; \nu \ge 0.$

2.388. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + AI_0(\beta r), \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \;\; u_r(r_0,t) = 0, \;\; u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.389. Начальная температура неограниченного цилиндра, радиус котрого r_0, равна нулю. С момента $t = 0$ в единицу времени в единице объема цилиндра выделяется постоянное количества тепла Q_0. Решить задачу теплопроводности, если 1) поверхность цилиндра поддерживается при нулевой температуре; 2) через поверхность цилиндра проходит тепловой поток постоянной плотности $-q_0\mathbf{e}_r$; 3) на поверхности цилиндра происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой равна нулю.

Пример 2.16. В некоторых случаях удается свести неоднородную задачу с нестационарными неоднородностями к однородной, выделив частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (см. пример 2.11.) Подобным образом можно решить задачу

$$u_t = a^2 \tfrac{1}{r} \tfrac{\partial}{\partial r} r \tfrac{\partial u}{\partial r} + At, \;\; 0 < r < r_0, \; 0 < t,$$
$$|u(0,t)| < \infty, \; u(r_0,t) = u(r,0) = 0$$

с нестационарной неоднородностью в уравнении. Сначала осуществляется переход к задаче со стационарной неоднородностью посредством подстановки $u(r,t) = f(r)\,t + v(r,t)$. Пусть

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{R(r) : R \in C^2(0;r_0),\; |R(0)| < \infty,\; R(r_0) = 0\}.$$

Функцию $f(r)$ нужно подчинить условиям

$$\mathcal{L}f(r) = \tfrac{A}{a^2}, \;\; 0 < r < r_0,$$
$$|f(0)| < \infty, \;\; f(r_0) = 0,$$

откуда $f(r) = \frac{A}{4a^2}(r_0^2 - r^2)$. Тогда $v(r,t)$ — решение задачи со стационарной неоднородностью:

$$v_t + f(r) = -a^2 \mathcal{L} v, \;\; 0 < r < r_0, \; 0 < t,$$
$$|v(0,t) < \infty, \;\; v(r_0,t) = v(r,0) = 0.$$

Согласно схеме, изложенной в примере 2.10., решение следует отыскивать в виде суммы $v(r,t) = w(r,t) + h(r)$. Для функции w получается задача для однородного уравнения с однородными граничными условиями (см. пример 2.3.)

$$w_t = -a^2 \mathcal{L} w, \;\; 0 < r < r_0, \; 0 < t,$$
$$|w(0,t)| < \infty, \;\; w(r_0,t) = 0, \; w(r,0) = -h(r),$$

где $h(r)$ выбрана так, что

$$\mathcal{L}h = -\tfrac{1}{a^2} f(r), \;\; 0 < r < r_0,$$
$$|h(0)| < \infty, \;\; h(r_0) = 0.$$

Отсюда $h(r) = \frac{A}{64a^4}(4r_0^2r^2 - r^4 - 3r_0^4)$, а функция $w(r,t)$ выражается рядом

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r) e^{-a^2\lambda_n t},$$

в котором $\lambda_n = \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}\right)^2$ — собственные значения, $R_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}r)$ — собственные функции оператора $\mathcal{L}$. Из начального условия

$$-h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r)$$

следует, что коэффициенты $C_n = -\frac{(h,R_n)}{\|R_n\|^2}$. В силу эрмитовости оператора $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
(h,R_n) &= \frac{1}{\lambda_n}(h,\mathcal{L}R_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\mathcal{L}h,R_n) = -\frac{1}{a^2\lambda_n^2}(f,R_n) = \\
&= -\frac{1}{a^2\lambda_n^2}(f,\mathcal{L}R_n) = -\frac{1}{a^2\lambda_n^2}(\mathcal{L}f,R_n) = -\frac{A}{a^4\lambda_n^2}(1,R_n) = \\
&= -\frac{A}{a^4\lambda_n^2}\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right) r\,dr = -\frac{Ar_0^2}{a^4\lambda_n^2\mu_{0n}^2}\int_0^{\mu_n} J_0(\xi)\xi\,d\xi = \\
&= -\frac{Ar_0^2}{a^4\lambda_n^2\mu_{0n}^2}\int_0^{\mu_n} (J_1(\xi)\xi)'d\xi = -\frac{Ar_0^2}{a^4\lambda_n^2\mu_{0n}}J_1(\mu_{0n}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)}{4a^2}\left(t - \frac{3r_0^2-r^2}{16a^2}\right) + \frac{2Ar_0^4}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}^4 J_1(\mu_{0n})}.$$

Решить задачи 2.390 – 2.399, выделив частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям.

2.390. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \quad u(r_0,t) = 0, \; u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) t; 2) t^2; 3) $r^2 t$; 4) $r^2 t^2$; 5) $e^{-\alpha t}$; 6) $r^2 e^{-\alpha t}$; 7) $J_0(\beta r)t$; 8) $I_0(\beta r)t$; 9) $J_0(\beta r)\, e^{-\alpha t}$; 10) $I_0(\beta r)\, e^{-\alpha t}$; 11) $J_0(\beta r)\sin \omega t$; 12) $I_0(\beta r)\sin \omega t$; $\alpha > 0$.

2.391. На круглую мембрану ($r<r_0$) с закрепленным краем действует давление $p_0 \sin \omega t\, \mathbf{e_u}$; решить задачу о колебаниях мембраны при нулевых начальных условиях.

2.392. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \quad u_r(r_0,t) = 0, \; u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где $f(r,t)$ равна 1) $h(t)$; 2) $r^2 t$; 3) $r^2 t^2$; 4) $r^2 e^{-\alpha t}$; 5) $J_0(\beta r)t$; 6) $I_0(\beta r)t$; 7) $J_0(\beta r)\, e^{-\alpha t}$; 8) $I_0(\beta r)\, e^{-\alpha t}$; 9) $J_0(\beta r)\sin \omega t$; 10) $I_0(\beta r)\sin \omega t$; $\alpha > 0$.

2.393. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < t,$
$|u(0,t)| < \infty, \quad u_r(r_0,t) + hu(r_0,t) = 0, \; u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) t; 2) t^2; 3) $r^2 t$; 4) $r^2 t^2$; 5) $J_0(\beta r)t$; 6) $I_0(\beta r)t$.

2.394. $u_{tt} = a^2 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right),$
$0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi \le 2\pi, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u_r(r_0,\varphi,t) = Bt^2 \sin \varphi, \quad u(r,\varphi,0) = u_t(r,\varphi,0) = 0.$

2.395. $u_{tt} = a^2 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right),$
$0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi \le 2\pi, 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u(r_0,\varphi,t) = A\, e^{-\alpha t} \cos \varphi, \quad \alpha \ge 0,$
$u(r,\varphi,0) = u_t(r,\varphi,0) = 0.$

2.396. $u_{tt} = a^2 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right),$
$0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi \le 2\pi, \quad 0 < t,$
$|u| < \infty, \quad u_r(r_0,\varphi,t) = At \sin \varphi, \quad u(r,\varphi,0) = u_t(r,\varphi,0) = 0.$

2.397. Температура поверхности бесконечного цилиндра, радиус которого r_0, равна 1) At; 2) At^2; 3) $A\sin\omega t$. Какова температура цилиндра при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю?

2.398. $u_t = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}$, $0<r<r_0$, $0<t$,
$|u(0,t)|<\infty$, $u_r(r_0,t)=f(t)$, $u(r,0)=0$,
где функция $f(r,t)$ равна 1) At; 2) At^2.

2.399. $u_t = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}$, $0<r<r_0$, $0<t$,
$|u(0,t)|<\infty$, $u_r(r_0,t)+hu(r_0,t)=At^2$, $u(r,0)=0$.

Пример 2.17. В однородном цилиндре ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$) имеются тепловые источники, выделяющие в единице объема за единицу времени количество тепла Q_0. Определить стационарную температуру цилиндра, если через основание $z=0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, основание $z=l$ теплоизолировано, а боковая поверхность имеет температуру $u_0\cos 2\varphi$.

Стационарное распределение температуры описывается следующими уравнениями:

$$\Delta u + Q_0/k=0$$
$$(u_z - hu)|_{z=0}=0, \quad u_z|_{z=l}=0,$$
$$u|_{r=r_0}=u_0\cos 2\varphi.$$

Можно убрать неоднородность из уравнения, не изменяя граничных условий. В самом деле, пусть $u(r,\varphi,z)=v(r,\varphi,z)+w(r)$, где

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr} = -Q_0/k, \quad 0<r<r_0, \quad |w(r)|<\infty, \quad w(r_0)=0,$$

тогда $w(r)=\frac{Q_0}{4k}(r_0^2-r^2)$, а $v(r,\varphi,z)$ — решение задачи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \tag{2.45}$$
$$(u_z - hu)|_{z=0}=0, \quad u_z|_{z=l}=0,$$

$$u|_{r=r_0}=u_0\cos 2\varphi.$$

Подстановка $v(r,z,\varphi)=R(r)Z(z)\cos 2\varphi$ превращает уравнение (2.45) в тождество

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr}-\frac{4R}{r^2}\right)+\frac{Z''}{Z}=0,$$

которое вместе с граничными условиями определяет задачу на собственные значения

$$Z''+\lambda Z=0,\quad 0<z<l, \tag{2.46}$$

$$Z'(0)-hZ(0)=0,\quad Z'(l)=0 \tag{2.47}$$

и модифицированное уравнение Бесселя

$$R''+\frac{1}{r}R'-\left(\lambda+\frac{4}{r^2}\right)R=0. \tag{2.48}$$

Функция $Z(z)=A\cos\sqrt{\lambda}(l-z)+B\sin\sqrt{\lambda}(l-z)$, являющаяся общим решением уравнения (2.44), удовлетворяет граничным условиям (2.47), если $B=0$ и $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l-h\cos\sqrt{\lambda}l=0$. Следовательно,

$$\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2,\quad Z_n(z)=\cos\mu_n\left(1-\frac{z}{l}\right),\quad n\in\mathbf{N},$$

где $\mu_n>0$ — корни уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=hl$. Общее решение уравнения (2.48) $R_n(r)=A_nI_2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)+B_nK_2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)$ содержит неограниченное слагаемое $B_nK_2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)$, которое не должно входить в решение $v(r,\varphi,z)$, поэтому $B_n=0$. Таким образом,

$$v(r,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)Z_n(z).$$

При $r=r_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_2\left(\frac{\mu_n}{l}r_0\right)Z_n(z)=u_0,$$

откуда

$$A_n = \frac{u_0}{I_2\left(\frac{\mu_n r_0}{l}\right)\|Z_n\|^2}\int_0^l Z_n(z)\,dz.$$

После вычисления интеграла и квадрата нормы (см. пример 2.4.) и формулу (2.89.)), получается следующий результат:

$$u(r,\varphi,z) = \frac{Q}{4k}(r_0^2 - r^2) + \\ + 2pu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}\,I_2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)I_2\left(\frac{\mu_n}{l}r_0\right)}\cos\mu_n\left(1-\frac{z}{l}\right)\cos 2\varphi.$$

2.400. Найти стационарную температуру однородного цилиндра ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), боковая поверхность которого поддерживается при температуре $u_0 \sin\frac{2\pi z}{l} cos\varphi$, а основания — при нулевой температуре.

2.401. Дан цилиндр ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$) с теплоизолированными основаниями, боковая поверхность которого поддерживается при температуре $u_0\cos^2\frac{\pi z}{l}\sin\varphi$. Найти стационарную температуру цилиндра.

2.402. Найти стационарную концентрацию частиц, диффундирующих в цилиндре ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$) с непроницаемыми основаниями, через поверхность $r=r_0$ которого проходит радиальный поток частиц плотности $q_0\cos^2\frac{\pi z}{\pi l}\cos 2\varphi$.

2.403. Найти стационарную температуру однородного цилиндра ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $|z|<l$), боковая поверхность которого поддерживается при температуре $u_0\left(1-\frac{|z|}{l}\right)$, а основания $z=\pm l$ — при 0^o.

2.404. Определить стационарную температуру однородного цилиндра ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $-l<z<l$), через боковую поверхность которого проходит тепловой поток плотности $\mathbf{q_0} = -q_0\mathbf{e_r}$, а основания $z=-l$ и $z=l$ поддерживаются при температуре $-u_0$ и u_0 соответственно.

2.405. Основания цилиндра ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $-l<z<l$) теплоизолированы, а боковая поверхность имеет температуру $f(z)\sin\varphi$, где $f(z)=u_1$ при $z<0$ и $f(z)=u_2$ при $z>0$. Определить стационарную температуру цилиндра.

2.406. Дан цилиндр ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), поверхность $r=r_0$ которого имеет температуру $u_0 z/l$, основание $z=0$ поддерживается при 0^o, а через основание $z=l$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Определить стационарную температуру цилиндра.

2.407. Дан цилиндр ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), боковая поверхность которого имеет температуру $u_0\cos\varphi\,\cos\pi z/l$, основание $z=l$ теплоизолировано, а через основание $z=0$ проходит тепловой поток плотности $q_0\mathbf{e_z}$. Определить стационарную температуру цилиндра.

2.408. Основания цилиндра ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$) поддерживаются при нулевой температуре, а на поверхности $r=r_0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0. Найти стационарную температуру цилиндра.

2.409. Через бесконечную пластину ($-l<z<l$) проходит проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность q_0. Найти стационарную температуру пластины, если температура граней равна нулю. Проводник представляет собой круглый цилиндр, радиус которого r_0, ось цилиндра перпендикулярна к граням пластины.

2.410. В неограниченной пластине ($-\infty<x,y<\infty$, $|z|<l$) просверлен цилиндрический канал ; радиус канала равен r_0, ось перпендикулярна граням пластины. Найти стационарную температуру пластины, если ее грани поддерживаются при нулевой температуре, а поверхность канала — при температуре $u_0\cos 2\varphi$.

2.411. Найти стационарную температуру пластины ($-\infty<x,y<\infty$, $|z|<l$), в которой просверлен цилиндрический

канал (см. предыдущую задачу), если грани теплоизолированы, а температура поверхности канала равна $u_0 \cos^2 \varphi \, \cos^2 \frac{\pi z}{l}$.

2.412. Определить стационарную температуру неограниченной пластины ($-\infty<x, y<\infty, |z|<l$), в которой имеется цилиндрический канал радиуса r_0 (см. задачу 2.410), если грани пластины поддерживаются при нулевой температуре, а через стенку канала происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой равна u_0.

2.413. Определить стационарное распределение температуры в толстостенной трубе ($r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), через поверхность $r=r_2$ которой проходит радиальный тепловой поток плотности $\mathbf{q_0} = -q_0\mathbf{e_r}$, а остальная поверхность имеет нулевую температуру.

2.414. В точке $z_0 \in (0, l)$ оси проводящей заземленной цилиндрической коробки ($r<r_0$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$) находится заряд Q. Показать, что потенциал внутри цилиндра

$$u(r,z)=\frac{4Q}{l}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\pi n r_0}{l}\right)\,K_0\left(\frac{\pi n r}{l}\right)-K_0\left(\frac{\pi n r_0}{l}\right)\,I_0\left(\frac{\pi n r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{\pi n r_0}{l}\right)}\,\sin\frac{\pi n z_0}{l}\,\sin\frac{\pi n z}{l}.$$

2.415. В пространстве между проводящими заземленными плоскостями $z=0$ и $z=l$ в точке $(0, 0, z_0)$ находится заряд Q. Показать, что потенциал этой системы

$$u(r,z)=\frac{4Q}{l}\sum_{n=1}^{\infty}K_0\left(\frac{\pi n r}{l}\right)\,\sin\frac{\pi n z_0}{l}\,\sin\frac{\pi n z}{l}.$$

2.416. Показать, что в двухмерной потенциальной яме

$$U(r)=\begin{cases}0, & r<r_0,\\ U_0, & r_0<r,\end{cases}$$

при любом U_0 существует связанное состояние.

2.417. Найти собственные колебания электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе, радиус которого r_0, высота l.

2.418. Найти собственные колебания электромагнитного поля в секториальном резонаторе ($r<r_0$, $0<\varphi<\alpha<2\pi$, $0<z<l$).

2.419. В круглом ступенчатом волокне могут распространяться TE- и TM-моды с аксиально симметричным полем; такие моды обозначаются символами TE_{0s} и TM_{0s}, где первый индекс $m=0$ — азимутальное модовое число, второй индекс s — радиальное модовое число. Найти электромагнитное поле каждой моды и определить частоты отсечки.

2.420. Для слабонаправляющего ступенчатого волокна решить задачу о распространении электромагнитной волны, поле которой не обладает аксиальной симметрией.

2.421. Пропускная способность длинных волоконно-оптических линий связи снижается из-за дисперсии (см.задачу 1.385.) Межмодовая дисперсия отсутствует в одномодовом режиме работы волновода. Доказать, что в интервале частот

$$0 < \omega < \frac{c\mu_{11}}{r_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}},$$

где μ_{11} — первый положительный нуль функции Бесселя $J_1(\mu)$, ступенчатый круглый волновод пропускает только одну (двукратно вырожденную) моду.

2.422. Моделью плоского волновода ($-\infty<x<\infty$), формирование которого обусловлено диффузионным процессом, может служить градиентный волновод с экспоненциальным профилем показателя преломления

$$n(x)=n_2\left(1+\Delta\, e^{-\frac{|x|}{l}}\right), \qquad \Delta=\frac{n_1-n_2}{n_2} \ll 1.$$

Решить задачу о распространении TE- и TM-мод в таком волноводе и определить частоты отсечки направляемых мод.

2.423. Плоский градиентный волновод ($0<x$) граничит с воздухом. В результате диффузионного процесса формируется сильно асимметричный показатель преломления, профиль которого описывается функцией

$$n(x)=\begin{cases} n_3, & x<0, \\ n_2\left(1+\Delta\, e^{-\frac{x}{l}}\right), & x>0, \end{cases} \qquad \Delta=\frac{n_1-n_2}{n_2}\ll 1.$$

При условии, что показатель преломления воздуха $n_3 \ll n_2$, решить задачу о распространении TE- и TM-мод и определить их частоты отсечки.

2.424. Определить плотность переменного тока в круглом цилиндрическом проводнике (задача 1.369). Рассмотреть случаи $pr_0 \ll 1$ и $pr_0 \gg 1$. В приближении $pr_0 \gg 1$ определить среднюю по времени тепловую мощность w, выделяющуюся в единице длины проводника.

2.425. Найти магнитное поле H и амплитуду A_j тока Фуко в цилиндрическом проводнике, находящемся в переменном магнитном поле (задача 1.364.) При условии $pr_0 \ll 1$ определить среднюю по времени тепловую мощность w, выделяющуюся в единице длины проводника.

2.426. Проводящий цилиндр (радиус r_0, $\mu=1$) находится в поперечном магнитном поле $\mathbf{H}e^{i\omega t}$. Определить установившееся магнитное поле в цилиндре в квазистационарном приближении.

2.427. Получить в диффузионном приближении условие критичности для длинного цилиндрического реактора ($r<r_1$) с полостью ($r<r_0<r_1$). Условие для плотности потока нейтронов поставить на экстраполированной границе.

2.428. Получить в диффузионном приближении условие критичности для длинного цилиндрического реактора ($r<r_1$), внутри которого находится сильный поглотитель ("черное" тело) в форме

цилиндра, радиус которого $r_0<r_1$. Условие для плотности потока нейтронов поставить на экстраполированной границе реактора, используя соотношение (1.48).

2.429. В длинный цилиндрический реактор ($r_0<r<r_1$) введен регулирующий стержень ($r<r_0$), поглощающий нейтроны. Получить в диффузионном приближении условие критичности, если сечения поглощения и рассеяния равны Σ_a^C и σ_s^C в активной зоне, Σ_a^D и σ_s^D в поглотителе. Условие для плотности потока нейтронов поставить на экстраполированной границе.

2.430. Длинный цилиндрический реактор ($r<r_0$) окружен отражателем ($r_0<r<r_1$), где r_1 — экстраполированный радиус. Получить в диффузионном приближении условие критичности, если сечения поглощения и рассеяния равны Σ_a^C и σ_s^C в активной зоне, Σ_a^R и σ_s^R в отражателе. Условие для плотности потока нейтронов поставить на внешней экстраполированной границе.

2.431. Решить задачу 2.428. для конечного цилиндрического реактора ($r_0<r<r_1$, $|z|<l$).

2.432. Решить задачу 2.429. для конечного цилиндрического реактора ($r_0<r<r_1$, $|z|<l$) с регулирующим стержнем ($r<r_0$, $|z|<l$) при условии, что экстраполированная длина $\tilde{l}$ реактора и стержня одна и та же.

2.433. Решить задачу 2.430. для конечного цилиндрического реактора ($r<r_0$, $|z|<l$), окруженного отражателем ($r_0<r<r_1$, $|z|<l$) при условии, что экстраполированная длина $\tilde{l}$ реактора и отражателя одна и та же.

Пример 2.18. Определить температуру трубы ($r_1<r<r_2$), поверхности $r=r_1$ и $r=r_2$ которой имеют температуру 0^o и $u_0 \cos\varphi$ соответственно, а начальная температура равна нулю.

Температура $u(r,\varphi,t)$ определяется условиями

$$u_t = a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right),\quad r_1<r<r_2,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<t,$$
$$u(r_1,\varphi,t)=0,\quad u(r_2,\varphi,t)=u_0\cos\varphi,\quad u(r,\varphi,0)=0.$$

Зависимость от φ можно учесть, полагая $u(r,\varphi,t)=v(r,t)\cos\varphi$. Чтобы освободиться от неоднородности в граничных условиях следует представить функцию $v(r,t)$ в виде суммы $w(r,t)+s(r)$, где $s(r)$ — решение стационарной задачи

$$\mathcal{L}s\equiv-\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds}{dr}-\frac{s}{r^2}\right)=0,\quad r_1<r<r_2\qquad s(r_1)=0,\ \ s(r_2)=u_0.$$

Отсюда

$$s(r)=u_0\,\frac{r^2-r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{r_2}{r}$$

и, следовательно, $w(r,t)$ — решение задачи

$$w_t=-a^2\mathcal{L}w,\quad r_1<r<r_2,\ \ 0<t,$$
$$w(r_1,t)=w(r_2,t)=0,\ \ w(r,0)=-s(r),$$

рассмотренной в примере 2.1. Согласно методу Фурье определение функции $w(r,t)=R(r)\,T(t)$ сводится к решению уравнения $T'+a^2\lambda T=0$ и задачи на собственные значения

$$\mathcal{L}R=\lambda R,\quad r_1<r<r_2,$$
$$R(r_1)=R(r_2)=0.$$

Так как $R(r)=AJ_1(\sqrt{\lambda}r)+BY_1(\sqrt{\lambda}r)$, то из граничных условий вытекает система

$$\begin{cases} AJ_1(\sqrt{\lambda}r_1)+BY_1(\sqrt{\lambda}r_1)=0\\ AJ_1(\sqrt{\lambda}r_2)+BY_1(\sqrt{\lambda}r_2)=0,\end{cases}$$

условием совместности которой является уравнение

$$Y_1(\mu)J_1(\alpha\mu)-J_1(\mu)Y_1(\alpha\mu)=0, \tag{2.49}$$

где $\mu{=}r_2\sqrt{\lambda}$, $\alpha{=}r_1/r_2$. Пусть $0{<}\mu_1{<}\mu_2{<}\ldots$ — корни уравнения (2.49), тогда $\lambda_n = (\mu_n/r_2)^2$,

$$R_n(r) = Y_1(\mu_n)J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_2}\right) - J_1(\mu_n)Y_1\left(\frac{\mu_n r}{r_2}\right). \qquad (2.50)$$

Квадрат нормы собственной функции

$$\|R_n\|^2\,\frac{r^2}{2}\left[(R_n'(r))^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\mu_n^2 r^2}\right)R_n^2(r)\right]\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

вычисляется так же, как в примере 2.14. Здесь $R_n(r_1){=}R_n(r_2){=}0$, поэтому

$$\|R_n\|^2 = \frac{r_2^2}{2}\left(R_n'(r_2)\right)^2 - \frac{r_1^2}{2}\left(R_n'(r_1)\right)^2.$$

Значения производных выражаются через вронскиан (при этом используется уравнение (2.49)):

$$R_n'(r_2) = -\,W\left[J_1(\mu_n),\, Y_1(\mu_n)\right] = -\frac{2}{\pi\mu_n},$$

$$R_n'(r_1) = -\frac{J_1(\mu_n)}{J_1(\alpha\mu_n)}W[J_1(\alpha\mu_n),\, Y_1(\alpha\mu_n)] = -\frac{2r_2}{\pi r_1\mu_n}\frac{J_1(\mu_n)}{J_1(\alpha\mu_n)}.$$

В результате

$$\|R_n\|^2 = \frac{2r_2^2}{\pi^2\mu_n^2}\,\frac{J_1^2(\alpha\mu_n) - J_1^2(\mu_n)}{J_1^2(\alpha\mu_n)}.$$

Функция $w(r,t)$ имеет вид ряда

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r)\, e^{-a_2\lambda_n t},$$

коэффициенты которого

$$C_n = -\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_{r_1}^{r_2} s(r)R_n(r)\, r\, dr.$$

Один из способов вычисления интеграла основан на формуле (10.44). Пусть

$$\tilde{s}(r) = \begin{cases} s(r), & r_1 \le r < r_2, \\ 0, & r = r_2, \end{cases} \qquad \tilde{s}'(r) = s'(r), \quad r \le r \le r_2,$$

тогда (см. формулу (10.40))

$$\mathcal{L}\tilde{s} = \mathcal{L}\, s + u_0\, \delta'(r - r_2) = u_0\, \delta'(r - r_2),$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} s\, R_n\, r\, dr &= \frac{1}{2\pi}(\tilde{s},\, R_n) = -\frac{1}{2\pi\lambda_n}(\tilde{s},\, \mathcal{L}R_n) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\lambda_n}(\mathcal{L}\tilde{s},\, R_n) = -\frac{u_0}{2\pi\lambda_n}(\delta'(r - r_2),\, rR_n) = \\ &= \frac{u_0}{\lambda_n} r\, \frac{dR_n}{dr}\bigg|_{r=r_2} = \frac{u_0}{\lambda_n} r_2 \sqrt{\lambda_n} R_n'(r_2) = -\frac{2u_0 r_2^2}{\pi \mu_n^2}. \end{aligned}$$

Итак, $u(r, \varphi, t) = v(r, t)\cos\varphi$, где

$$v(r,t) = u_0 \left[\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\, \frac{r_2}{r} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha\mu_n) R_n(r)}{J_1^2(\alpha\mu_n) - J_1^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_2}\right)^2 t} \right].$$

2.434. На упругий клиновидный стержень с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.7.) действует сжимающая сила $F\,\mathbf{e}_x$ (рис.2.3a.) Определить критическую величину силы (см. задачу 2.6.), если: 1) $l_1 = Const$ (рис.2.3b.); 2) $l_2 = Const$ (рис.2.3c.)

2.435. Определить частоты и амплитуды собственных колебаний кольцевой мембраны ($r_1 < r < r_2$) с закрепленной границей.

2.436. Мембрана в форме сектора ($r_1 < r < r_2$, $0 < \varphi < \varphi_0 < 2\pi$) закреплена по краю. Определить частоты и амплитуды собственных колебаний мембраны.

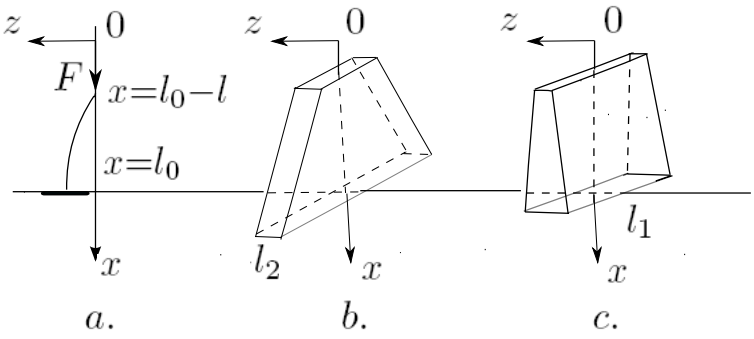

Рис. 2.3

2.437. В бесконечно глубоком бассейне, ограниченном двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых r_1 и $r_2 > r_1$, находится идеальная несжимаемая жидкость. Определить частоты гравитационных волн малой амплитуды, возникающих в результате внешнего воздействия на поверхность.

2.438. Решить задачу 2.29. для канала $(0<x<l)$ с прямоугольным поперечным сечением, ширина d и глубина h которого заданы:

1. $d(x)=d_1+\frac{d_2-d_1}{l}x$, $h(x)=h_0$;
2. $d(x)=d_0$, $h(x)=h_1+\frac{h_2-h_1}{l}x$.

2.439. Тяжелая однородная струна $(0<x<l)$ с шариком $(-\infty<x,y<\infty, |z|<l)$ на конце $x=l$ подвешена в точке $x=0$. Найти собственные частоты колебаний струны относительно вертикального положения равновесия если масса шарика m.

2.440. Определить волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы, масса которой M, находящейся в двухмерной потенциальной яме

$$U(r)=\begin{cases} 0, & r\in(r_1\,;\,r_2),\\ \infty, & r\in[r_1\,;\,r_2]. \end{cases}$$

2.441. Решить задачу о распространении $TEM-$, $TE-$, $TM-$ волн в пространстве между двумя идеально проводящими коаксиальными цилиндрами, радиусы которых r_1 и $r_2{>}r_1$.

2.442. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами, радиусы которых r_1 и $r_2{>}r_1$, заполнено вязкой несжимаемой жидкостью. Внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. После того, как движение жидкости установилось, внутренний цилиндр мгновенно останавливается. Найти скорость жидкости в предположении, что элемент жидкости у стенки и стенка имеют одинаковую скорость.

2.443. Кольцевая мембрана ($r_1{<}r{<}r_2$) с закрепленным краем находится в равновесии под действием постоянного давления $p_0\mathbf{e}_u$. В момент времени $t{=}0$ давление становится равным нулю. Решить задачу о колебаниях мембраны.

2.444. Кольцевая мембрана ($r_1{<}r{<}r_2$) с закрепленным краем находится в горизонтальном положении. Решить задачу о колебаниях мембраны под действием силы тяжести при нулевых начальных условиях.

2.445. Горизонтальный пласт с непроницаемыми основаниями имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2, толщины H. Пласт заполнен малосжимаемой жидкостью, давление в которой P_0. В центре линзы пробурили скважину, радиус которой $r_1{<}r_2$. Найти расход жидкости (поток скорости) через поверхность скважины при установившейся изотермической фильтрации, если давление в скважине $P_1{<}P_0$, давление вне пласта P_0.

2.446. Решить задачу (в одномерном приближении) о движении клиновидного стержня ($0{<}x{<}l$) с закрепленным торцом $x{=}0$ под действием постоянной силы $F_0\mathbf{e}_x$, приложенной с момента времени $t{=}0$ к торцу $x{=}l$, площадь которого S_0 (рис.1.3); начальные условия — нулевые.

2.447. Упругий клиновидный стержень ($0<x<l$), расположенный на гладкой горизонтальной поверхности (рис.1.3), получает импульс I в результате продольного удара в торец $x=0$, площадь которого S_0. Решить в одномерном приближении задачу о движении стержня.

2.448. Струна ($0<x<l$) с шариком на конце $x=l$ подвешена в поле тяжести и находится в покое. В момент времени $t=0$ в результате горизонтального удара шарик, масса которого m, приобретает скорость v_0. Решить задачу о колебаниях струны.

2.449. Однородная струна ($0<x<l$) с шариком на конце $x=l$ подвешена в поле тяжести и находится в равновесии под действием горизонтальной силы F_0, приложенной к шарику, масса которого m. Решить задачу о движении струны после прекращения действия силы.

2.450. Решить задачу о движении струны с шариком на конце (описание в задаче (2.448.), если ее начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение $u_0 x/l$.

2.451. Решить задачу о движении струны с шариком на конце (описание в задаче (2.448) под действием горизонтальной силы F_0, приложенной к шарику с момента $t=0$; начальные условия нулевые.

2.452. Определить температуру трубы ($r_1<r<r_2$), внешняя поверхность которой теплоизолирована, внутренняя — имеет нулевую температуру, а начальная температура равна u_0.

2.453. Через внутреннюю поверхность трубы ($r_1<r<r_2$) проходит радиальный тепловой поток, плотность которого q_0, а внешняя поверхность имеет нулевую температуру. Какова температура трубы при $t>0$, если начальная температура равна нулю?

2.454. Горизонтальный пласт имеет форму плоской линзы, радиус которой r_2, в центре пласта пробита скважина, радиус которой

$r_1<r_2$. Пласт заполнен газом, начальное давление которого в пласте равно P_0, давление на поверхности $r=r_1$ равно P_1, а остальная поверхность пласта непроницаема для газа. Обычно $P_0 \gg P_1$ и в коэффициенте при лапласиане в уравнении фильтрации (1.103) полагают $P=P_0$. Решить линеаризованную задачу фильтрации.

2.455. Определить стационарную температуру полуограниченной трубы ($r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z$), если через торец $z=0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой постоянна и равна u_0, а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре.

2.456. Определить стационарную температуру полубесконечной трубы ($r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z$), внутренняя поверхность которой теплоизолирована, внешняя имеет нулевую температуру, а через торец $z=0$ внутрь трубы поступает тепловой поток, плотность которого q_0.

2.457. Определить стационарную температуру толстостенной трубы ($r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), поверхность $r=r_2$ которой теплоизолирована, температура торца $z=0$ постоянна и равна u_0, а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре.

2.458. Найти стационарную температуру толстостенной трубы ($r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $0<z<l$), торец $z=0$ которой имеет температуру

$$u(r,0)=\begin{cases} u_0, & r_1<r<r_0,\\ 0, & r_0<r<r_2,\end{cases}$$

а остальная поверхность теплоизолирована.

2.459. Упругая круглая пластинка, радиус которой r_0, толщина h, закреплена по краю и находится в статическом равновесии пол действием силы $F_0\mathbf{e}_u$, приложенной в центре пластинки. Решить задачу о колебаниях пластинки после прекращения действия силы.

2.460. Упругая круглая пластинка, радиус которой r_0, толщины h, закреплена по краю. Пластинка получает импульс $I\,\mathbf{e}_u$ в результате поперечного удара в ее центр. Определить движение пластинки при нулевых начальных условиях.

2.461. Решить задачу о движении упругой круглой пластинки (радиус r_0, толщина h) с закрепленным краем под действием силы $F_0\mathbf{e}_u$, приложенной к центру пластинки с момента времени $t{=}0$; начальные условия нулевые.

2.462. Закрепленная по краю круглая пластинка, радиус которой r_0, толщин h, расположена на горизонтальной подставке. В момент $t{=}0$ подставку убирают. Решить задачу о движении пластинки под действием силы тяжести при нулевых начальных условиях.

2.463. Упругая круглая пластинка, радиус которой r_0, толщина h, закреплена по краю. Решить задачу о колебаниях пластинки под действием силы, поверхностная плотность которой $F_0 \sin \omega t\, \mathbf{e}_u$. Начальные условия нулевые, резонанс отсутствует. Решение представить в виде суммы вынужденных и свободных колебаний.

2.464. Решить задачу о колебаниях круглой пластинки

$$u_{tt} + a^2\Delta^2 u = 0, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = A\sin\omega t, \;\; u_r(r_0,t) = 0,$$
$$u(r,0) = u_t(r,0) = 0$$

при условии, что частота ω не совпадает ни с одной из собственных частот пластинки. Решение представить в виде суммы вынужденных и собственных колебаний.

2.465. Решить задачу о колебаниях круглой пластинки при отсутствии резонанса:

$$u_{tt} + a^2\Delta^2 u = 0, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = 0, \;\; u_r(r_0,t) = A\sin\omega t,$$
$$u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$$

Решение представить в виде суммы вынужденных и собственных колебаний.

Решить смешанные задачи 2.466 – 2.481, в которых $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}$ — радиальная часть оператора Лапласа в двухмерном пространстве в полярных координатах. Решение представить в виде суммы, одно из слагаемых которой — частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям.

2.466. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) $J_0(\beta r)$; 2) $Y_0(\beta r)$; 3) $I_0(\beta r)$; 4) $K_0(\beta r)$; 5) $J_0(\beta r)t$; 6) $Y_0(\beta r)t$; 7) $I_0(\beta r)t$; 8) $K_0(\beta r)t$.

2.467. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) $J_0(\beta r)$; 2) $Y_0(\beta r)$; 3) $I_0(\beta r)$; 4) $K_0(\beta r)$; 5) $J_0(\beta r)t$; 6) $Y_0(\beta r)t$; 7) $I_0(\beta r)t$; 8) $K_0(\beta r)t$.

2.468. $u_{tt} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) $h(t)$; 2) $J_0(\beta r)$; 3) $Y_0(\beta r)$; 4) $I_0(\beta r)$; 5) $K_0(\beta r)$; 6) $J_0(\beta r)t$; 7) $Y_0(\beta r)t$; 8) $I_0(\beta r)t$; 9) $K_0(\beta r)t$.

2.469. $u_{tt} = a^2\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}u\big) + f(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) Ar^ν; 2) $Ar^\nu t$.

2.470. $u_{tt} = a^2\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}u\big) + f(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) Ar^ν; 2) $Ar^\nu t$.

2.471. $u_{tt} = a^2\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}u\big) + f(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0,$
где функция $f(r,t)$ равна 1) Ar^ν; 2) $Ar^\nu t$.

2.472. $u_t = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = 0,$
функция $f(r,t)$ равна 1) $J_0(\beta r)$; 2) $Y_0(\beta r)$; 3) $I_0(\beta r)$; 4) $K_0(\beta r)$.

2.473. $u_t = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = 0,$
функция $f(r,t)$ равна 1) $J_0(\beta r)$; 2) $Y_0(\beta r)$; 3) $I_0(\beta r)$; 4) $K_0(\beta r)$.

2.474. $u_t = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + Af(r,t), \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
$u_r(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = 0,$
где $f(r,t)$ равна 1) $h(t)$; 2) $J_0(\beta r)$; 3) $Y_0(\beta r)$; 4) $I_0(\beta r)$; 5) $K_0(\beta r)$.

2.475. $u_t = a^2\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} u\big) + Ar^\nu, \quad r_1 < r < r_2, \;\; 0 < t,$
1) $u(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = 0,$
2) $u_r(r_1,t) = u(r_2,t) = u(r,0) = 0,$
3) $u_r(r_1,t) = u_r(r_2,t) = u(r,0) = 0,$

2.476. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = At, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.477. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = A(r_0^2 - r^2)t, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.478. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = A(r_0^2 - r^2)^2 t, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.479. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = At^2, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = u_r(r_0,t) = u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.480. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = 0, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = At, \;\; u_r(r_0,t) = 0,$
$u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

2.481. $u_{tt} + a^2\Delta^2 u = 0, \quad 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$
$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r_0,t) = 0, \;\; u_r(r_0,t) = At,$
$u(r,0) = u_t(r,0) = 0.$

Пример 2.19. Определить стационарную температуру однородного шара, радиус которого r_0, если температура поверхности $f(\theta)$. Рассмотреть случай $f(\theta)=u_0\cos 2\theta$.

В сферических координатах задача для определения температуры $u(r,\theta)$ ставится следующим образом:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}=0, \tag{2.51}$$

$$r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi,$$

$$|u|<\infty,\quad u(r_0,\theta)=f(\theta).$$

При подстановке $u(r,\theta)=R(r)\,P(\theta)$ в уравнение (2.51) оно превращается в тождество

$$-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}=\frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dP}{d\theta}=-\lambda.$$

Задача на собственные значения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dP}{d\theta}+\lambda P=0,\quad 0<\theta<\pi,$$
$$|P|<\infty \tag{2.52}$$

имеет нетривиальные решения лишь при $\lambda_n=n(n+1)$, $n\in\mathbf{N}_0$, и этими решениями являются полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ ([52]), ортогональные на промежутке $[\,0\,;\,\pi\,]$ с весом $\sin\theta$. Для $R(r)$ получается уравнение Эйлера $r^2R_n''+2rR_n'-n(n+1)R_n=0$, фундаментальная система решений которого r^n и $r^{-(n+1)}$.

Итак, решение задачи представляет собой ряд по полиномам Лежандра

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n+B_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\right]P_n(\cos\theta).$$

Из ограниченности $u(r,\theta)$ следует, что $B_n{=}0$, а граничное условие при $r{=}r_0$ приводит к разложению

$$f(\theta){=}\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, P_n(\cos\theta), \tag{2.53}$$

коэффициенты которого

$$A_n{=}\frac{1}{\|P_n\|^2}\int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta, \qquad \|P_n\|^2{=}\frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$u(r,\theta){=}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(2n+1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{\pi} f(\psi)\, P_n(\psi)\, \sin\psi\, d\psi\; P_n(\cos\theta).$$

Если $f(\theta){=}u_0\cos 2\theta$, то коэффициенты ряда (2.53) можно получить, заметив, что $\cos 2\theta{=}2\cos^2{-}1{=}2x^2{-}1$ есть линейная комбинация многочленов $P_0(x),\ P_2(x)$:

$$2x^2-1{=}a_0P_0(x)+a_2P_2(x).$$

Отсюда $a_0{=}{-}1/3,\ a_2{=}4/3$ и

$$u(r,\theta){=}\frac{u_0}{3}\left[4\,\frac{r^2}{r_0^2}P_2(\cos\theta)-1\right].$$

2.482. Если $u_0\cos 3\theta$ — температура поверхности шара радиуса r_0, то какова стационарная температура окружающей его среды?

2.483. Проводящий шар помещен в однородное электростатическое поле E_0. Найти плотность заряда на шаре.

2.484. Найти потенциал и электрическое поле равномерно поляризованного шара, радиус которого r_0, вектор поляризации $\mathbf{P}$ (см. задачу 1.296.)

2.485. Диэлектрический шар (радиус r_0, диэлектрическая проницаемость ε) внесен в однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_0$. Определить поле внутри шара и дипольный момент шара.

2.486. Сферический слой ($r_1<r<r_2$), магнитная проницаемость которого μ, помещен в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Определить магнитное поле в полости ($r<r_1$) и магнитный момент слоя.

2.487. Неподвижный твердый шар, радиус которого r_0, находится в плоскопараллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Считая течение потенциальным, определить давление на поверхности шара, если плотность жидкости ρ_0, ее скорость и давление на бесконечности V_0 и P_0 соответственно.

2.488. Твердый шар, радиус которого r_0, движется в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $V(t)\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор. Считая течение потенциальным, определить давление на поверхности шара. Давление невозмущенной жидкости P_0, ее плотность ρ_0.

2.489. Найти распределение скоростей жидкости при условиях задачи 1.230, если Ω_1 — полушар, радиус которого r_0, S_1— полусфера. Какова скорость жидкости на свободной поверхности?

2.490. Канал ($-l<x<l$) с прямоугольным поперечным сечением заполнен идеальной несжимаемой жидкостью; поверхность дна канала имеет форму $h(x)=h_0(1-x^2/l^2)$, $h_0 \ll l$. В жидкости (вдоль канала) возбуждаются длинные одномерные гравитационные волны малой амплитуды (длина волны λ, амплитуда A). Определить две первые (наименьшие) частоты колебаний жидкости при условии $A \ll h_0 \ll \lambda$.

2.491. Решить задачу:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|u| < \infty, \quad u|_{r=r_0} = A \sin\theta \sin 2\theta.$$

2.492. При каком условии задача

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_1} = A_1, \quad \tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_2} = A_2 cos^2\theta$$

имеет решение? Найти это решение.

2.493. Решить задачу:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|u| < \infty, \quad \big(\tfrac{\partial u}{\partial r} + hu\big)\big|_{r=r_0} = hA\cos^4\theta.$$

2.494. Решить задачу:

$$\Delta u = \tfrac{A\sin^2\theta}{r^2}, \quad r_0 < r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_0} = 0, \quad lim_{r\to\infty} u = 0.$$

2.495. Решить задачу:

$$\Delta u = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$u|_{r=r_1} = A_1\cos\theta, \quad \big(\tfrac{\partial u}{\partial r} + hu\big)\big|_{r=r_2} = A_2.$$

2.496. По диаметру проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0, расположена равномерно заряженная нить с изолированными концами; длина нити $2r_0$, линейная плотность заряда q. Определить потенциал электростатического поля внутри сферы.

2.497. Прямолинейный проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность q_0, проходит через центр шара, радиус которого r_0. Определить стационарную температуру шара, если его поверхность имеет нулевую температуру.

2.498. На расстоянии r_1 от центра шара, радиус которого $r_0 < r_1$, находится точечный источник тепла, мощность которого Q_0. Найти стационарную температуру вне шара, если шар поддерживается при нулевой температуре.

2.499. Внутри незаземленной проводящей сферы, радиус которой r_0, заряд Q, помещен на расстоянии r_1 от центра точечный заряд Q_0. Найти плотность заряда на сфере, ее дипольный момент и силу, действующую на заряд Q_0.

2.500. На расстоянии r_1 от центра шара, радиус которого $r_0<r_1$, расположен точечный источник идеальной несжимаемой жидкости мощность, которого Q_0. Считая течение потенциальным, определить потенциал скоростей жидкости.

2.501. На расстоянии r_1 от центра проводящего заземленного шара, радиус которого $r_0<r_1$, расположен точечный диполь с моментом $\mathbf{p}=p\mathbf{r}_1/r_1$. Определить плотность заряда на сфере, ее полный заряд и дипольный момент, а также силу, действующую на диполь.

2.502. Вне диэлектрического шара (радиус r_0, диэлектрическая проницаемость ε) на расстоянии r_1 от центра расположен точечный заряд Q. Какая сила действует на заряд?

2.503. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется сферическая полость (радиус r_0, $\mu=1$). Внутри полости на расстоянии r_1 от ее центра расположен круговой ток, радиус которого много меньше r_0. Определить силу, действующую на ток, если его магнитный момент $\mathbf{M}=M\mathbf{r}_1/r_1$.

2.504. Найти потенциал равномерно заряженного тонкого кольца, радиус которого r_0, если линейная плотность заряда q. Ответ дать в форме ряда по полиномам Лежандра.

2.505. Однородная струна ($0<x<l$) вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости около вертикальной оси, проходящей через точку $x=0$. Решить задачу о колебаниях струны, если ее начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение $u_0\frac{x}{l}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$.

2.506. Решить предыдущую задачу для струны, начальная скорость которой v_0x^3/l^3, а начальное отклонение равно нулю.

2.507. В полушар, радиус которого r_0, через сферическую часть поверхности поступает радиальный тепловой поток, плотностьи которого q_0, а плоская поверхность поддерживается при температуре u_0. Найти стационарное распределение температуры в полушаре.

2.508. Основание полушара, радиус которого r_0, поддерживается при температуре u_0, а через сферическую часть поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой u_1. Определить стационарное распределение температуры и полушаре.

2.509. Определить стационарную температуру полушара, радиус которого r_0, если сферическая часть поверхности имеет температуру u_0, а через основание внутрь полушара поступает тепловой поток, плотность которого q_0.

2.510. На сферической части поверхности полушара радиуса r_0 происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0, а через основание внутрь полушара поступает тепловой, поток плотность которого q_0. Определить стационарную температуру полушара, если его радиус r_0.

2.511. Найти потенциал электростатического поля внутри полусферы, радиус которой r_0, если потенциал сферической части поверхности равен u_1, плоской части — u_0.

2.512. Постоянный ток J протекает через однородный полушар, радиус которого r_0, проводимость σ. Ток втекает через полюс P (точка полусферы, принадлежащая диаметру, перпендикулярному к основанию полушара) и вытекает через центр основания 0. Найти плотность тока в полушаре.

2.513. Однородный полушар, радиус которого r_0, проводимость σ, расположен на проводящем основании. Через полюс P (пояснение в задаче 2.512.) втекает постоянный ток J. Найти плотность тока в полушаре.

2.514. Точки O и P полушара (пояснение в задаче 2.512.) соединены нитью, концы которой изолированы; заряд единицы длины нити q. Определить потенциал внутри полушара, если потенциал поверхности равен нулю.

2.515. Через точки O и P полушара (пояснение в задаче 2.512.) проходит тонкий проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность 1) $Q_0 r/r_0$; 2) $Q_0 r^2/r_0^2$. Определить стационарную температуру полушара, если его поверхность имеет температуру u_0.

2.516. В полушаре, радиус которого r_0, действуют тепловые источники выделяеющие в единицу времени в единице объема Q_0 единиц тепловой энергии. Определить стационарное распределение температуры в полушаре, если его поверхность поддерживается при температуре u_0.

2.517. Найти стационарное распределение температуры в шаровом секторе ($r<r_0$, $0<\theta<\alpha$, $0\leq\varphi<2\pi$), если поверхность $r=r_0$ поддерживается при температуре $f(\theta)$, а остальная поверхность 1) имеет нулевую температуру; 2) теплоизолирована.

2.518. Найти стационарное распределение температуры в коническом теле ($r_0<r$, $0<\theta<\alpha$, $0\leq\varphi<2\pi$), если поверхность $r=r_0$ поддерживается при температуре $f(\theta)$, а остальная поверхность 1) имеет нулевую температуру; 2) теплоизолирована.

2.519. Найти потенциал электрического поля точечного квадруполя, описанного в задаче 1.311.

2.520. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}$ внутри равномерно намагниченного шара, радиус которого r_0, намагниченность $\mathbf{M}$ (см. задачу 1.304.)

2.521. Найти электрическое поле равномерно намагниченного диэлектрического шара, вращающегося с постоянной угловой скоростью около диаметра, параллельного вектору намагниченности. Радиус шара r_0, диэлектрическая проницаемость ε, намагниченность $\mathbf{M}$, угловая скорость $\omega(\omega r_0 \ll c)$ (см. задачу 1.305). Показать, что электрическое поле имеет квадрупольный характер и найти квадрупольный электрический момент шара.

2.522. Определить плотность заряда на поверхности нейтронной звезды (см. задачу 1.306).

Пример 2.20. Поверхность S шара B, радиус которого r_0, имеет температуру $f(\theta, \varphi)=u_0 \sin 2\theta \cos\varphi$. Найти стационарное распределение температуры в шаре.

В стационарном случае уравнение теплопроводности сводится к уравнению Лапласа $\Delta u=0$, которое нужно решать в классе функций $u\in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ при условии $u|_S=f$ (внутренняя задача Дирихле). Подстановка $u(r, \theta, \varphi)=R(r)\,Y(\theta, \varphi)$ в уравнение Лапласа, записанного в сферических координатах, приводит к задаче на собственные значения

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \lambda Y = 0, \quad Y \in C(S_1), \tag{2.54}$$

и к уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0. \tag{2.55}$$

При $\lambda=n(n+1)$, $n\in\mathbf{N}_0$, и только при таких λ, задача (2.54) имеет нетривиальные решения — сферические функции

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^{|m|}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, & m = 0, -1, \ldots, -n, \\ \sin m\varphi, & m = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.56}$$

ортогональные на S_1:

$$\int_{S_1} Y_n^m Y_{n'}^{m'} ds = 2\pi \frac{1+\delta_{m0}}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \delta_{nn'}\delta_{mm'}. \tag{2.57}$$

При $\lambda{=}n(n{+}1)$ функции r^n и $r^{-(n+1)}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.55). Таким образом,

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[A_{nm}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n+B_{nm}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\right]Y_n^m(\theta,\varphi).$$

Ввиду ограниченности функции $u(r,\theta,\varphi)$ коэффициенты B_{nm} равны нулю, а коэффициенты A_{nm} определяются с помощью свойства (2.57) из разложения

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}Y_n^m(\theta,\varphi).$$

Итак, решение задачи представлено рядом по сферическим функциям:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n^m(\theta,\varphi),\quad A_{nm}=\frac{\int_{S_1}f\,Y_n^m ds}{\|Y_n^m\|^2}.$$

В частном случае, ввиду того, что $\sin 2\theta\,\cos\varphi{=}\frac{2}{3}Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$,

$$u(r,\theta,\varphi)=u_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\sin 2\theta\,\cos\varphi.$$

Замечание. В квантовой механике применяются сферические функции

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi},\qquad(2.58)$$

норма которых равна 1.

2.523. Решить внутреннюю краевую задачу для шара

$$\Delta u=F(r,\theta,\varphi),\quad r<r_0,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0<\theta<\pi,$$
$$(\alpha u+\beta u_r)|_{r=r_0}{=}f(\theta,\varphi),$$

если

1) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 4\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
2) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 2\theta\ \sin^2\theta\ \cos\varphi,\ F = 0;$
3) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^3\theta\ \cos\varphi,\ F = 0;$
4) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \cos^3\theta\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
5) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^2 2\theta\ \sin 2\varphi,\ F = 0;$
6) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin^2\theta\ \sin 2\varphi,\ F = 0;$
7) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin 2\theta\,(1 + \cos^2\theta)\sin\varphi,\ F = 0;$
8) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin\theta\ \sin\varphi\,(1 - \sin\theta\ \cos\varphi),$
$F = Ar \sin^3\theta\ \cos 3\varphi;$
9) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin^4\theta\ \sin 4\varphi,\ \ F = A \sin\theta\ \sin\varphi;$
10) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 2\theta\ \sin\varphi,\ F = Ar\cos\theta;$
11) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin\theta\ \sin\varphi\,(1 + \sin\theta\ \cos\varphi),$
$F = Ar^3 \sin\theta\ \cos\varphi;$
12) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \cos\theta\ \sin^3\theta\ \sin 3\varphi,$
$F = Ar \sin^3\theta\ \cos 3\varphi;$
13) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin^4\theta\ \cos 4\varphi,\ F = A \sin 2\theta\ \cos\varphi;$
14) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin 2\theta\ \sin\varphi,\ F = Ar^2 \sin^2 2\theta\ \cos 2\varphi;$
15) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^3\theta\ \cos 3\varphi,\ F = Ar^2 \sin\theta\ \cos\varphi;$
16) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin^3\theta\ \cos 3\varphi,\ F = A\cos^2\theta;$
17) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = Ar^2\cos^2\theta.$

2.524. Решить внешнюю краевую задачу для шара

$$\Delta u = F(r,\theta,\varphi), \quad r_0 < r,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \theta < \pi,$$
$$(\alpha u - \beta u_r)|_{r=r_0} = f(\theta,\varphi), \quad \lim_{r\to\infty} u(\mathbf{r}) = 0,$$

если

1) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin\theta\cos^2\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
2) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 4\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
3) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin^4\theta\ \sin 2\varphi,\ F = 0;$
4) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \cos 3\theta\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
5) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^2\theta\ \cos 2\theta\ \cos 2\varphi,\ F = 0;$
6) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin 2\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$

7) $\alpha = h,\ \beta = 1,\ f = hu_0 \sin 2\theta\ \sin^2\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
8) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = 0,\ F = \frac{A\sin\theta\sin\varphi}{r^3};$
9) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin\theta\ \sin 2\theta\ \sin 2\varphi,\ F = \frac{A\sin^2\theta\ \cos 2\varphi}{r^3};$
10) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 2\theta\ \sin\varphi\,(1 + \sin\theta\ \cos\varphi),$
$F = \frac{A\sin^2\theta\ \sin 2\varphi}{r^4};$
11) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin 2\theta\ \sin\varphi,\ F = \frac{A}{r^3};$
12) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin^2\theta\ \sin 2\varphi,\ F = \frac{A\sin\theta\ \cos\varphi}{r^4};$
13) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ f = u_0 \sin^3\theta\ \cos 3\varphi,\ F = \frac{A\cos\theta}{r^4};$
14) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^4\theta\ \cos 4\varphi,\ F = \frac{A\cos\theta}{r^3};$
15) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin^3\theta\ \cos\theta\ \cos 3\varphi,$
$F = \frac{A\sin^2\theta\ \cos\theta\ \sin 2\varphi}{r^3};$
16) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ f = v_0 \sin\theta\ \sin\varphi\,(\cos\theta - \sin\theta\ \cos\varphi),$
$F = \frac{A\sin\theta\ \sin\varphi}{r^4}.$

2.525. Решить краевую задачу в сферическом слое

$$\Delta u = F(r,\theta,\varphi), \quad r_1 < r < r_2,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi,$$
$$(\alpha_1 u - \beta_1 u_r)|_{r=r_1} = f_1(\theta,\varphi),$$
$$(\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=r_2} = f_2(\theta,\varphi),$$

если

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0,$
$f_1 = u_1,\ f_2 = u_2 \sin^2\theta\ \cos 2\varphi,\ F = 0;$
2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0,\ f_1 = u_1 \cos\theta,$
$f_2 = u_2 \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
3) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0,$
$f_1 = u_1(1 + \cos\theta)\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ f_2 = 0,\ F = 0;$
4) $\alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \beta_1 = \alpha_2 = 0,$
$f_1 = u_1 \cos 2\theta,\ f_2 = v_2 \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
5) $\alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \alpha_2 = 1,$
$f_1 = v_1 \sin^2\theta,\ f_2 = u_2 \sin 2\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$
6) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1,$
$f_1 = v_1 \cos\theta,\ f_2 = v_2 \sin\theta\ \sin\varphi,\ F = 0;$

7) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0,$
$f_1 = u_1,\ f_2 = u_2 \sin 2\theta \sin\varphi,\ F = A \sin\theta \sin\varphi;$
8) $\alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \alpha_2 = 1,$
$f_1 = 0,\ f_2 = u_2 \sin 2\theta \cos\varphi,\ F = Ar^2 \cos^2\theta;$
9) $\alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \beta_1 = \alpha_2 = 0,$
$f_1 = u_1 \sin 2\theta \sin\varphi,\ f_2 = v_2 \cos\theta,\ F = \frac{A}{r^3};$
10) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1,$
$f_1 = v_1 \sin\theta \cos\varphi,\ f_2 = v_2 \sin^2\theta \cos 2\varphi,$
$F = A \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi.$

2.526. Определить уровни энергии и волновые функции стационарных состояний пространственного ротатора с моментом инерции I.

2.527. Найти волновую функцию $\Psi(\theta, \varphi, t)$ пространственного ротатора, если $\Psi(\theta, \varphi, 0) = A \sin^2\theta\,(1 + \cos\theta\, e^{2i\varphi})$.

2.528. Непроводящая равномерно заряженная сфера, радиус которой r_0, заряд Q, вращается с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр сферы. Определить магнитное поле в пространстве.

2.529. Равномерно заряженный шар, радиус которого r_0, объемная плотность заряда ρ, вращается с постоянной скоростью ω около оси, проходящей через центр шара. Определить векторный потенциал магнитного поля.

2.530. Найти магнитное поле кругового тока (радиус r_0, сила тока J). Рассмотреть предельный случай $r_0 \to 0$ при постоянном значении магнитного момента.

2.531. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется сферическая полость (радиус r_0, $\mu = 1$), внутри которой находится круговой ток (радиус r_1, сила тока J). Определить магнитное поле вне полости при условии, что центры полости и витка совпадают.

2.532. Шар, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ, находится в магнитном поле витка с током J; радиус витка $r_1 > r_0$, центры шара и витка совпадают. Как изменится магнитное поле на больших расстояниях от витка, если шар убрать?

Пример 2.21. Найти температуру шара B, радиус которого r_0, если поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна $u_0 \frac{r}{r_0} \sin\theta \sin\varphi$.

Распределение температуры в шаре при $t>0$ описывается уравнением теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$ и условиями

$$u(r_0, \theta, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \theta, \varphi, 0) = u_0 \frac{r}{r_0} \sin\theta \sin\varphi,$$
$$u \in C^2(B) \cap C(\overline{B}) \cap C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0).$$

Согласно схеме метода Фурье $u(r, \theta, \varphi, t) = v(r\,\theta, \varphi)\, T(t)$, где $T(t)$ — решение уравнения $T' + a^2 \lambda T = 0$, а $v(r, \theta, \varphi)$ — решение задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} &\Delta v + \lambda v = 0, \\ &v(r_0, \theta, \varphi) = 0, \quad v \in C^2(B) \cup C(\overline{B}). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Пусть $v(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$, тогда задача (2.59) сводится к двум:

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \alpha Y = 0, \quad Y \in C(S_1), \qquad \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \alpha R + \lambda r^2 R = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0.$$

Первая задача рассмотрена в примере 2.20, а уравнение второй задачи, в котором $\alpha = n(n+1)$, приводится к уравнению Бесселя заменой $R(r) = r^{-\frac{1}{2}} Z(r)$. Ограниченным будет решение $R(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)$; оно удовлетворяет краевому условию при $r = r_0$, если $\lambda_{nk} = \mu^2_{n+\frac{1}{2},k} / r_0^2$, где $\mu_{n+\frac{1}{2},k} > 0$, $k \in \mathbf{N}$,— нули функции $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)$. Итак, каждому λ_{nk} соответствуют функции

$$v_{nkm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{n+\frac{1}{2},k}}{r_0} r \right) Y_n^m(\theta, \varphi),$$
$$T_{nk}(t) = A_{nk} e^{-a^2 \lambda_{nk} t},$$

с помощью которых формируется решение

$$u(r,\theta,\varphi,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{nkm} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n+\frac{1}{2},k}}{r_0} r\right) Y_n^m(\theta,\varphi)\, e^{-\left(\frac{a\mu_{n+\frac{1}{2},k}}{r_0}\right)^2 t}.$$

При $t = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n,k,m} C_{nkm} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n+\frac{1}{2},k}}{r_0} r\right) Y_n^m(\theta,\varphi) = u_0 \frac{r}{r_0}\sin\theta\sin\varphi.$$

Так как $\sin\theta\sin\varphi = Y_1^1(\theta,\varphi)$, то

$$C_{nkm} = \frac{u_0}{r_0\|v_{nkm}\|^2}\int_0^{r_0} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n+\frac{1}{2},k}}{r_0} r\right) r^{\frac{5}{2}} dr \int_{S_1} Y_n^m Y_1^1 ds = -\frac{2u_0\sqrt{r_0}\delta_{n1}\delta_{m1}}{\mu_{\frac{3}{2},k} J_{\frac{1}{2}}(\mu_{\frac{3}{2},k})}.$$

В результате

$$u(r,\theta,\varphi,t) = -2u_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{\frac{3}{2},k}}{r_0} r\right)}{\mu_{\frac{3}{2},k} J_{\frac{3}{2}}(\mu_{\frac{3}{2},k})}\, e^{-\left(\frac{a\mu_{\frac{3}{2},k}}{r_0}\right)^2 t}\sin\theta\sin\varphi.$$

2.533. В однородном шаре происходит диффузия нейтронов с размножением. Определить критический радиус шара (см. задачу 2.36.), если 1) концентрация нейтронов на его поверхности равна нулю; 2) вне шара — вакуум.

2.534. Найти уровни энергии частицы, масса которого m, находящейся в трехмерной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \infty, & r > r_0. \end{cases}$$

2.535. Частица массы m находится в трехмерной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ U_0, & r > r_0. \end{cases}$$

При каком условии существуют связанные состояния ?

2.536. Решить предыдущую задачу для трехмерной потенциальной ямы $U(r) = -U_0 \exp(-r/r_0), \quad U_0 > 0, \quad r_0 > 0.$

2.537. Определить уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в трехмерной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \in (r_1, r_2), \\ \infty, & r \overline{\in} [r_1, r_2]. \end{cases}$$

2.538. Найти собственные колебания электромагнитного поля в сферическом резонаторе, радиус которого r_0.

2.539. Определить температуру однородного шара, радиус которого r_0, если начальная температура шара $u_0 \frac{r}{r_0} \sin\theta \sin\varphi$, а температура кго поверхности при любом $t{>}0$ равна u_1.

2.540. Поверхность однородного шара, радиус которого r_0, теплоизолирована, начальная температура шара равна $u_0 \frac{r}{r_0} \sin\theta \cos\varphi$. Решить задачу теплопроводности.

2.541. Сфера, радиус которой r_0, заполнена идеальным газом и движется по закону $w_0 t^2/2$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа при нулевых начальных условиях.

2.542. Неподвижная сфера, радиус которой r_0, заполнена идеальным газом. В момент времени $t = 0$ сфера начинает двигаться постоянной скоростью v_0 и в момент времени $t = t_0$ мгновенно останавливается. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

2.543. Сфера, радиус которой r_0, заполнена идеальным газом; равновесные давление и плотность газа P_0 и ρ_0 соответственно. С момента $t{=}0$ поверхность сферы совершает малые радиальные колебания с заданной скоростью $V(r,\theta,\varphi,t)$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если 1) $V(r,\theta,\varphi,t){=}f(t)Y_n^m(\theta,\varphi)$, где $n{>}0$; 2) $V(r,\theta,\varphi,t){=}f(\theta)\sin\omega t$.

2.544. Через поверхность шара, радиус которого r_0, происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура шара равна $u_0\frac{r}{r_0}\cos\theta$, температура внешней среды в любой момент времени $t>0$ равна нулю.

2.545. Поверхность шара, радиус которого r_0, поддерживается при температуре $u_0\cos 2\theta$. Какова температура шара при $t{>}0$, если при $t=0$ она равна нулю?

2.546. Определить температуру шара, радиус которого r_0, если температура его поверхности $\mu(t)\cos\theta$, а начальная температура равна нулю.

2.547. Поверхность шара, радиус которого r_0, поддерживается при температуре $f(\theta)\sin\varphi$. Определить температуру шара при $t{>}0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.548. Внутрь шара, радиус которого r_0, через поверхность поступает радиальный тепловой поток, плотность которого $q_0Y_n^m(\theta,\varphi)$. Найти температуру шара при $t{>}0$, если начальная температура равна нулю.

2.549. Шар, радиус которого r_0, нагревается радиальным тепловым потоком, плотност которого $q_0\cos\theta$ в течение времени от $t=0$ до $t=t_0{>}0$, затем поверхность покрывается теплоизоляцией. Определить температуру шара при $t{>}0$, если при $t=0$ она равна нулю.

2.550. Поверхность шара, радиус которого r_0, нагревается радиальным тепловым потоком, плотность которого $f(\theta)\cos\varphi$. Определить температуру шара при $t>0$, если начальная температура равна нулю.

2.551. Через поверхность шара, радиус которого r_0, происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой $u_0 e^{-\alpha t}\cos\theta$. Решить задачу теплопроводности при нулевой начальной температуре.

2.552. Найти температуру однородного шара, радиус которого r_0, если начальная температура равна нулю, а через поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(t)Y_n^m(\theta,\varphi)$.

2.553. Определить температуру сферического слоя ($r_1<r<r_2$), если его граница поддерживается при 0^o, а начальная температура $u_0\left(\frac{r}{r_2}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)$.

2.554. Проводящий шар (радиус r_0, $\mu=1$) находится в магнитном поле $\mathbf{H}_0\exp(i\omega t)$. Определить установившееся магнитное поле в шаре в квазистационарном приближении.

Пример 2.22. Неограниченный твердый цилиндр, радиус которого r_0, совершает гармонические колебания в фиксированном направлении, перпендикулярном к оси, частота колебаний ω, амплитуда A. Найти полную интенсивность $I(r)$ излучения звука на больших расстояниях от цилиндра при условиях: $A\ll r_0$, $\omega A\ll a$; интенсивность $I(r)$ равна среднему по времени потоку энергии через цилиндрическую поверхность, радиус которой r, длина равна единице.

$$I(r)=\int_0^{2\pi} I(r,\varphi)r\,d\varphi,\quad I(r,\varphi)=(PV_r)=\frac{1}{T}\int_0^T PV_r\,dt.$$

Установившиеся давление и скорость газа являются периодическими функциями времени

$$P(\mathbf{r},t)=Re(p(\mathbf{r})e^{i\omega t}),\ \ \mathbf{V}(\mathbf{r},t)Re(\mathbf{v}(\mathbf{r})e^{i\omega t}).$$

В данном случае справедливо акустическое приближение, так что (пример 1.15.)

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \rho_0 \omega^2 A \cos\varphi,$$
$$p = O\left(\tfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \ \ \frac{\partial p}{\partial r} + ikp = o\left(\tfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \ \ r \to \infty.$$

Функции $p(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ связаны соотношением (1.79)

$$\mathbf{v} = \frac{i}{\omega \rho_0} \nabla p. \tag{2.60}$$

Пусть $p(r, \varphi) = f(r) \cos\varphi$, тогда

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr} r \tfrac{df}{dr} + \left(k^2 - \tfrac{1}{r^2}\right) f = 0, \quad r_0 < r, \tag{2.61}$$
$$\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} = \rho_0 A \omega^2,$$
$$f(r) = O\left(\tfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \ \ \frac{\partial f}{\partial r} + ikf = o\left(\tfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \ \ r \to \infty.$$

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (2.61) следует выбрать функции Ганкеля $H_1^{(1)}(kr)$, $H_1^{(2)}(kr)$, которые при $r \to \infty$ представляют собой сходящуюся и расходящуюся цилиндрические волны. Условиям излучения удовлетворяет

$$f(r) = C H_1^{(2)}(kr), \qquad C = \frac{\rho_0 A \omega^2}{\left.\left(\frac{dH_1^{(2)}}{dr}\right)\right|_{r=r_0}}.$$

При $r \to \infty$ давление и радиальная скорость (см.(2.60)) имеют вид

$$p(r, \varphi) = \frac{\rho_0 \omega^2 A}{\left.\left(\frac{dH_1^{(2)}}{dr}\right)\right|_{r=r_0}} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i(kr - \frac{3}{4}\pi)} \cos\varphi, \quad v_r = \frac{kp}{\omega \rho_0}.$$

Интенсивность излучения звука есть результат усреднения:

$$I(r,\varphi)\,(\mathbf{Re}P\,\mathbf{Re}V_r) = \frac{2\rho_0 A^2\omega^3\cos^2\varphi}{\pi r}\left\{\left(\mathbf{Re}\left[\frac{e^{-i(kr-\frac{3}{4}\pi-\omega t)}}{\left(\frac{dH_1^{(2)}}{dr}\right)\Big|_{r=r_0}}\right]\right)^2\right\}.$$

Если $\lambda \gg r_0$ (т.е. $kr_0 \ll 1$), то

$$\left(\frac{dH_1^{(2)}}{dr}\right)\Big|_{r=r_0} \frac{2i}{\pi k r_0^2}.$$

Следовательно,

$$I(r,\varphi) = \frac{\pi\rho_0 r_0^4 A^2\omega^5\cos^2\varphi}{4a^2 r}.$$

Полная интенсивность

$$I = \frac{\pi^2\rho_0 r_0^4 A^2\omega^5}{4a^2}.$$

С уменьшением частоты ω интенсивность звука падает, как ω^5, и возрастает, как r_0^4, с ростом радиуса. Именно этим объясняется разная толщина струн музыкальных инструментов: чем ниже частота звука струны, тем толще струна.

2.555. Найти полную интенсивность излучения звука вибрирующим цилиндром (пример 2.22.), если $A \ll \lambda \ll r_0$.

2.556. Найти полную интенсивность излучения звука на больших расстояниях от цилиндра, радиус которого меняется по закону $r_0 + A\cos\omega t$, если $A \ll r_0 \ll \lambda$, $\lambda = 2\pi a/\omega$.

2.557. Решить предыдущую задачу, если $A \ll \lambda \ll r_0$.

2.558. Твердый шар, радиус которого r_0, совершает гармонические колебания вдоль фиксированной оси, частота колебаний ω, амплитуда A. Найти полную интенсивность излучения звука на больших расстояниях от шара, если $A \ll r_0$, $\omega A \ll a$.

2.559. Найти полную интенсивность звука, излучаемого сферой, на больших расстояниях, если радиус сферы меняется по закону $r_0 + A\cos\omega t$, $A \ll r_0$, $\omega A \ll a$.

2.560. На бесконечно длинный неподвижный цилиндр, радиус которого r_0, падает плоская звуковая волна; давление в волне $P_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{kr}))$, волновой вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен к оси цилиндра. Определить в акустическом приближении давление в рассеянной волне.

2.561. Определить интенсивность $I(r, \varphi)$ и полную интенсивность I излучения звука цилиндром при условиях предыдущей задачи.

2.562. Какая сила действует на единицу длины цилиндра при условиях задачи 2.560, если длина волны 1) $\lambda \gg r_0$; 2) $\lambda \ll r_0$?

2.563. На идеально проводящий неограниченный цилиндр, радиус которого r_0, падает плоская электромагнитная волна, электрическое поле волны $\mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{kr}))$, где вектор $\mathbf{E}_0$ параллелен оси цилиндра. Найти рассеянную электромагнитную волну, а также мощность энергии излучения на больших расстояниях от цилиндра, если $\lambda \gg r_0$.

2.564. На твердый неподвижный шар, радиус которого r_0, падает плоская звуковая волна, давление в волне $P_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{kr}))$. Найти давление в рассеянной волне.

2.565. Определить интенсивность $I(r\,\theta)$ и полную интенсивность I рассеянной шаром волны (задача 2.564.) на больших расстояниях от шара при условии $\lambda \gg r_0$.

2.566. Какая сила действует на шар при условиях задачи 2.564., если длина волны 1. $\lambda \gg r_0$; 2. $\lambda \ll r_0$?

2.567. Определить установившееся электромагнитное поле точечного электрического диполя, момент которого $\mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$, где $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор. Определить мощность излучения диполя.

2.568. Найти установившееся электромагнитное поле излучающей антенны, расположенной на расстоянии l от поверхности земли 1) параллельно поверхности; 2) перпендикулярно поверхности. Антенна моделируется точечным электрическим диполем с моментом $\mathbf{p}_0 \exp(i\omega t)$, поверхность земли — идеально проводящей плоскостью.

2.569. Определить установившееся электромагнитное поле точечного магнитного диполя, момент которого $\mathbf{M}_0 e^{i\omega t}$, где $\mathbf{M}_0$ — постоянный вектор.

2.570. Точечный магнитный диполь с моментом $\mathbf{M}_0 e^{i\omega t}$ расположен на расстоянии l от идеально проводящей плоскости $z = 0$ (магнитная антенна над поверхностью Земли). Определить установившееся электромагнитное поле диполя, если 1) $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_z$; 2) $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_x$, где $\mathbf{M}_0$ — постоянный вектор.

Пример 2.23. Для изучения вращательно-колебательного спектра двухатомной молекулы используется сферически симметричный потенциал

$$U(r) = -2U_0 \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^2}{2r^2} \right), \quad U_0 > 0.$$

Определить уровни энергии частицы в таком поле.

Волновая функция, описывающая стационарное состояние частицы, является собственной функцией оператора энергии:

$$\Delta\psi + \tfrac{2m}{\hbar^2} \left(E + 2U_0 \left(\tfrac{r_0}{r} - \tfrac{r_0^2}{2r^2} \right) \right) \psi = 0,$$
$$0 < r, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi,$$
$$|\psi| < \infty, \quad \int_{R^3} |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1.$$

Методом Фурье эта задача для функции $\psi = \frac{1}{r}R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ сводится к двум:

$$\begin{array}{ll} \Delta Y + \beta Y = 0, & R'' + \left(-\frac{2m|E|}{\hbar^2} + \frac{4mU_0r_0}{\hbar^2 r} - \frac{\beta\hbar^2+2mU_0r_0^2}{\hbar^2 r^2}\right) R = 0, \\ Y \in C(S_1), & 0 < r, \\ & R(0) = 0, \quad \int_0^\infty R^2(r)dr = 1. \end{array}$$

Первая задача имеет при $\beta = l(l+1)$, $l \in \mathbf{N}_0$ нетривиальные решения $Y_l^m(\theta,\varphi)$ (пример 2.20), а вторая в безразмерных переменных $\xi = 2sr/r_0$, $s = \sqrt{2m|E|}r_0/\hbar$ запишется в виде

$$R'' + \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{b^2}{s\xi} - \tfrac{l(l+1)+b^2}{\xi^2}\right) R = 0, \quad 0 < \xi, \tag{2.62}$$

$$\left|\tfrac{R(\xi)}{\xi}\right| < \infty, \quad \int_0^\infty R^2 d\xi < \infty, \quad b^2 = \tfrac{2mU_0r_0^2}{\hbar^2}. \tag{2.63}$$

Уравнение (2.62) принадлежит классу уравнений вида

$$u'' + \frac{\tilde\tau(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde\sigma(z)}{\sigma^2}u = 0, \tag{2.64}$$

где $\tilde\tau$ — полином не выше первой степени, а σ и $\tilde\sigma$ — полиномы не выше второй степени. В книге [52] разработана теория таких дифференциальных уравнений и дан метод приведения их к наиболее простой форме. С этой целью сначала вводится замена $u(z) = \varphi(z)v(z)$, приводящая к уравнению

$$v'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde\tau}{\sigma}\right)v' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\,\frac{\tilde\tau}{\sigma} + \frac{\tilde\sigma}{\sigma^2}\right)v = 0. \tag{2.65}$$

Затем функция φ выбирается так, чтобы тип уравнения (2.65) был таким же, что и (2.64). Для этого нужно, чтобы коэффициент при v' был равен $\frac{\tau}{\sigma}$, где τ — полином не выше первой степени, т.е.

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}, \tag{2.66}$$

при этом

$$2\pi(z) = \tau(z) - \tilde{\tau}(z). \tag{2.67}$$

Тогда из соотношения

$$\frac{\varphi''}{\varphi}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2$$

вытекает, что коэффициент при v в (2.65) равен σ_1/σ^2, где

$$\sigma_1 = \tilde{\sigma} + \pi^2 + \pi(\tilde{\tau} - \sigma') + \pi'\sigma, \tag{2.68}$$

и уравнение (2.65) запишется в виде

$$v'' + \frac{\tau}{\sigma}v' + \frac{\sigma_1}{\sigma^2}v = 0. \tag{2.69}$$

Если распорядиться пока еще произвольными коэффициентами полинома $\pi(z)$ так, чтобы

$$\sigma_1 = \lambda\sigma, \tag{2.70}$$

где λ — некоторая константа, то уравнение (2.69) приобретает более простую форму

$$\sigma v'' + \tau v' + \lambda v = 0 \tag{2.71}$$

и называется уравнением гипергеометрического типа.

Из условия (2.70), записанного в виде

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma') + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

где

$$k = \lambda - \pi'(z), \tag{2.72}$$

следует, что

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \tag{2.73}$$

Так как $\pi(z)$ — полином, то дискриминант квадратного трехчлена под корнем равен нулю. Из этого условия можно найти k и затем $\pi,\ \varphi,\ \tau,\ \lambda$ по формулам (2.73), (2.66), (2.67), (2.72).

Уравнению (2.71) можно придать самосопряженную форму

$$\frac{d}{dz}\rho\sigma\frac{dv}{dz}+\lambda\rho v=0 \tag{2.74}$$

умножением на функцию ρ, которая удовлетворяет уравнению $(\sigma\rho)'=\tau\rho$ (оно следует из сравнения коэффициентов в уравнениях (2.71) и (2.74)). С уравнением гипергеометрического типа связана следующая задача на собственные значения: пусть положительная и ограниченная на интервале (a,b) функция $\rho(x)$ такова, что

$$\begin{array}{l}\frac{d}{dx}\rho\sigma=\rho\tau,\\ \forall k\in\mathbf{N}_0\ :\ \sigma\rho x^k\big|_{x=a,x=b}=0,\end{array} \tag{2.75}$$

тогда нетривиальное решение $v(x)$ уравнения (2.74) при условии ограниченности и квадратичной интегрируемости на (a,b) функции $v(x)\sqrt{\rho(x)}$ существует лишь при

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'',\quad n\in\mathbf{N}_0 \tag{2.76}$$

и имеет вид

$$v_n(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right], \tag{2.77}$$

где B_n — константа. Для выполнения условий (2.75), налагаемых на $\rho(x)$, необходимо, чтобы

$$\begin{array}{l}\exists x_0\in(\mathrm{a,b}):\ \tau(x_0)=0,\\ \forall x\in(\mathrm{a,b})\ :\ \tau'(x)<0.\end{array} \tag{2.78}$$

Уравнение (2.62) является частным случаем (2.64) при

$$\tilde\tau=0,\ \ \tilde\sigma(\xi)-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{b^2}{s}\xi-[l(l+1)+b^2],\ \ \sigma=\xi.$$

Квадратный трехчлен под корнем выражения (2.73)

$$\frac{1}{4}\xi^2 + \left(k - \frac{b^2}{s}\right)\xi + \frac{(2l+1)^2 + 4b^2}{4}$$

имеет дискриминант $(k - b^2/s) - \alpha^2/4$, где $\alpha^2 = (2l+1)^2 + 4b^2$. Дискриминант обращается в нуль, при $k_{1,2} = \frac{b^2}{s} \pm \frac{\alpha}{2}$, следовательно, $\pi(\xi) = \frac{1}{2} \pm (\frac{\xi}{2} \pm \frac{\alpha}{2})$, $\tau = \pm(\xi \pm \alpha)$; условия (2.78) выполняются для $\tau(\xi) = 1 + \alpha - \xi$, так что

$$\pi = \tfrac{1+\alpha-\xi}{2}, \quad \varphi = \xi^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad \rho = \xi^{\alpha} e^{-\xi},$$
$$k = \frac{b^2}{s} - \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = \frac{b^2}{s} - \tfrac{\alpha+1}{2}.$$

Итак,

$$R(\xi) = \xi^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} v(\xi),$$

где $v(\xi)$ — решение уравнения (2.71)

$$\xi v'' + (\alpha + 1 - \xi)v' + \left(\frac{b^2}{s} - \frac{\alpha+1}{2}\right) v = 0, \quad 0 < \xi$$

при условиях

$$\left|\xi^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} v(\xi)\right| < \infty, \quad \int_0^\infty \xi^{\alpha+1} e^{-\xi} v^2(\xi) d\xi < \infty,$$

которые следуют из (2.63). Условия применимости формул (2.76), (2.77) выполняются, поэтому

$$v_n(\xi) = C_n L_n^{\alpha}(\xi), \qquad \frac{b^2}{s} - \frac{\alpha+1}{2} = n \in \mathbf{N}_0.$$

Отсюда

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} s_{nl}^2 - \frac{\hbar^2 b^4}{2mr_0^2} \left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{b^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right)^{-2},$$

$$R_{nl}(r) = C_{nl} \left(\frac{2s_{nl}}{r_0} r\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} L_n^{\alpha}\left(\frac{2s_{nl}}{r_0} r\right) e^{-\frac{s_{nl}}{r_0} r}, \quad n, l \in \mathbf{N}_0.$$

Вычисление нормы $\|R_{nl}\|$ основано на рекуррентной формуле и ортогональности полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(\xi)$:

$$\|R_{nl}\|^2 = C_{nl}^2 \frac{r_0}{2s_{nl}} \int_0^{\infty} \xi^{\alpha+1} e^{-\xi} \left(L_n^{\alpha}(\xi)\right)^2 d\xi =$$

$$= C_{nl}^2 \frac{r_0}{2s_{nl}} \int_0^{\infty} \xi^{\alpha} e^{-\xi} (2n+\alpha+1) \left(L_n^{\alpha}(\xi)\right)^2 d\xi$$

$$= C_{nl}^2 \frac{r_0}{2s_{nl}} (2n+\alpha+1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!}.$$

Потенциал $U(r)$ имеет минимум $U(r_0) = -U_0$. В окрестности точки r_0

$$U(r) = -U_0 + \frac{m\omega^2}{2}(r-r_0)^2 + \ldots,$$

где $\omega^2 = \frac{2U_0}{mr_0^2}$. При $b \gg 1$ и небольших n и l

$$E_{nl} \approx -U_0 \left[1 - \frac{2}{b}\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{b^2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{b^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= -U_0 + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\hbar^2}{2mr_0^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Второе слагаемое характеризует энергию гармонических колебаний, последнее — учитывает ангармоничность, а третье слагаемое представляет собой энергию вращательного движения. Основной вклад в энергию низких колебаний вносят гармонические колебания, что согласуется с формой потенциала вблизи точки $r = r_0$ (см. задачу 2.581.)

2.571. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет круглый бассейн, радиус которого r_0, поверхность дна бассейна имеет форму

$$h(r) = h_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad h_0 \ll r_0.$$

В жидкости возбуждаются длинные гравитационные волны малой амплитуды (амплитуда волны A, длина λ). Определить две

первые (наименьшие) частоты колебаний жидкости при условии $A \ll h_0 \ll \lambda$.

2.572. Решить уравнение Шредингера для связанного состояния электрона в поле бесконечно тяжелого ядра с зарядом Ze.

2.573. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы в двухмерном поле, потенциал которого $U(r)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ (круговой осциллятор).

2.574. Найти энергию и волновые функции стационарных состояний частицы в сферически симметричном трехмерном поле, потенциал которого $U(r)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

2.575. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний частицы в трехмерном поле, потенциал которого

$$U(r) = U_0 \left(\frac{r^2}{r_0^2} + \alpha \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad U_0 > 0, \quad \alpha > 0.$$

2.576. Электрон находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Определить волновые функции и энергию стационарных состояний электрона.

2.577. Определить уровни энергии стационарных состояний частицы в одномерной яме, потенциал которой

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2 \frac{x}{a}}, \quad U_0 > 0, \quad a > 0.$$

2.578. Частица находится в трехмерной потенциальной яме

$$U(r) = -\frac{U_0}{e^{\frac{r}{r_0}} - 1}, \quad U_0 > 0, \quad r_0 > 0.$$

Определить уровни энергии стационарных состояний частицы с моментом, равным нулю.

2.579. Найти волновые функции и уровни энергии стационарных состояний линейного гармонического осциллятора.

2.580. Линейный гармонический осциллятор, заряд которого e, находится в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}$. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии осциллятора.

2.581. Начальное состояние линейного гармонического осциллятора описывается волновой функцией

$$\Psi(x,0)^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x-x_0)^2}, \quad \alpha\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Найти $|\Psi(x,t)|^2$ при $t>0$. Рассмотреть предельные случаи малых и больших (по сравнению с шириной начального волнового пакета) значений $|x_0|$.

2.582. Для описания взаимодействия атомов в двухатомной молекуле применяется сферически симметричный потенциал

$$U(r) = U_0\left(e^{-2\kappa\frac{r-r_0}{r_0}} - 2e^{-\kappa\frac{r-r_0}{r_0}}\right), \quad U_0>0, \quad \kappa>0.$$

Определить энергию стационарных состояний частицы с моментом, равным нулю, при условиях: $1 \ll b$, $\ln b \ll \exp(\kappa)$, где величина $b = 2r_0\sqrt{2mU_0}/(\kappa\hbar)$. Получить приближенную формулу для энергии низких уровней.

2.583. Для описания взаимодействия нейтрона с тяжелым ядром применяется сферически симметричный потенциал

$$U(r) = -\frac{U_0}{1+e^{\frac{r-r_0}{a}}}, \quad U_0>0, \quad 0<a\ll r_0,$$

где r_0 — радиус ядра, параметр a характеризует "толщину" поверхностного слоя ядра (при $a\to 0$ получается прямоугольная потенциальная яма). Определить энергию связанных состояний частицы с моментом, равным нулю, с точностью до величин второго порядка малости относительно a/r_0.

2.584. Если изменение показателя преломления $n(x)$ по сечению плоского симметричного волновода (задача 1.380.) невелико, то функцию $n(x)$ можно аппроксимировать первыми членами ряда Тейлора; это приводит к модели волновода с усеченным параболическим профилем показателя преломления

$$n(x) = \begin{cases} n_1\left(1 - \Delta\left(\frac{x}{l}\right)^2\right), & |x| \le l, \\ n_2 = Const, & |x| > l, \end{cases} \qquad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1.$$

Решить задачу о распространении высокочастотных (сравнительно с частотой отсечки) TE- и TM-мод в таком волноводе.

2.585. Решить задачу о распространении высокочастотных (по сравнению с частотой отсечки) электромагнитных волн в слабо направляющем оптическом волокне с α-профилем показателя преломления (1.122) при $\alpha = 2$.

2.586. Решить предыдущую задачу в прямоугольных координатах.

2.587. Показатель преломления

$$n^2(x) = n_1^2 + \frac{n_1^2 - n_2^2}{ch^2\frac{x}{l}}$$

в плоском волноводе моделирует профиль, который формируется диффузионным процессом. Решить задачу о распространении TE-мод; дать выражения для поля двух мод низшего порядка.

2.588. Для изучения отражения радиоволн от ионосферы используется модель волновода с асимметричным профилем показателя преломления

$$n^2(x) = n_3^2 + \frac{n_2^2 - n_3^2}{1 + e^{\frac{2x}{l}}}\, e^{\frac{2x}{l}} + \frac{4n_1^2 - 2(n_2^2 + n_3^2)}{\left(1 + e^{\frac{2x}{l}}\right)^2}\, e^{\frac{2x}{l}}.$$

Решить задачу о распространении TE-мод; дать выражение для поля моды низшего порядка.

2.4. Ответы

2.1. $\omega_n = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,n, \quad X_n(x) = A_n sin\frac{\pi\, n}{2l}\left(1+\frac{x}{l}\right), \quad n \in \mathbf{N}$; множество функций $X_n(x)$ — объединение двух подмножеств: $X_{2m}(x) = B_{2m} sin\frac{\pi\, n\, x}{l}$ — нечетные функции, $X_{2m+1}(x) = B_{2m+1} cos\frac{\pi\,(2m+1)\,x}{2l}$ — четные функции.

2.2. $\omega_n = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\left(n+\frac{1}{2}\right), \ n \in \mathbf{N}_0$.

2.3. 1. $\omega_n = \frac{\pi a}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad \omega_n = \frac{\pi a}{l}\left(2n+1 \pm \frac{1}{\pi} arccos\,\frac{1}{3}\right), \ n \in \mathbf{N}$.
2. $\omega_n = \frac{2\pi a}{l}\,n, \ n \in \mathbf{N}, \qquad \omega_n = \frac{7\pi a}{3l}\left(n+(-1)^n\frac{1}{6}\right), \ n \in \mathbf{N}_0$;
$\omega_n = \frac{7\pi a}{3l}\left(2n+1 \pm \frac{1}{\pi} arccos\,\frac{3}{4}\right), \ n \in \mathbf{N}_0, \ a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$.

2.4. $\omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \ X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \ \omega_s = \frac{\mu_s a}{l}, \ X_s(x) = A_s \sin\mu_s(1-\frac{|x|}{l})$, где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$, $\mu_s > 0$ — корень уравнения $\mu\, tg\,\mu = \frac{2\rho_0 l}{m}$, $n, s \in \mathbf{N}$.

2.5. $\omega_n = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}\mu_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\, tg\,\mu = \frac{\rho_0 S_0 l}{m}$.

2.6. 1. $\omega_n = \pi\sqrt{\frac{E}{\rho}}n$, $n \in \mathbf{N}$; 2. $\omega_n = \frac{\mu_n}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $n \in \mathbf{N}$; $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu = -\frac{l}{l_0 - l}$. Указание. В уравнении для функции $u(x,t)$ сделать замену $v(x,t) = (l_0 - x)u(x,t)$. **2.7.** $\omega_n = \mu_n\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu = \frac{\mu^2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2}$, где $p_1 = \frac{l(hl_0-1)}{l_0}$, $p_2 = \frac{l}{l_0}\left(\frac{kl_0}{ES_0} - 1\right)$. Указание. См. предыдущую задачу. **2.8.** $F_k = \frac{\pi^2 JE}{4l^2}$, $J = \frac{4}{3}l_1 l_2^3$. Указание. Надо найти наименьшее собственное значение задачи (см.задачу 1.98)

$$u_{xx} + \lambda\, u = 0, \ \ 0 < x < l, \ \ \lambda = \frac{F}{JE},$$
$$u(0) = u'(l) = 0.$$

2.9. 1) $\omega_n = a\mu_n^2, \ \mu_n > 0 - \ \cos\mu\, ch\,\mu = -1$;
2) $\omega_n = a\mu_n^2, \ \mu_n > 0 - \ \cos\mu\, ch\,\mu = 1$;
3. $\omega_n = \frac{\pi^2 a}{l^2}n^2, \ n \in \mathbf{N}, \ a = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$.

2.10. $\omega_n = \frac{\mu_n}{l}\sqrt{\frac{GJ}{K}}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu = -\frac{kl}{GJ}$.

2.11. $\omega_n = \frac{\mu_n}{l}\sqrt{\frac{GJ}{K}}$, $n \in \mathbf{N}$, где $\mu_n > 0$ — корень уравнения $(\mu\, tg\,\mu - p)(\mu\, ctg\,\mu + p) = 0$, $p = \frac{Kl}{K_0}$. **2.12.** $\omega_k = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}\mu_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $tg\,\mu = \mu$. Указание. В уравнении для потенциала скоростей ψ сделать замену $v = r\psi$. **2.13.** 1) $R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2 - r_1}$, $n \in \mathbf{N}$, $\|R_n\|^2 = \frac{r_2 - r_1}{2}$; 2) $R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{\mu_n(r-r_1)}{r_2-r_1}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu = p\,\sin\mu$, где

$p=1-\frac{r_1}{r_2}$, $\|R_n\|^2=\frac{\mu_n^2+p^2+p}{\mu_n^2+p^2}$, $n\in\mathbf{N}$; 3) $R_n(r)=\dfrac{1}{r}\sin\frac{\mu_n(r_2-r)}{r_2-r_1}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=-p\sin\mu$, $p=\frac{r_1}{r_2}-1$, $\|R_n\|^2=\frac{\mu_n^2+p^2-p}{\mu_n^2+p^2}$, $n\in\mathbf{N}$; 4) $R_n(r)=\dfrac{1}{r}(\sin\frac{\mu_n(r-r_1)}{d}+\frac{\mu_n r_1}{d}\cos\frac{\mu_n(r-r_1)}{d})$, $d=r_2-r_1$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+\frac{\mu^2 r_1 r_2}{d^2})\sin\mu$, $\|R_n\|^2=\frac{\mu_n^2}{2}\frac{(r_1r_2\mu_n)^2+3r_1r_2d^2+d^4}{d(r_2^2\mu_n^2+d^2)}$.

Указание. Для вычисления нормы собственной функции $R_n(r)$ применима техника, изложенная в примере 2.1. и в задаче 2.63. Следует исходить из системы

$$\begin{cases}\Delta R+\lambda R=0,\\ \Delta R_n+\lambda_n R_n=0,\end{cases}$$

После перекрестного умножения на R_n и R получается тождество

$$(\lambda-\lambda_n)R_nR\,r^2=r^2(RR_n'-R_nR'),$$

из которого следует

$$\|R_n\|^2=\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{r^2(RR_n'-R_nR')}{\lambda-\lambda_n}\Big|_{r_1}^{r_2}=\frac{r^2}{2\lambda_n}(rR_n'^2+R_nR_n'+\lambda_nrR_n^2)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

2.14. $\omega_k=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}\frac{\mu}{r_2-r_1}$, $n\in\mathbf{N}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=\frac{r_1r_2\mu^2}{(r_1-r_2)^2}+1$.

2.15. $\omega_n=\frac{a\,\mu_n}{l}$, $n\in\mathbf{N}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=1-\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$.

2.16. $\omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\mu_n^2+\alpha^2}$, $n\in\mathbf{N}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-\alpha$.

2.17. $\omega_{mnk}=\pi a\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{k}{l_3}\right)^2}$, $a=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$, $m,n,k\in\mathbf{N}_0$, $m+n+k>0$.

2.18. $\omega_{mn}=\frac{pi}{2}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\left(\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}\right)^{\frac12}$, $m,n\in\mathbf{N}$. 1) a. $x+y=0$; 1) b. $x-y=0$; 2) a $x=0$, $y=0$, стороны квадрата с вершинами $(l;0),(0;l),(-l;0),(0;-l)$; 2) b $x=0$, $y=0$, $x+y=0$, $x-y=0$. Указание. Колебания мембраны с закрепленным краем Γ описываются системой уравнений

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\ \ |x|<l_1,\ \ |y|<l_2,\ \ 0<t,$$
$$u|_\Gamma=0,\ \ u(x,y,0)=u_0(x,y),\ \ u_t(x,y,0)=u_1(x,y).$$

Подстановка $u(x,y,t)=v(x,y)T(t)$ приводит к задаче

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0,\ \ |x|<l_1,\ \ |y|<l_2,\quad v|_\Gamma=0.$$

Это — задача на собственные значения и ее следует решать методом Фурье, полагая $v(x,y)=X(x)Y(y)$, что дает две задачи на собственные значения:

$$\begin{array}{ll}X'+\alpha X=0,\ \ |x|<l_1, & Y'+\beta Y=0,\ \ |y|<l_2,\\ X(-l_1)=X(l_1)=0, & Y(-l_2)=Y(l_2)=0,\end{array}\qquad \alpha+\beta=\lambda.$$

2.19. $\omega_{mn}=\frac{pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\sqrt{m^2+\left(n+\frac12\right)^2}$, $m\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}_0$. **2.20.** $\omega_n=\frac{\pi n}{l\sqrt{LC}}$, $n\in\mathbf{N}$. **2.21.** $\omega_n=\frac{\mu_n}{l\sqrt{LC}}$, $n\in\mathbf{N}$, где μ_n — положительный корень уравнения 1) $tg\,\mu=-\mu\frac{L_0}{lL}$; 2) $\mu\,tg\,\mu=\frac{Cl}{l_0}$. **2.22.** $j(z,t)=pJ\sqrt{2}e^{-pz}\cos(pz-\omega t-\frac{\pi}{4})$,

где $p=\frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c}$. **2.23.** $\left|\frac{j(z)}{j(l)}\right|=e^{-\frac{l-z}{\delta}}$, $\delta=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}$, $\rho=\frac{1}{2lc}\sqrt{\frac{\pi\omega\mu}{2\sigma}}$.

2.24. $\psi(x,z,t)=A_n\cos\frac{\pi nx}{l}\,ch\frac{\pi n(z+h)}{l}\cos(\omega_n t+\delta_n)$, $\omega_n=\sqrt{\frac{\pi gn}{l}\,th\frac{\pi hn}{l}}$, $n\in\mathbf{N}$.

2.25. 1. $\omega_{mn}^2=g\lambda_{mn}$; 2. $\omega_{mn}^2=g\lambda_{mn}th\,(h\lambda_{mn})$, где $\lambda_{mn}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $m,n\in\mathbf{N}$. **2.26.** $V=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$. Указание. Показать, что задача для потенциала скоростей (см.задачу 1.231 п.2)

$$\Delta\psi=0,\ \ -\infty<x,y<\infty,\ \ 0<z,$$
$$(\psi_{tt}+g\psi_z)|_{z=0}=0,\ \ |\psi|<\infty,$$

имеет решение вида $\psi(x,z,t)=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)$, $\omega=\sqrt{kg}$. Скорость волны $V=\frac{d\omega}{dk}$. **2.27.** $\psi(x,z,t)=A\,ch\,k(z+h)\cos(kx-\omega t)$, $\omega^2=kg\,th\,kh$;

$V=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\,th\,kh}}\left(th\,kh+\frac{kh}{ch^2kh}\right)$. **2.28.** $V=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)}{k(\rho_2+\rho_1)}}$.

2.29. $\zeta(x,t)=\frac{A\cos\frac{\omega x}{\sqrt{gh}}}{\cos\frac{\omega l}{\sqrt{gh}}}\cos\omega t$. Указание. В уравнении для потенциала скоростей ψ (см. задачу 1.235.) сделать замену $v=r\psi$. **2.30.** $\chi=\frac{l}{L}th\,\frac{l}{L}$. Указание. При отсутствии источников стационарное уравнение диффузии имеет вид (см.задачу 1.167): $u_{xx}-\frac{1}{L^2}u=0$. **2.31.** $\chi=\frac{r_0^2}{3L^2\left(\frac{r_0}{L}cth\,\frac{r_0}{L}-1\right)}$. См указание к задаче 2.30.

2.32. 1. $\Phi_1(x)=\frac{4q_0\,sh\,\frac{\tilde{l}-x}{L}}{sh\,\frac{\tilde{l}}{L}-\frac{2D}{L}ch\,\frac{\tilde{l}}{L}}$; 2. $\Phi_2(x)=\frac{4q_0\left(sh\,\frac{l-x}{L}+\frac{2D}{L}ch\,\frac{l-x}{L}\right)}{\left(1+\frac{2D}{L}\right)^2e^{\frac{l}{L}}-\left(1-\frac{2D}{L}\right)^2e^{-\frac{l}{L}}}$.

$$\Phi_1(x)\approx\Phi_2(x)=\frac{4q_0\,sh\,\frac{l-x}{L}}{sh\,\frac{l}{L}}.\qquad L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}},\quad D=\frac{1}{3\Sigma_s}.$$

Указание. В диффузионном приближении справедливы неравенства:

$$\frac{D}{L}\sqrt{\frac{\Sigma_c}{3\sigma_s}}\ll 1,\quad \frac{D}{l}=\frac{\lambda}{3l}\ll 1.$$

2.33. 1. $\Phi_1(r)=\frac{Q_0}{4\pi Dr}\frac{sh\,\frac{\tilde{r}_0-r}{L}}{sh\,\frac{r_0}{L}}$; 2. $\Phi_2(r)=\frac{Q_0}{4\pi Dr}\frac{\left(1-\frac{2D}{L}\right)sh\,\frac{r_0-r}{L}+\frac{2D}{L}ch\,\frac{r_0-r}{L}}{\left(1-\frac{2D}{L}\right)sh\,\frac{r_0}{L}+\frac{2D}{L}ch\,\frac{r_0}{L}}$.

$$\Phi_1(r)\approx\Phi_2(r)=\frac{Q_0}{4\pi Dr}\frac{sh\,\frac{r_0-r}{L}}{sh\,\frac{r_0}{L}},\quad L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}},\quad D=\frac{1}{3\Sigma_s}.$$

См. указание к задаче 2.32.

2.34. $\Phi(r)=\frac{r_0\Phi_0}{sh\kappa\left[1+\frac{2D}{r_0}(\kappa cth\kappa-!)\right]}\frac{sh\,\frac{r}{L}}{r}$, $\gamma=\frac{1-\frac{2D}{r_0}(\kappa cth\kappa-1)}{1+\frac{2D}{r_0}(\kappa cth\kappa-1)}$, $\kappa=\frac{r_0}{L}$,

$L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}}$, $D=\frac{1}{3\Sigma_s}$. **2.35.** $\Phi(x)=\frac{\Phi_0 ch\,\frac{x}{L}}{ch\kappa+\frac{2D}{L}sh\kappa}$, $\gamma=\frac{1-\frac{2D}{L}th\kappa}{1+\frac{2D}{L}th\kappa}$, $\kappa=\frac{r_0}{L}$,

$L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}}$, $D=\frac{1}{3\Sigma_s}$. **2.36.** 1. $\tilde{l}=\frac{\pi}{2\alpha}$; 2. $l=\frac{1}{2\alpha}arcctg\left[\frac{1}{2}\left(2\alpha D-\frac{1}{2\alpha D}\right)\right]$.

Указание. См.задачу 1.175.

2.37. 1a. $\tilde{l}=\frac{\pi}{2\alpha}$; 1$b$. $l=\frac{1}{2\alpha}\,arcctg[\frac{1}{2}(2\alpha D-\frac{1}{2\alpha D})]$;

2a. $\tilde{l}=\frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}}$; 2$b$. $l=\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\,arcctg[\frac{1}{2}(\alpha\sqrt{1}D-\frac{1}{\alpha\sqrt{2}D})]$;

3a. $\tilde{l}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2\alpha}$; 2$b$. $l=\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}\,arcctg[\frac{1}{2}(\frac{2\alpha D}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\alpha D})]$.

Указание. В n-мерном случае критическое состояние среды описывается стационарной плотностью потока нейтронов $\Phi(x)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{R^n}$. Функция $\Phi(x)$ является решением краевой задачи (см. задачу 1.175.):

$$\Delta\Phi(x)+\alpha^2\Phi(x)=0,\quad x\in\Omega=\{x:|x_k|<l,\ k=1,2,\dots,n$$
$$1.\ \Phi|_{x_k=\mp l}=0,\quad 2.\ \left(\tfrac{1}{2}\Phi\mp\tfrac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)\Big|_{x_k=\mp l}=0,$$
$$\Phi(x)|_{x\in\Omega}>0,\quad k=1,2,\dots,n.$$

Эта задача сводится методом разделения переменных к n одномерным задачам на собственные значения. В результате

$$\Phi(x)=\prod_{k=1}^{n}(A_k\sin\alpha(x+l)+B_k\cos\alpha(x+l)),\ \text{ где }\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha.$$

Подстановка функции $\Phi(x)$ в граничнве условия определяет уравнение для критического размера. **2.38.** $1.\,r_k=\frac{\pi}{\alpha}$; $2.\,r_k=\frac{\mu}{\alpha}$, где $\mu>0$ — наименьший корень уравнения $tg\mu=\mu$. **2.39.** $r_{2k}=\frac{\mu}{\alpha}$, где $\mu>0$ — наименьший корень уравнения $tg(\mu-\alpha r_1)=-\alpha r_1$. **2.40.** $\tilde r_{2k}=\tilde r_1+\frac{\pi}{\alpha}$.

2.41. Критический радиус r_{0k} — наименьший корень уравнения

$$D_C-D_R=D_C\,\alpha_C\,r_0\,ctg\,\alpha r_0+D_R\tfrac{r_0}{L_R}cth\,\tfrac{r_1-r_0}{L_R},$$

где $\alpha_C^2=\frac{k_\infty-1}{L_C^2-\tau_C}$, $L_C=\sqrt{\frac{D_C}{\Sigma_a^C}}$, $D_C=\frac{1}{3\Sigma_s^C}$, $L_R=\sqrt{\frac{D_R}{\Sigma_c^R}}$, $D_R=\frac{1}{3\Sigma_s^R}$.

Частные случаи: $1.r_{0k}=r_k-L_R$ (для графита L_R =50 см); $2.r_{0k}=\frac{1}{2}r_k$.

Указание. См. задачу 1.179. **2.42.** $D_C\,\mu_C\,tg\,\mu_C l_3{=}D_R\,\mu_R\,cth\,\mu_R(\tilde d-l_3)$, $\mu_C^2{=}\alpha_C^2-\left(\frac{\pi}{2\tilde l_1}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2\tilde l_2}\right)^2$, $\mu_R^2=\left(\frac{\pi}{2\tilde l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\tilde l_2}\right)^2+\frac{1}{L_R^2}$, величины α_C и L_R определены в ответе к предыдущей задаче.

2.43. $1.\,\tilde l_k=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$; $2.\,\tilde l_k=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$, где λ — корень уравнения критичности

$$\frac{k_\infty e^{-\lambda\tau_T}}{1+\lambda L_T^2}=1, \tag{2.79}$$

в котором коэффициент размножения k_∞ имеет вид (1.38), а $\tau_T=\tau(u_T)$ (см. (1.64)), $L_T=\sqrt{\frac{D_T}{\Sigma_a^T}}$, $D_T=\frac{1}{3\Sigma_s^T}$. Решение. Система уравнений для определения критических размеров приведена в ответе к задаче 1.189. Подстановка $\Phi=q/(\xi\Sigma)$ преобразует первое уравнение системы к виду

$$\Delta q-\tfrac{\Sigma_a(u)}{D(u)}q=\tfrac{\xi\Sigma(u)}{D(u)}\tfrac{\partial q}{\partial u},\quad 0\le u\le u_T.$$

В результате разделения переменных $q(\mathbf{r},u)=R(\mathbf{r})U(u)$ получается задача на собственные значения

$$\begin{aligned}&\Delta R+\lambda R=0\quad\text{в }\Omega,\\ &R|_{\tilde S}=0,\quad R(\mathbf{r})>0\ \text{в }\Omega,\end{aligned} \tag{2.80}$$

и уравнение $U' + \left(\lambda\frac{D(u)}{\xi\Sigma(u)} + \frac{\Sigma_a(u)}{\xi\Sigma(u)}\right) = 0, \quad 0 \le u \le u_T,$

решение которого $U(u) = U(0)\, e^{-\int_0^u \left(\lambda\frac{D(u)}{\xi\Sigma(u)} + \frac{\Sigma_a(u)}{\xi\Sigma(u)}\right) du}$ приводится к виду (см.(1.64), (1.146))

$$U(u) = U(0)\varphi(u)\, e^{-\lambda\tau(u)}.$$

Уравнение диффузии для $\Phi_T(\mathbf{r}) = C_T R(\mathbf{r})$, записанное в форме

$$\Delta R + \left(\frac{U(0)\varphi_T e^{-\lambda\tau_T}}{C_T D_T} - \frac{\Sigma_a^T}{D_T}\right) R = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \qquad ,$$

должно совпадать с уравнением (2.81). Следовательно,

$$\lambda = \frac{U(0)\varphi_T e^{-\lambda\tau_T}}{C_T D_T} - \frac{\Sigma_a^T}{D_T}, \quad \varphi_T = \varphi(u_T),$$

откуда $C_T = \frac{U(0)\varphi_T e^{-\lambda\tau_T}}{\lambda D_T + \Sigma_a^T}$. Уравнение критичности (2.79) получается из условия $q(\mathbf{r},0) = \xi\Sigma_f^T\Phi_T(\mathbf{r})$ после подстановки $q(\mathbf{r},0)$ и $\Phi_T(\mathbf{r})$. **2.44.** $r_k = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, где λ — корень уравнения (2.79). **2.45.** 1) $\tilde{r}_k = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$; 2) $\tilde{r}_k = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$., где λ — корень уравнения критичности

$$\frac{k_\infty e^{-\lambda\tau_T\cdot}}{1+\lambda L_T^2} + \nu\int_0^{u_T} \frac{\Sigma_f(u)\varphi(u)}{\xi\Sigma(u)} e^{-\lambda\tau(u)} du = 1, \tag{2.81}$$

k_∞, L_T, τ_T, u_T те же, что в ответе к задаче 2.43. **2.46.** $r_k = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, где λ — корень уравнения (2.81). **2.47.** $t_k = \frac{16\mu\sigma l^2}{\pi c^2}$. **2.48.** $t_k = \frac{16\mu\sigma l_1^2 l_2^2}{\pi c^2(l_1^2+l_2^2)}$. Задача (см. пример 1.25.)

$$H_t = \Delta H, \ \ |x| < l_1, \ \ |y| < l_2, \ \ 0 < t,$$
$$H|_\Gamma = 0, \ \ H|_{t=0} = H_0, \quad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma},$$

имеет решение $H(x,y,t) = \sum_{m,n=1} C_{mn} v_{mn}(x,y) e^{-a^2\lambda_{mn}t}$, $t_c = \frac{1}{a^2\lambda_{11}}$. **2.49.** $\mathbf{E} = \mathcal{E}e^{i\omega t}$, $\mathbf{H} = \mathcal{H}e^{i\omega t}$, собственные частоты

$$\omega = \pi c\left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} + \frac{s^2}{l_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \ m,n,s \in \mathbf{N}, \ m+n+s \ge 2,$$

амплитуды собственных колебаний

$$\mathcal{E}_x = A\cos\tfrac{\pi mx}{l_1}\sin\tfrac{\pi ny}{l_2}\sin\tfrac{\pi sz}{l_3}, \quad \mathcal{H}_x = \tfrac{i\pi c}{\omega}\left(\tfrac{nC}{l_2} - \tfrac{sB}{l_3}\right)\sin\tfrac{\pi mx}{l_1}\cos\tfrac{\pi ny}{l_2}\sin\tfrac{\pi sz}{l_3},$$
$$\mathcal{E}_y = B\sin\tfrac{\pi mx}{l_1}\cos\tfrac{\pi ny}{l_2}\sin\tfrac{\pi sz}{l_3}, \quad \mathcal{H}_y = \tfrac{i\pi c}{\omega}\left(\tfrac{sA}{l_3} - \tfrac{mC}{l_1}\right)\cos\tfrac{\pi mx}{l_1}\sin\tfrac{\pi ny}{l_2}\cos\tfrac{\pi sz}{l_3},$$
$$\mathcal{E}_z = C\sin\tfrac{\pi mx}{l_1}\sin\tfrac{\pi ny}{l_2}\cos\tfrac{\pi sz}{l_3}, \quad \mathcal{H}_z = \tfrac{i\pi c}{\omega}\left(\tfrac{mB}{l_1} - \tfrac{nA}{l_2}\right)\cos\tfrac{\pi mx}{l_1}\cos\tfrac{\pi ny}{l_2}\sin\tfrac{\pi sz}{l_3},$$

$\frac{mA}{l_1} + \frac{nB}{l_2} + \frac{sC}{l_3} = 0$. Указание. Каждая компонента $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ является решением задачи на собственные значения. Для $\mathcal{E}_x$ эта задача имеет вид (см. задачу 1.373.)

$$\Delta\mathcal{E}_x + \tfrac{\omega^2}{c^2}\mathcal{E}_x = 0,\ \ 0 < x < l_1,\ \ 0 < y < l_2,\ \ 0 < z < l_3,$$
$$\tfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}\big|_{x=0} = \tfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}\big|_{x=l_1} = 0,\ \ \mathcal{E}_x|_{y=0} = \mathcal{E}_x|_{y=l_2} = \mathcal{E}_x|_{z=0} = \mathcal{E}_x|_{z=l_3} = 0.$$

Далее применить метод Фурье, полагая $\mathcal{E}_x = X(x)Y(y)Z(z)$.

2.50. TE-волна: $\mathcal{E} = (0, \mathcal{E}_y, 0),\ \ \mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, 0, \mathcal{H}_z),$

$$\mathcal{E}_y = A\sin\tfrac{\pi n x}{l},\ \ \mathcal{H}_x = -\tfrac{\beta A}{k}\sin\tfrac{\pi n x}{l},\ \ \mathcal{H}_z = \tfrac{\pi n A i}{kl}\cos\tfrac{\pi n x}{l},\ \ n \in \mathbf{N_0},$$

TM-волна: $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x, 0, \mathcal{E}_z),\ \ \mathcal{H} = (0, \mathcal{H}_y, 0),$

$$\mathcal{E}_x = -\tfrac{\beta B}{k}\cos\tfrac{\pi n x}{l},\ \ \mathcal{E}_z - \tfrac{\pi n B i}{kl}\sin\tfrac{\pi n x}{l},\ \ \mathcal{H}_y = B\cos\tfrac{\pi n x}{l},\ \ n \in \mathbf{N_0};$$

при $n{=}0$ TM-волна $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 e^{i(kz-\omega t}\mathbf{e}_x,\ \ \mathbf{H} = -\tfrac{k\mathcal{E}_0}{\beta}e^{i(kz-\omega t}\mathbf{e}_y$ представляет собой TEM-волну.

2.51. $\omega_{oTM} = \tfrac{\pi c}{l_1 l_2}\sqrt{l_1^2 + l_2^2},\ \ \omega_{oTE} = \pi c\,\min(\tfrac{1}{l_1}, \tfrac{1}{l_2}),\ \ \omega_{oTE} < \omega_{oTM}.$
Указание. Компонента $\mathcal{E}_z(x, y)$ электрического поля в TM-волне является решением краевой задачи (1.186). Нетривиальное решение этой задачи

$$\mathcal{E}_z(x, y) = A_{mn}\sin\tfrac{\pi n x}{l_1}\sin\tfrac{\pi m y}{l_2},\ \ m, n \in \mathbf{N}$$

получается методом Фурье, а остальные компоненты полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ выражаются через $\mathcal{E}_z$ посредством соотношений (1.187) (при этом выполняется равенство $\left(\tfrac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\tfrac{\pi n}{l_2}\right)^2 = \tfrac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$). Нравенство $\tfrac{\omega^2}{c^2} > \pi^2\left(\tfrac{1}{l_1} + \tfrac{1}{l_2}\right)$ определяет частоту отсечки. Исследование TE-волн проводится аналогично: нужно решить задачу (1.188) и применить соотношения (1.189) .

2.52. $TE-$моды: $\mathcal{E} = (0, \mathcal{E}_y, 0),\ \ \mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, 0, \mathcal{H}_z),$

$$\mathcal{E}_y = A\begin{cases} qe^{-\frac{rx}{l}}, & 0 \le x, \\ q\cos\tfrac{qx}{l} - r\sin\tfrac{qx}{l}, & -l \le x < 0, \\ (q\,\cos\,q + r\,\sin\,q)e^{p(1+\frac{x}{l})}, & x < -l, \end{cases}$$

$$q^2 = (k^2 n_1^2 - \beta^2)l^2,\ \ p^2 = (\beta^2 - k^2 n_2^2)l^2,\ \ r^2 = (\beta^2 - k^2 n_3^2)l^2, \qquad (2.82)$$
$$\mathcal{H}_x = -\tfrac{\beta}{k}\mathcal{E}_y,\ \ \mathcal{H}_z = -\tfrac{i}{k}\tfrac{d\mathcal{E}_y}{dx}.$$

Характеристическое уравнение

$$ctg\,q = \frac{q^2 - pr}{q(p + r)}. \qquad (2.83)$$

Частота отсечки j-й моды $\omega_{0j} = ck_{0j}$, где

$$k_{0j} = \tfrac{1}{l\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\left(arctg\sqrt{\tfrac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + \pi j\right),\ \ j \in \mathbf{N_0},$$

число мод с частотой ω равно целой части числа

$$\tfrac{1}{\pi}\left(\tfrac{\omega l}{c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} - arctg\sqrt{\tfrac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}\right).$$

TM-моды: $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x, 0, \mathcal{E}_z),\ \ \mathcal{H} = (0, \mathcal{H}_y, 0),$

$$\mathcal{H}_y(x) = B\begin{cases} qe^{-\frac{rx}{l}}, & 0 \le x, \\ q\cos\frac{qx}{l} - \frac{n_1^2}{n_3^2} r\sin\frac{qx}{l}, & -l \le x < 0, \\ (q\cos q + \frac{n_1^2}{n_3^2} r\sin q)e^{p(1+\frac{x}{l})}, & x < -l, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{\beta}{kn^2(x)}\mathcal{H}_y,\ \ \mathcal{E}_z = \frac{i}{kn^2(x)}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx},\ \ n(x) = \begin{cases} n_3, & 0 < x, \\ n_1, & -l < x < 0, \\ n_2, & x < -l. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$ctg\, q = \frac{q^2 n_2^2 n_3^2 - prn_1^4}{qn_1^2(pn_3^2 + rn_2^2)}. \tag{2.84}$$

Частота отсечки j-й моды $\omega_{0j} = ck_{0j}$,

$$k_{0j} = \frac{1}{l\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\left(arctg\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + \pi j\right),\ \ j \in \mathbf{N}_0,$$

число мод с частотой ω равно целой части числа

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega l}{c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} - arctg\frac{n_1^2}{n_3^2}\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}\right).$$

Графики решений $\beta = \varphi_j(k)$ уравнения (2.83) изображены на рис.2.4. Графики решений уравнения (2.84) имеют аналогичную форму. Указание.

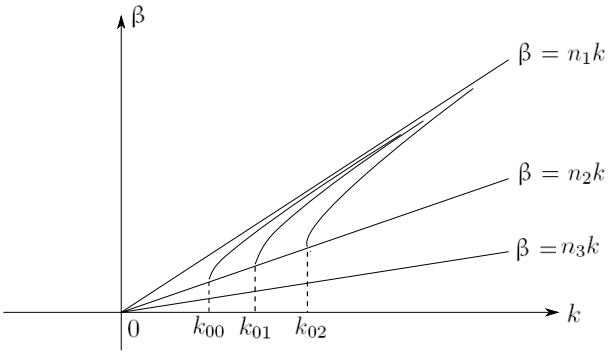

Рис. 2.4

Уравнение для TE-мод имеет вид

$$\frac{d^2\mathcal{E}_y}{dx^2} - (\beta^2 - k^2 n^2(x))\mathcal{E}_y = 0,$$

его решение

$$\mathcal{E}_y(x) = \begin{cases} A_1 e^{-\frac{rx}{l}}, & 0 < x, \\ A_2\cos\frac{qx}{l} + A_3\sin\frac{qx}{l}, & -l < x < 0, \\ A_4 e^{p(1+\frac{x}{l})}, & x < -l. \end{cases}$$

Требование непрерывности $\mathcal{E}_y(x)$ и $\mathcal{E}_y'(x)$ на границе раздела двух ди-

электриков приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4. Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, что приводит к (2.83). По теореме существования неявной функции уравнение (2.83) определяет функцию $\beta{=}\varphi_j(k)$, $j =\in \mathbf{N_0}$. Функция $\beta = \varphi_j(k)$ определена на промежутке $[\,k_{0j}\,,\infty\,)$, монотонно возрастает $(\,\varphi_j'(k) > 0\,)$, а соответствующий график обладает асимптотой $\beta = kn_1$.

2.53. См. ответ к предыдущей задаче, где

$$A = 4\left[\frac{\pi klprW}{\beta c(q^2+r^2)(pr+p+r)}\right]^{\frac12},$$

$$B = 4n_1n_3^2\left[\frac{\pi klprW}{\beta c(q^2n_3^4+r^2n_1^4)\left(pr+\frac{n_1^2n_2^2p(r^2+q^2)}{q^2n_3^4+r^2n_1^4}+\frac{n_1^2n_2^2r(p^2+q^2)}{p^2n_1^4+q^2n_2^4}\right)}\right]^{\frac12}.$$

Указание. Плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) $\mathbf{w} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}]$. **2.54.** $\mathbf{E} = \mathcal{E}e^{i(\beta\, z-\omega\, t)}$, $\mathbf{H} = \mathcal{H}e^{i(\beta\, z-\omega\, t)}$.

TE-моды: $\mathcal{E} = (0,\mathcal{E}_y,0)$, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x,0,\mathcal{H}_z)$, $\mathcal{H}_x = -\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y$, $\mathcal{H}_z = -\frac{i}{k}\frac{d\mathcal{E}_y}{dx}$.

Нечетные моды

$$\mathcal{E}_y(x) = A\begin{cases}\sin q\, e^{p\,(1-\frac{|x|}{l})}sign\, x, & |x|\ge l,\\ \sin\frac{qx}{l}, & |x|<l,\end{cases}$$

характеристическое уравнение и частоты отсечки

$$tg\, q = -\tfrac{q}{p},\ \ \omega_{0j} = \tfrac{\pi c}{l\sqrt{n_1^2-n_2^2}}(j+\tfrac12),\ \ j\in\mathbf{N_0}.$$

Четные моды

$$\mathcal{E}_y(x) = A\begin{cases}\cos q\, e^{p\,(1-\frac{|x|}{l})}, & |x|\ge l,\\ \cos\frac{qx}{l}, & |x|<l,\end{cases}$$

характеристическое уравнение и частоты отсечки

$$tg\, q = \tfrac{p}{q},\ \ \omega_{0j} = \tfrac{\pi c}{l\sqrt{n_1^2-n_2^2}}j,\ \ j\in\mathbf{N_0}.$$

Коэффициент локализации TE-моды $P_1 = \frac{1+\frac{p}{p^2+q^2}}{1+\frac1p}$.

TM-моды: $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x,0,\mathcal{E}_z)$, $\mathcal{H} = (0,\mathcal{H}_y,0)$, $\mathcal{E}_x = \frac{\beta}{kn^2}\mathcal{H}_y$, $\mathcal{E}_z = \frac{i}{kn^2}\frac{d\mathcal{H}_y}{dx}$.

Нечетные моды

$$\mathcal{H}_y(x) = B\begin{cases}\sin q\, e^{p\,(1-\frac{|x|}{l})}sign\, x, & l\le|x|,\\ \sin\frac{qx}{l}, & |x|<l,\end{cases}$$

характеристическое уравнение и частоты отсечки

$$tg\, q = -\tfrac{n_2^2}{n_1^2}\tfrac{q}{p},\ \ \omega_{0j}\tfrac{\pi c}{l\sqrt{n_1^2-n_2^2}}(j+\tfrac12),\ \ j=\in\mathbf{N_0}.$$

Четные моды

$$\mathcal{H}_y(x) = B\begin{cases}\cos q\, e^{p\,(1-\frac{|x|}{l})}, & l\le x,\\ \cos\frac{qx}{l}, & |x|<l,\end{cases}$$

характеристическое уравнение и частоты отсечки

$$tg\,q=\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{p}{q},\quad \omega_{0j}=\frac{\pi c}{l\sqrt{n_1^2-n_2^2}}j,\quad j\in\mathbf{N_0}.$$

Коэффициент локализации TM-моды $P_1=\dfrac{1+\frac{n_1^2n_2^2p}{n_1^4p^2+n_2^4q^2}}{1+\frac{n_1^2n_2^2(p^2+q^2)}{p(n_1^4p^2+n_2^4q^2)}}$.

Величины p и q определены выражениями (2.82).

2.55. 1. $\psi_{nr}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{x}{l_1}\right)\sin\frac{\pi r}{2}\left(1+\frac{y}{l_2}\right)$,
$E_{nr}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{r^2}{l_2^2}\right)$, $n,r\in\mathbf{N}$;

2. $\psi_{nrs}(x,y,z)=2\sqrt{\frac{2}{l_1l_2l_3}}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{x}{l_1}\right)\sin\frac{\pi r}{2}\left(1+\frac{y}{l_2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}\left(1+\frac{z}{l_3}\right)$,
$E_{nrs}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{r^2}{l_2^2}+\frac{s^2}{l_3^2}\right)$, $n,r,s\in\mathbf{N}$.

2.56. $\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi nx}{l}$, $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$,

$\psi_s(x)=\left(\frac{1}{l}\frac{\mu_s^2+q^2}{\mu_s^2+q^2+q}\right)^{\frac12}\sin\mu_s\left(1-\frac{|x|}{l}\right)$, $E_s=\frac{\hbar^2}{2ml^2}\mu_s$,

$n,s\in\mathbf{N}$, $\mu_s>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-q$, $q=\alpha\,l$.

Указание. Волновые функции $\psi(x)$ стационарных состояний являются решениями задачи на собственные значения

$$\psi''+k^2\psi=2\,\alpha\,\psi(0)\,\delta(x),\quad k^2=\tfrac{2m}{\hbar^2}E,$$
$$-l<x<l$$
$$\psi(-l)=\psi(l)=0.$$

Чтобы решить эту задачу, ее следует поставить в эквивалентной форме, используя формулу (см.10.15):

$$\psi''+k^2\psi=0,\quad -l<x<0,\ 0<x<l,$$
$$\psi(-l)=\psi(l)=0,$$
$$\psi(+0)-\psi(-0)=0,\quad \psi'(+0)-\psi'(-0)=2\alpha\psi(0).$$

2.57. $E_n=\frac{\hbar^2}{2ml^2}\mu_n^2$, $n\in\mathbf{N}$, $\mu_n>0$ — решение системы

$$\begin{cases}\sin\mu=\pm\frac{\mu}{\mu_0}\\ tg\,\mu<0\end{cases},\quad \mu=\tfrac{l}{\hbar}\sqrt{2mE},\quad \mu_0=\tfrac{l}{\hbar}\sqrt{2mU_0}.$$

Число уровней $-1-\left[-\frac{\mu_0}{\pi}-\frac12\right]$. Связанных состояний не существует при условии $U_0\le\frac{\pi^2\hbar^2}{8ml^2}$. Решение. Волновые функции $\psi(x)$ стационарных состояний являются решениями задачи:

$$\tfrac{\hbar^2}{2m}\psi''+E\psi=0,\quad 0<x<l,$$
$$\tfrac{\hbar^2}{2m}\psi''+(E-U_0)=0,\quad l<x,$$
$$\psi(0)=0,\quad \textstyle\int_0^\infty\psi^2dx=1,$$
$$\psi(l-0)=\psi(l+0),\quad \psi'(l-0)=\psi'(l+0).$$

Отсюда следует, что условию при $x{=}0$ и интегральному условию нормировки удовлетворяют решения вида

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin\frac{\mu}{l}x, & x < l, \\ B\,e^{\sqrt{\mu_0^2-\mu^2}\frac{x}{l}}, & l \le x. \end{cases}$$

Граничные условия выполняются, если $\mu\, ctg\,\mu = -\sqrt{\mu_0^2-\mu^2}$, $\mu{<}\mu_0$ (связанные состояния), что эквивалентно системе $\sin\mu = \pm\frac{\mu}{\mu_0}$, $tg\,\mu{<}0$. Из графического решения системы (см. рис.2.5) следует,

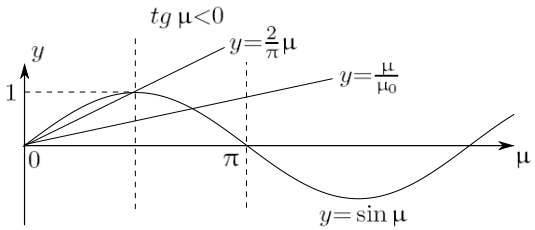

Рис. 2.5

что число уровней конечно; связанных состояний не существует, если $\frac{1}{\mu_0}{\ge}\frac{2}{\pi}$, т.е. при условии $\frac{\hbar}{l\sqrt{2mU_0}}{\ge}\frac{2}{\pi}$. **2.58.** $E_n = \frac{\hbar^2}{2ml^2}\mu_n^2$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n > 0$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \sin\mu = \pm\frac{\mu}{\mu_0} \\ tg\,\mu < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos\mu = \pm\frac{\mu}{\mu_0} & \mu = \frac{l}{\hbar}\sqrt{2mE}, \\ tg\,\mu > 0, & \mu_0 = \frac{l}{\hbar}\sqrt{2mU_0}. \end{cases}$$

Если $U \le \frac{\hbar^2}{8ml^2}$, то существует лишь один уровень.

2.59. Собственные значения λ являются корнями трансцендентного уравнения

$$c_1\sqrt{D_1}\sin s_1\sqrt{\lambda}\cos s_2\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{D_2}\sin s_2\sqrt{\lambda}\cos s_1\sqrt{\lambda} = 0, \tag{2.85}$$

где $s_i = \frac{l_i}{\sqrt{D_i}}$, $i = 1, 2$, собственные функции

$$X_n = \begin{cases} A_{1n}\cos s_1\sqrt{\lambda_n}\left(1+\frac{x}{l_1}\right), & x \in \Delta_1, \\ A_{2n}\cos s_2\sqrt{\lambda_n}\left(1-\frac{x}{l_2}\right), & x \in \Delta_2, \end{cases} \tag{2.86}$$

$$A_{in} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{D_i}\sin s_i\sqrt{\lambda_n}}, & \sin^2 s_1\sqrt{\lambda_n} + sin^2 s_2\sqrt{\lambda_n} \ne 0, \\ \frac{c_i}{\cos s_i\sqrt{\lambda_n}}, & \sin^2 s_1\sqrt{\lambda_n} + sin^2 s_2\sqrt{\lambda_n} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Указание. Ввести билинейную форму $(\rho\mathcal{L}X, Y) = \int_\Delta \overline{Y}\mathcal{L}X\rho dx$, $X, Y \in \mathcal{M}_\mathcal{L}$ и доказать, что $(\rho\mathcal{L}X, X) \ge 0$. **2.60.** Собственные значения — корни уравнения

$$\alpha\left(\frac{1}{c_1\sqrt{D_1}}\sin s_2\sqrt{\lambda}\,\cos s_1\sqrt{\lambda}+\frac{1}{c_2\sqrt{D_2}}\sin s_1\sqrt{\lambda}\,\cos s_2\sqrt{\lambda}\right)-$$
$$-\sqrt{\lambda}\sin s_1\sqrt{\lambda}\,\sin s_2\sqrt{\lambda}=0,\quad(2.87)$$

собственные функции

$$X_n(x)=\begin{cases}A_{1n}\cos s_1\sqrt{\lambda_n}\left(1+\frac{x}{l_1}\right), & x\in\Delta_1,\\ A_{2n}\cos s_2\sqrt{\lambda_n}\left(1-\frac{x}{l_2}\right), & x\in\Delta_2,\end{cases}\qquad(2.88)$$

$$A_{in}=\begin{cases}\frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{D_i}\sin s_i\sqrt{\lambda_n}}, & \sin^2 s_1\sqrt{\lambda_n}+\sin^2 s_2\sqrt{\lambda_n}\neq 0,\\ \frac{c_i}{\cos s_i\sqrt{\lambda_n}}, & \sin^2 s_1\sqrt{\lambda_n}+\sin^2 s_2\sqrt{\lambda_n}=0,\end{cases}\quad i=1,2.$$

2.61. $u(x,t)=\frac{8u_0}{\pi^2}\sum_0^\infty\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2}$.

2.62. $u(x,t)=\frac{16F_0l}{\pi^2T_0}\sum_0^\infty\frac{\sin^2\frac{(2n+1)\pi}{8}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2}$.

2.63. $u(x,t)=\frac{F_0l^2}{ES}\sum_1^\infty\frac{cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n^2\|X_n\|^2}\cos\frac{\mu_n at}{l}$, $\|X_n\|^2=\frac{l}{2}\frac{\mu_n^2+p^2+p}{\mu_n^2+p^2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{kl}{ES}$. Указание к вычислению нормы собственных функций $\|X_n\|$. Уравнение $X''+\lambda X=0$ задачи Штурма-Лиувилля заменой $\xi=x\sqrt{\lambda}$ сводится к уравнению $X''_{\xi\xi}+X=0$, поэтому $X=X(x\sqrt{\lambda})$. Так как $X'_\lambda=X'\frac{x}{2\lambda}$, где X' — производная по x, то в силу (2.12)

$$\|X_n\|^2=\frac{1}{2\lambda_n}W\,[xX'_n,X_n]\big|_0^l=$$
$$=\frac{1}{2\lambda_n}[l({X'}^2_n(l)+\lambda_nX_n^2(l))-X_n(l)X'_n(l)+X'_n(0)X_n(0)].\qquad(2.89)$$

Из уравнения $X''+\lambda X=0$ следует, что ${X'}^2+\lambda X^2=Const$, т.е.

$${X'_n}^2(0)+\lambda_nX_n^2(0)={X'}^2_n(l)+\lambda_nX_n^2(l).\qquad(2.90)$$

2.64. $u(x,t)=\frac{I}{m_0}t+\frac{2lI}{\pi am_0}\sum_1^\infty\frac{1}{n}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}$, $m_0=\rho_0S_0l$.

2.65. $u(x,t)=\frac{2E_0}{\pi}e^{-\frac{\beta t}{2}}\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left(\cos\omega_nt+\frac{\beta}{2\omega_nt}\sin\omega_nt\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$,

$i(x,t)=\frac{E_0}{lR}e^{-\beta t}-\frac{2E_0}{lL}e^{-\frac{\beta t}{2}}\sum_1^\infty\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_nt\,\cos\frac{\pi nx}{l}$,

$\beta=\frac{R}{L}$, $\omega_n^2=\left(\frac{4\pi^2L}{CR^2l^2}n^2-1\right)\frac{\beta^2}{4}$.

Указание. Задача для тока:

$i_{tt}=a^2i_{xx}-\beta i_t$, $0<x<l$, $0<t$, $a^2=\frac{1}{LC}$,

$i_x(0,t)=i_x(l,t)=0$, $i(x,0)=\frac{E_0}{lR}$, $i_t(x,0)=-\frac{E_0}{L}\delta(x)$.

2.66. $u(x,t)=\frac{lI}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\sin\frac{a\mu_n}{l}t}{\mu_n\|X\|^2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$\mu\, ctg\,\mu=\frac{\mu^2-p_1p_2}{p_1+p_2}, \tag{2.91}$$

$$X_n(x)=p_1\sin\frac{\mu_n}{l}x+\mu_n\cos\frac{\mu_n}{l}x, \tag{2.92}$$

$$\|X\|^2=\frac{l}{2}\,\frac{(\mu_n^2+p_1^2)(\mu_n^2+p_2^2)+(p_1+p_2)(\mu_n^2+p_1p_2)}{(\mu_n^2+p_2^2)}, \tag{2.93}$$

где $p_i=\frac{lk_i}{ES_0}$, $i=1,2$. Указание. Для вычисления нормы $\|X\|$ применить формулы (2.89), (2.90).

2.67. $u(x,t)=\frac{2\sqrt{2}u_0}{\pi}\sum_0^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1}e^{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2Dt}$.

2.68. $u(x,t)=2pu_0\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\cos\frac{\mu_n x}{l}e^{-\left(\beta+\frac{D\mu_n^2}{l^2}\right)t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, tg\,\mu=p$, $p=hl$. Указание. Для вычислении нормы $\|X\|$ применить формулы (2.89), (2.90).

2.69. $u(x,t)=\frac{u_0}{2}e^{-ht}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}e^{-\left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2t}\right)$.

2.70. $u(x,t)=2u_1\sum_1^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu=-p$, $p=hl$. Указание. Функция $u(x,0)=u_0(x)$ — решение задачи

$$u_0''=-u_1\delta'(x-l),\ \ 0<x<l,$$
$$u_0'(0)-hu_0(0)=0,\ \ u(l)=0.$$

2.71. $u(x,t)=\frac{Q_0l^2}{Sk}\sum_1^{\infty}\frac{cos\frac{\mu_n x_0}{l}\cos\frac{\mu_n x}{l}}{\mu_n^2\|X_n\|^2}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}$,

1) $\|X_n\|^2=\frac{l}{2}$, $\mu_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l}$; 2) $\|X_n\|^2=\frac{l}{2}\frac{\mu_n^2+p^2+p}{\mu_n^2+p^2}$, $\mu_n>0$ —корень уравнения $\mu\, tg\,\mu p$, $p=hl$.

2.72. $u(x,t)=\frac{2q_0l}{k}e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, tg\,\mu=p$, $p=hl$.

2.73. $u(x,t)=2(p+1)u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{Rl}{R_0}$, $a^2=\frac{1}{RC}$.

2.74. $u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}e^{-\frac{G}{C}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin2\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{2n+1}e^{-\left(2\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}$, $a^2=\frac{1}{RC}$.

2.75. $i(x,t)=-\frac{lE_0}{R_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_1\cos\frac{\mu_n x}{l}-\mu_n\sin\frac{\mu_n x}{l}}{\|X_n\|^2}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.91), $\|X_n\|^2$ определяется выражением (2.93), где $p_{1,2}=\frac{lR}{R_{1,2}}$.

Указание. Ток в линии $i(x,t)=-\frac{1}{R}u_x(x,t)$, $u(x,t)$ — решение задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u_x(0,t)-h_1u(0,t)=0,\ u_x(l,t)+h_2u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=0,$$

где $h_i=\frac{R}{R_i}$, $i=1,2$. Задачу для $u_0(x)$ можно поставить в двух (эквивалентных) формах (см. задачу 10.77.):

$$\begin{array}{lll} 1. & u_0''(x)=0,\ \ 0<x<l, & \\ & u_0'(0)-h_1u_0(0)=-h_1E_0, & \\ & u_0'(l)+h_2u_0(l)=0, & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 2. & u_0''(x)=-h_1E_0\delta(x), & \\ & 0<x<l, & \\ & u_0'(0)-h_1u_0(0)=0, & \\ & u_0'(l)+h_2u_0(l)=0. & \end{array} \tag{2.94}$$

Постановка 1 удобна для определения явного вида функции $u_0(x)$, а постановка 2 —для вычисления коэффициентов ряда Фурье этой функции (см. пример 2.3.)

2.76. 1. $\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t}-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_6(x)e^{-\frac{iE_6}{\hbar}t}$, $P_n=\frac{1}{2}\delta_{n2}+\frac{1}{2}\delta_{n6}$,

2. $\Psi(x,t)=\frac{3}{\sqrt{10}}\psi_4(x)e^{-\frac{iE_4}{\hbar}t}-\frac{1}{\sqrt{10}}\psi_{12}(x)e^{-\frac{iE_{12}}{\hbar}t}$, $P_n=\frac{9}{10}\delta_{n4}+\frac{1}{2}\delta_{n,12}$,

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{x}{l}\right),\qquad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{8ml^2}n^2,\ \ n\in\mathbf{N}. \tag{2.95}$$

2.77. 1) $\Psi(x,t)=\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\psi_{2n+1}(x)e^{-\frac{iE_{2n+1}}{\hbar}t}$,

$P(E=E_{2n+1})=\frac{960}{\pi^6(2n+1)^6}$, $P(E=E_{2n})=0$,

2. $\Psi(x,t)=-\frac{3\sqrt{105}}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\psi_{2n}(x)e^{-\frac{iE_{2n}}{\hbar}t}$,

$P(E=E_{2n})=\frac{945}{\pi^6n^6}$, $P(E=E_{2n+1})=0$,

где ψ_n и E_n имеют вид (2.95).

2.78. $u(x,t)=\frac{M_0lp^2}{GJ}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\cos\frac{\mu_n a}{l}t}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}$, $X_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin\frac{\mu_n x}{l}}{\sin\frac{\mu_n}{2}}, & 0<x<\frac{l}{2},\\ \frac{\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\cos\frac{\mu_n}{2}}, & \frac{l}{2}<x<l,\end{cases}$

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{2lK_0}{K}$, $a^2=\frac{GI}{K}$.

2.79. $u(x,t)=\frac{It}{m+m_0}+\frac{2lI}{ma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\frac{\mu_n a}{l}t$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{\rho_0lS}{m}$. Указание. Начальные условия представить в форме $u(x,0)=0$, $S\rho(x)u_t(x,0)=I\delta(x)$, где $\rho(x)=\rho_0+\frac{m}{S}\delta(x)$; собственные функции ортогональны с весом $\rho(x)$.

2.80. $v(t)=\frac{2m_0I}{m^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\mu_n a}{l}t}{\mu_n^2+p^2+p}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{2\rho_0l}{m}$.

2.81. $u(x,t)=2pu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}\sin\mu_n\left(1-\frac{|x|}{l}\right)\cos\frac{\mu_n at}{l}}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}$, $p=\frac{2\rho l}{m}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$. **2.82.** $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}}{(2n+1)^3}$.

2.83. $u(x,t)=I\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\sin\mu_n t}{\mu_n\|X_n\|^2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$\tfrac{1}{a_1}ctg\,\tfrac{\mu}{a_1}x_0+\tfrac{1}{a_2}ctg\,\tfrac{\mu}{a_2}(l-x_0)=0,\quad a_i=\sqrt{\tfrac{T}{\rho_i}},\ \ i=1,2,$$

собственные функции ортогональны на промежутке $[0;l]$ с весом

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0<x<x_0,\\ \rho_2, & x_0<x<l\end{cases}$$

и могут быть представлены в виде

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{\mu_n}{a_1}x}{\sin\frac{\mu_n}{a_1}x_0}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sin\frac{\mu_n}{a_2}(l-x)}{\sin\frac{\mu_n}{a_2}(l-x_0)}, & x_0<x<l,\end{cases}\qquad \|X_n\|^2=\frac{\rho_1 x_0}{2\sin^2\frac{\mu_n x_0}{a_1}}+\frac{\rho_2(l-x_0)}{2\sin^2\frac{\mu_n(l-x_0)}{a_2}}.$$

Замечание. Уравнение для собственных значений получено в результате деления уравнения $\frac{1}{a_1}\cos\frac{\mu}{a_1}x_0\sin\frac{\mu}{a_2}(l-x_0)+\frac{1}{a_2}\sin\frac{\mu}{a_1}x_0\cos\frac{\mu}{a_2}(l-x_0)=0$ на $\sin\frac{\mu x_0}{a_1}\sin\frac{\mu(l-x_0)}{a_2}$, что может привести к потере части собственных значений (следовательно, и собственных функций), а именно тех, при которых $\sin\frac{\mu x_0}{a_1}=\sin\frac{\mu(l-x_0)}{a_2}=0$; это будет, если $(\frac{l}{x_0}-1)\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$ — рациональное число (см. задачу 2.3.) Однако в данном случае соответствующие собственные функции обращаются в нуль при $x=x_0$ и не дают вклада в решение.

2.84. $i(t)=-\frac{2Q}{C_0}\sqrt{\frac{C}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n\sin\frac{\mu_n a}{l}t}{\mu_n^2+p^2+p}$, $p=\frac{Cl}{C_0}$, $\mu_n>0$ —корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$. Указание. $i(t)=C_0u_t(l,t)$, $u(x,t)$ — решение задачи

$$\rho(x)u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ 0<x<l,\ \ 0<t,\qquad \rho(x)=1+\tfrac{C_0}{C}\delta(x-l),$$
$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,\qquad a^2=\tfrac{1}{LC}.$$
$$\rho(x)u(x,0)=\tfrac{Q}{C}\delta(x)(x-l),\ \ u_t(x,0)=0,$$

2.85. $u(x,t)=2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}$, $\mu_n>0$— корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{\rho_0 S_0 CL}{C_0}$.

2.86. $u(x,t)=q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(l)X_n(x)}{\mu_n\|X_n\|^2}e^{-\mu_n^2 t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$\tfrac{k_1}{a_1}\cos\tfrac{\mu}{a_1}x_0\cos\tfrac{\mu}{a_2}(l-x_0)-\tfrac{k_2}{a_2}\sin\tfrac{\mu}{a_1}x_0\sin\tfrac{\mu}{a_2}(l-x_0)=0,$$

собственные функции определены с точностью до постоянного множителя

$$X_n=\begin{cases}A_{1n}\sin\frac{\mu_n}{a_1}x, & 0<x<x_0,\\ A_{2n}\cos\frac{\mu_n}{a_2}(l-x), & x_0<x<l,\end{cases}\qquad a_i=\sqrt{\tfrac{k_i}{C_i\rho_i}},\ \ i=1.$$

$$\begin{cases}A_{1n}=\dfrac{1}{\sin\frac{\mu_n x_0}{a_1}},\\ A_{2n}=\dfrac{1}{\cos\frac{\mu_n(l-x_0)}{a_2}},\end{cases}\qquad \text{если}\ \ \sin^2\tfrac{\mu_n x_0}{a_1}+\cos^2\tfrac{\mu_n(l-x_0)}{a_2}\neq 0,$$

$$\begin{cases}A_{1n}=\dfrac{a_1}{k_1\cos\frac{\mu_n x_0}{a_1}},\\ A_{2n}=\dfrac{a_2}{k_2\sin\frac{\mu_n(l-x_0)}{a_2}},\end{cases}\qquad \text{если}\ \ \sin^2\tfrac{\mu_n x_0}{a_1}+\cos^2\tfrac{\mu_n(l-x_0)}{a_2}=0.$$

Функции $X_n(x)$ ортогональны на промежутке $[0;l]$ с весом

$$\rho(x)C(x)=\begin{cases}\rho_1C_1, & 0<x<x_0,\\ \rho_2C_2, & x_0<x<l\end{cases}$$

$$\|X_n\|^2=\tfrac{1}{2}\left[\rho_2C_2lX_n^2(l)-x_0(\rho_2C_2-\rho_1C_1)X_n^2(x_0)+\right.$$
$$\left.+\tfrac{x_0}{\lambda_n}(k_2-k_1)X_n'(x_0{-}0)X_n'(x_0{+}0)\right].$$

Указание. Норму $\|X_n\|$ вычислить способом, изложенным в указании к задаче 2.63. **2.87.** $Q(t)=2Q_0\frac{Cl}{C_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}}{\mu_n^2+p^2+p}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{Cl}{C_0}$. **2.88.** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_ne^{-\lambda_n t}$, $\lambda_n\geq 0$ — корень уравнения (2.85), коэффициенты ряда

$$A_0=\tfrac{u_1l_1+u_2l_2}{c_1l_1+c_2l_2},\qquad A_n=\tfrac{2}{\lambda_n}\frac{\frac{D_2u_2}{c_2}X_n'(+0)-\frac{D_1u_1}{c_1}X_n'(-0)}{\frac{l_1}{c_1}X_n^2(-l_1)+\frac{l_2}{c_2}X_n^2(l_2)};\quad n\in\mathbf{N}$$

собственные функции $X_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-l_1,\,l_2)$ с весом $\rho(x)=1/c(x)$ и имеют вид (2.86), $u(x,\infty)=c(x)\frac{u_1l_1+u_2l_2}{c_1l_1+c_2l_2}$.
Указание. Для вычисления нормы $\|X_n\|$ применить способ, изложенный в указании к задаче 2.63. **2.89.** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_ne^{-\lambda_n t}$, $\lambda_n\geq 0$ — корни уравнения (2.87), коэффициенты ряда

$$A_0=\tfrac{u_1l_1+u_2l_2}{c_1l_1+c_2l_2},\qquad A_n=\tfrac{1}{\lambda_n\|X_n\|^2}\left(\tfrac{D_2u_2}{c_2}X_n'(+0)-\tfrac{D_1u_1}{c_1}X_n'(-0)\right),$$

$$\|X_n\|^2=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{l_1}{c_1}X_n^2(-l_1)+\tfrac{l_2}{c_2}X_n^2(l_2)+\tfrac{\alpha}{\lambda_n}\left(\tfrac{X_n(+0)}{c_1}-\tfrac{X_n(-0)}{c_2}\right)^2\right];\quad n\in\mathbf{N}.$$

собственные функции $X_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-l_1,\,l_2)$ с весом $\rho(x)=1/c(x)$ и имеют вид (2.88), $u(x,\infty)=c(x)\frac{u_1l_1+u_2l_2}{c_1l_1+c_2l_2}$.
Указание. Для вычисления нормы $\|X_n\|$ применить способ, изложенный в указании к задаче 2.63.

2.90 $\Psi(r,t)=\frac{3}{\sqrt{10}}\psi_3(r)e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\psi_9e^{-\frac{iE_9t}{\hbar}}$, $\psi_n(r)=\frac{2}{\sqrt{r_0}}\frac{\sin\frac{\pi nr}{r_0}}{r}$, $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}n^2$, $n\in\mathbf{N}$, $P(n{=}1){=}0$. **2.91.** $u(r,t)=\frac{2r_0u_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nr}{r_0}e^{-\left(\beta+\left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2D\right)t}$.

2.92. Если $hr_0{=}1$, то $u(r,t)=\frac{8u_0r_0}{\pi^2r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{2r_0}(2n+1)^2e^{-\left(\beta+\left(\frac{(2n+1)\pi}{2r_0}\right)^2D\right)}}{(2n+1)^2}$.
Если $hr_0\neq 1$, то

$u(r,t)=\frac{2hr_0^2u_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\frac{\mu_nr}{r_0}e^{-\left(\beta+\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2D\right)t}$, $\mu_n{>}0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu{=}-p$, $p{=}hr_0{-}1$.

2.93. 1) $u(r,t)=\frac{8r_0u_0}{\pi^3r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{r_0}}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{r_0}\right)^2t}$;

2) $u(r,t)=\frac{12r_0u_0}{\pi^3r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\frac{\pi nr}{r_0}e^{-\left(\frac{\pi an}{r_0}\right)^2t}$.

2.94. Если $hr_0{=}1$, то

$u(r,t)=\frac{16u_0r_0}{\pi^4 r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[\,12+(2n+1)^2\pi^2]\sin\frac{(2n+1)\pi r}{2r_0}}{(2n+1)^4}e^{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2r_0}\right)^2 t}$.

Если $hr_0\neq 1$, то

$u(r,t)=\frac{4r_0u_0}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\mu_n^2+3hr_0)\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2-p)}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=hr_0-1$.

2.95. 1) $u(r,t)=\frac{2u_0}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r_1+(-1)^{n+1}r_2}{n}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}e^{-\left(\frac{\pi an}{r_2-r_1}\right)^2 t}$;

2) $u(r,t)=\frac{4u_0(r_2-r_1)^2}{\pi^3 r_1r_2r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2(-1)^n+1]\,[r_1-(-1)^n r_2]}{n^3}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}e^{-\left(\frac{\pi an}{r_2-r_1}\right)^2 t}$.

2.96. $u(r,t)=\frac{2pr_1u_0}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2-p)}\sin\mu_n\frac{r-r_1}{r_2-r_1}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_2-r_1}\right)^2 t}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=p$, $p=1-\frac{r_1}{r_2}$.

2.97. $u(r,t)=\frac{21A}{74}+2A\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16\mu_n^2+1}{\mu_n^3(144\mu_n^2+37)}\left(1+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{9\mu_n^2+1}{16\mu_n^2+1}}\right)R_n(r)e^{(a\mu_n)^2 t}$,

$R_n(r)=\frac{1}{r}(\sin\mu_n(r-3)+3\mu_n\cos\mu_n(r-3))$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+12\mu^2)\sin\mu$. Указание. См. задачу 2.13 п.4.

2.98. $u(x,t)=\frac{2l_0u_0}{\pi(l_0-x)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{l_0}e^{-\left(\frac{\pi an}{l_0}\right)^2 t}$.

2.99. $u(x,t)=\frac{2l_0u_0}{\pi(l_0-x)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t}$.

2.100. $u(r,t)=\frac{9Q}{56\pi D}+\frac{Q}{2\pi D}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^3(4\mu_n^2+7)}\left(1+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\mu_n^2+1}{4\mu_n^2+1}}\right)R_n(r)e^{(a\mu_n)^2 t}$,

$R_n(r)=\frac{1}{r}(\sin\mu_n(r-1)+\mu_n\cos\mu_n(r-1))$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+2\mu^2)\sin\mu$. Указание. См. задачу 2.13 п.4.

2.101. 1) $u(r,t)=\frac{8A(r_2-r_1)^2}{\pi^3 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)(r-r_1)}{r_2-r_1}}{(2n+1)^3}\cos\frac{\pi a(2n+1)(r-r_1)}{r_2-r_1}$;

2) $u(r,t)=\frac{4A(r_2-r_1)^2}{\pi^4 ar}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)(r_1-(-1)^n)}{n^4}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}\cos\frac{a\pi(r-r_1)}{r_2-r_1}t$.

2.102. $u(r,t)=\frac{4A(r_2-r_1)^3}{ar}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n^4(\mu_n^2+p^2-p)}\left(1+\frac{(-1)np}{\sqrt{m_n^2+p^2}}\right)\sin\frac{\mu_n(r-r_1)}{r_2-r_1}\sin\frac{a\mu_n(r-r_1)}{r_2-r_1}t$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=p\sin\mu$, $p=1-\frac{r_1}{r_2}$.

2.103. $u(x,t)=-\frac{2(l_0-l)I}{\rho_0 aS_2(l_0-x)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2+p^2+p}\sin\frac{\mu_n x}{l}\sin\frac{\mu_n at}{l}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{l}{l_0-l}$, $l_0=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}l$.

2.104. $u(x,y)=\frac{4u_1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi x}{l_2}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l_2}}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi l_1}{l_2}}+\frac{4u_2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi y}{l_1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l_1}}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi l_2}{l_1}}$.

Указание. Решение представить в виде суммы $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$, где $u_1(x,y)$ удовлетворяет однородным граничным условиям при $y=0$ и $y=l_2$, а $u_2(x,y)$ — однородным граничным условиям при $x=0$ и $x=l_1$.

2.105. $u(x,y)=\frac{12u_0}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}ch\frac{\pi n(l_1-x)}{l_2}\sin\frac{\pi ny}{l_2}}{n^3ch\frac{\pi nl_1}{l_2}}$.

2.106. 1) $u(x,y)=\frac{q_0l}{2\pi k}\sin\frac{2\pi y}{l}e^{-\frac{2\pi x}{l}}$;

2) $u(x,y)=\frac{8q_0l}{\pi^2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l}}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}$.

2.107. $u(x,y,z)=C-\frac{I}{\sigma l_1l_2}\left(\frac{z}{4}+\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi mx}{l_1}\cos\frac{\pi ny}{l_2}sh\sqrt{\lambda_{mn}}z}{\sqrt{\lambda_{mn}}ch\sqrt{\lambda_{mn}}l_3}\right)$, $\lambda_{mn}=\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}$.

2.108. 1) $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{2}(1+\frac{r^3}{r_0^2}\cos2\varphi$ 2) $u(r,\varphi)=\frac{u_0r}{4r_0}(3\sin\varphi-\frac{r^2}{r_0^2})$.

2.109. 1) $\mathbf{A}(r)=A(r)\,\mathbf{e}_\varphi$, $A(r)=\begin{cases}\frac{2J}{c}ln\frac{1}{r_0}+C, & 0\le r\le r_0,\\ \frac{2J}{c}ln\frac{1}{r}+C, & r_0\le r;\end{cases}$

2) $\mathbf{A}(r,\varphi)=A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi$,

$A(r)=\begin{cases}C-\frac{2\pi i_0}{c}ln\frac{1}{r_0}+\frac{\pi\,i_0r^2\cos2\varphi}{2r_0^2}, & 0\le r\le r_0,\\ C-\frac{2\pi i_0r_0}{c}ln\frac{1}{r}+\frac{\pi i_0r_0^2\cos2\varphi}{2r^2}, & r_0\le r.\end{cases}$

Указание. См. задачу 1.320.

2.110. $\mathbf{A}(r)=A(r)\,\mathbf{e}_\varphi$, $A(r)=\begin{cases}\frac{2i_0r}{c}, & 0\le r\le r_0,\\ \frac{2i_0r_0^2}{cr}, & r_0\le r.\end{cases}$

Указание. См. задачу 1.322. **2.111.** $\sigma(\varphi)=\frac{E_0}{2\pi}\cos\varphi$.

2.112. $P=P_0+\frac{\rho_0V^2(t)}{2}(4\cos^2\varphi-3)+\rho_0r_0\frac{dV(t)}{dt}\cos\varphi$.

2.113. $\mathbf{V}=\nabla u$, $u(r,\varphi)=-\frac{V_0r_0^2}{r}\sin\varphi+C$, $\mathbf{V}|_S=-\frac{V_0r_0^2}{r^2}\mathbf{e}_e$, ось $0y$ направлена по ускорению свободного падения $\mathbf{g}$. Указание. Продолжить функцию $u(r,\varphi)$ так, чтобы получить для нее внешнюю задачу Неймана для круга. **2.114.** $u(r,\varphi)=\frac{q_0}{\pi kh}\left(1+\frac{\pi h\,\cos\varphi}{2(1+hr_0)}-2hr_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}\cos2n\varphi}{(4n^2-1)(2n+hr_0)}\right)$.

2.115. $\mathbf{E}=\frac{2\mathbf{E}_0}{\varepsilon+1}$, $\mathbf{P}=\frac{(\varepsilon-1)r_0^2\mathbf{E}}{2(\varepsilon+1)}$. **2.116.** $\mathbf{H}=\frac{4\mu\mathbf{H}_0}{(\mu+1)^2-(\mu-1)^2\frac{r_1^2}{r_2^2}}$, $\mathbf{M}=\frac{\mathbf{H}_0}{2}\frac{(\mu^2-1)(r_2^2-r_1^2)}{(\mu+1)^2-(\mu-1)^2\frac{r_1^2}{r_2^2}}$.

2.117. 1) $\mathbf{A}(r)=A(r)\,\mathbf{e}_z$, $A(r)=\frac{4\pi r_0i_0}{c}\begin{cases}\ln\frac{1}{r_0}+C, & r<r_0,\\ \ln\frac{1}{r}+C, & r_0<r;\end{cases}$

2) $\mathbf{A}(r,\varphi)=A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, $A(r,\varphi)=\frac{4\pi i_0}{c}\begin{cases}r\sin\varphi+C, & r<r_0,\\ \frac{r_0^2}{r}\sin\varphi+C, & r_0<r.\end{cases}$

2.118. 1) $\mathbf{A}=A(r)\,\mathbf{e}_z$, $A(r)=\frac{4\pi r_0i_0}{c}\begin{cases}\ln\frac{1}{r_0}+C, & r<r_0,\\ \ln\frac{1}{r}+C, & r_0<r.\end{cases}$

2) $\mathbf{A}=A(r,\varphi)\,\mathbf{e}_z$, $A(r,\varphi)=\frac{2\pi i_0}{c}\begin{cases}r\sin\varphi+C, & r<r_0,\\ \frac{r_0^2}{r}\sin\varphi+C, & r_0<r.\end{cases}$

2.119. $u(r,\varphi)=u_0+\frac{q_0r_2}{2k}\frac{r_1^2r_2^2}{r_1^4+r_2^4}\left(\frac{r^2}{r_1^2}-\frac{r_1^2}{r^2}\right)\cos2\varphi$.

2.120. $u(r,\varphi)=\frac{u_0 r_1 r_2}{r_1^2+r_2^2+p(r_2^2-r_1^2)}\left[(1-p)\frac{r}{r_2}+(1+p)\frac{r_2}{r}\right]\sin\varphi,\quad p=hr_2.$

2.121. $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{2}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}\cos\frac{2\pi\varphi}{\alpha}\right].$

2.122. $u(r,\varphi)=\frac{u_0 r_1^{\frac{2\pi}{\alpha}} r_2^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{r_2^{\frac{4\pi}{\alpha}}-r_1^{\frac{4\pi}{\alpha}}}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}\right]\cos\frac{2\pi\varphi}{\alpha}.$

2.123. $u(\varphi,z)=\frac{I}{\pi\sigma h}\left(\frac{z}{2r_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{nz}{r_0}\cos n\varphi}{n\,ch\frac{nl}{r_0}}\right)$, $\mathbf{i}(\varphi,z)$ имеет вид (1.165).

2.124. $u(r,\varphi)=C-\frac{I}{2\pi\sigma h}\left(\frac{z}{r_0}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ch\frac{(2n+1)z}{r_0}\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)\,sh\frac{(2n+1)l}{r_0}}\right)-$

$-\frac{I}{2\pi\sigma h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{2nz}{r_0}\,cos2n\varphi}{n\,ch\frac{2nl}{r_0}}$, плотность тока имеет вид (1.165).

2.125. $i(z,\varphi)=\frac{J(sh\frac{z}{r_0}\mathbf{e}_z+\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi)}{ch\frac{z}{r_0}-\cos\varphi}$. **2.126.** $\mathbf{i}(\varphi,z)=\frac{J}{\pi h r_0}\frac{sh\frac{2z}{r_0}\cdot\mathbf{e}_z-\sin 2\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi}{ch\frac{2z}{r_0}+\cos 2\varphi}$.

2.127. $u(\theta,\varphi)=C+\frac{I}{4\pi\sigma}\ln\left(\csc^2\frac{\theta}{2}-2ctg\frac{\theta}{2}\cos\varphi\right)$, плотность тока определяется формулой (1.166). Указание. Задачу для потенциала

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\frac{J}{\sigma}\left[\frac{\delta(\theta)}{2\pi\sin\theta}-\frac{\delta(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta}\cdot\delta(\varphi)\right],$$
$$0<\theta<\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$
$$|u(\pi,\varphi)|<\infty$$

свести с помощью замены $r=tg\frac{\theta}{2}$ и формулы (10.13) к следующей задаче:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\frac{J}{\sigma}[\delta(\mathbf{r})-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)],\quad 0<r,\ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$|u(\infty,\varphi)|<\infty,$$

где $\mathbf{r}_1$ — точка с координатами r_1=1, φ_1=0, и воспользоваться соотношением (10.16). **2.128.** $\psi_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$, $E_n=\frac{\hbar^2}{2I}n^2$, $n\in\mathbf{Z}$; при $n\ne 0$ собственные значения оператора энергии имеют кратность 2.

2.129. $\psi_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$, $E_n=\frac{\hbar^2 n^2}{2I}-\frac{e\hbar H_0}{2mc}n$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Магнитный момент μ и момент количества движения $\mathcal{L}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ ротатора связаны соотношением $\mu=\frac{e}{2mc}\mathcal{L}$, потенциальная энергия ротатора равна $-(\mu\mathbf{H}_0)$.

2.130. 1) $\Psi(\varphi,t)=\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0(\varphi)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\psi_2(\varphi)+\psi_{-2}(\varphi))\,e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$,

$P(E{=}0){=}\frac{2}{3}$, $P(E{=}E_2){=}\frac{1}{3}$, $P(E{=}E_n){=}0$, если $n\ne 0$, $n\ne 2$.

2) $\Psi(\varphi,t)=\sqrt{\frac{2}{7}}\psi_0(\varphi)-\left(\frac{1-2i}{\sqrt{14}}\psi_2(\varphi)+\frac{1+2i}{\sqrt{14}}\psi_{-2}(\varphi)\right)e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$,

$P(E{=}0){=}\frac{2}{7}$, $P(E{=}E_2){=}\frac{5}{7}$, $P(E{=}E_n)=0$, если $n\ne 0$, $n\ne 2$.

$\psi_n(\varphi)$ и E_n даны в ответе к задаче (2.128).

2.131. 1) $P(M_z{=}m\hbar)=P(M_z{=}{-}m\hbar)=\frac{1}{2}\delta_{mn}$;

2) $P(M_z{=}(n{-}2k)\hbar)=\frac{(n!C_n^k)^2}{(2n)!}$, $k=0,1,2,\ldots,n$,

в остальных случаях вероятность равна нулю. Указание. Оператор энергии

и оператор M_z коммутируют, поэтому проекция на ось 0z момента количества движения ротатора не зависит от времени и равна

$$P(M_z{=}m\hbar)=|a_m|^2,\ \ a_m=(\Psi(\varphi,0),\psi(\varphi))=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi,0)\,e^{-im\varphi}\,d\varphi.$$

2.132. $\Psi(\varphi,t)=\frac{-3i}{2\sqrt{5}}\psi_1(\varphi)\,e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}+\frac{3i}{2\sqrt{5}}\psi_{-1}(\varphi)\,e^{-\frac{iE_{-1}t}{\hbar}}+$
$+\frac{i}{2\sqrt{5}}\psi_3(\varphi)\,e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}}-\frac{i}{2\sqrt{5}}\psi_{-3}(\varphi)e^{-\frac{iE_{-3}t}{\hbar}}$,
$P(E{=}E_{\pm1})=\frac{9}{20}$, $P(E{=}E_{\pm3})=\frac{1}{20}$, $P(M_z{=}\pm\hbar)=\frac{9}{20}$, $P(M_z{=}\pm3\hbar)=\frac{1}{20}$, в остальных случаях $P=0$; собственные функции $\psi_n(\varphi)$ и собственные значения E_n оператора Гамильтона определены в ответе к задаче (2.128.)

2.133. $u(x,y,t)=\frac{8lI}{a\rho_0\pi^3}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha_m+\alpha_n}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l}\sin\omega_{mn}t}{(2m+1)(2n+1)\sqrt{(2m+1)^2+(2n+1)^2}}$,
$\omega_{mn}=\frac{\pi a}{l}\sqrt{(2m+1)^2+(2n+1)^2}$, $\alpha_k=\left[\frac{k}{2}\right]$.

2.134. $u(x,y,t)=\frac{8F_0}{\pi^3l_1l_2T_0}\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2l_1}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l_2}\cos\omega_{mn}t}{(2m+1)(2n+1)\sqrt{\left(\frac{2n+1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{l_2}\right)^2}}$,
$\frac{\omega_{mn}}{\pi a}=\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2l_1}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{2l_2}\right)^2}$.

2.135. $u(x,y,t)=\frac{64u_0}{\pi^6}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l_2}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}e^{-a^2\lambda_{mn}t}$,
$\lambda_{mn}=\pi^2\left[\left(\frac{2m+1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{l_2}\right)^2\right]$.

2.136. $u(x,y,t)=\frac{8q_0}{\pi kl_2}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2l_2}}{(2m+1)\alpha_{mn}}e^{-a^2\alpha_{mn}t}$,
$\alpha_{mn}=\pi^2\left[\left(\frac{(2m+1)}{l_1}\right)^2+\left(\frac{(2n+1)}{2l_2}\right)^2\right]$.

2.137. $u(x,y,z,t)=\frac{32u_0}{\pi^3}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l}\sin\frac{\pi kz}{l}}{(2m+1)(2n+1)][(2m+1)^2+(2n+1)^2+k^2]}e^{-a^2\alpha_{mnk}t}$,
$\alpha_{mnk}=\frac{\pi^2}{l^2}[(2m+1)^2+(2n+1)^2+k^2]$.

2.138. $u(l,t)=\frac{4l^3F_0}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^4}\cos\frac{a\mu_n^2t}{l^2}$, μ_n — положительный корень уравнения $\cos\mu\,ch\,\mu{=}{-}1$. Решение. Функция $u(x,t)$ — решение задачи

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\ \ x\in\Delta=(x:0<x<l),\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0,\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=0,$$

где $u_0(x)$ — решение стационарной задачи

$$JE\tfrac{d^4u_0(x)}{dx^4}=F_0\delta(x-l),\ \ 0<x<l,$$
$$u_0(0)=u_0'(0)=u_0''(l)=u_0'''(l)=0.$$

Пусть $u(x,t)=X(x)T(t)$; из тождества

$$\frac{T''}{a^2T}+\frac{X''''}{X}=0$$

следует, что $T(t)$ удовлетворяет уравнению $T'' + a^2\lambda T = 0$, а $X(x)$ — решение задачи на собственные значения

$$X'''' - \lambda X = 0, \quad x \in \Delta = (0; l),$$
$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0,$$

которую можно записать в виде $\mathcal{L} = \lambda X$, $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, где $\mathcal{L} = \frac{d^4}{dx^4}$, а $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ — множество функций класса $C^4(\Delta) \cap C^2(0{\le}x{<}l) \cap C^3(0{<}x{\le}l)$, удовлетворяющих граничным условиям. Общее решение уравнения

$$X(x) = sh\sqrt[4]{\lambda}\,x + Bch\sqrt[4]{\lambda}\,x + C\sin\sqrt[4]{\lambda}\,x + D\cos\sqrt[4]{\lambda}\,x$$

является собственной функцией, если $X(x) \not\equiv 0$ и выполняются граничные условия, т.е.

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ A + C = 0, \\ Ash\,\mu + Bch\,\mu - C\sin\mu - D\cos\mu = 0, \\ Ach\,\mu + Bsh\,\mu - C\cos\mu + D\sin\mu = 0, \end{cases}$$

где $\mu = \sqrt[4]{\lambda}l$. Если определитель системы $-2(ch\,\mu\cos\mu + 1)$ равен нулю, то система имеет нетривиальное решение

$$A = -C = c(ch\,\mu + \cos\mu), \quad B = -D = -c(sh\,\mu + \sin\mu).$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_n = \mu_n^2/l^2$, где $\mu_n{>}0$ — корень уравнения $ch\,\mu\cos\mu{=}{-}1$, соответствует собственная функция

$$X_n = (ch\,\mu_n + \cos\mu_n)(sh\tfrac{\mu_n x}{l} - \sin\tfrac{\mu_n x}{l}) - (sh\,\mu_n + \sin\mu_n)(ch\tfrac{\mu_n x}{l} - \cos\tfrac{\mu_n x}{l}),$$

где $n \in \mathbf{N}$. Поскольку для любой функции $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$

$$(\mathcal{L}X, X) = \int_0^l X''''X\,dx\ (X'''X - X''X')\big|_0^l + \int_0^l (X'')^2 dx = \int_0^l (X'')^2 dx \ge 0,$$

то оператор $\mathcal{L}$ положителен, следовательно, эрмитов. Поэтому собственные значения λ_n неотрицательны, а соответствующие собственные функции X_n ортогональны на промежутке Δ. Для вычисления нормы можно применить способ, изложенный в указании к задаче 2.63. Из уравнений

$$X'''' - \lambda X = 0,$$
$$X_1'''' - \lambda_1 X_1 = 0$$

вытекает тождество

$$\tfrac{d}{dx}(X_1'''X - X_1X''' - X_1''X' + X_1'X'') = (\lambda_1 - \lambda)XX_1,$$

интегрирование которого приводит к формуле

$$\|X\|^2 = \lim_{\lambda\to\lambda_1} \tfrac{(X_1'''X - X_1X''' - X_1''X' + X_1'X'')\big|_0^l}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Так как $X = X(\sqrt[4]{\lambda}\,x)$, то

$$\|X_n\|^2 = \tfrac{1}{4\lambda}\left[x(\lambda X^2 - 2X'X''' + (X'')^2) + 3XX''' - X'X''\right]\Big|_0^l.$$

В данном случае $\|X_n\|^2 = \frac{l}{4}X_n^2(l)$. Решение задачи представляет собой ряд по собственным функциям

$$u(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\mu_n^2 t}{l^2} + B_n\cos\frac{a\mu_n^2 t}{l^2}\right)X_n(x).$$

При $t=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = u_0(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\mu_n^2 a}{l^2} X_n(x) = 0.$$

Отсюда

$$B_n = 0, \quad A_n = \frac{(u_0, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\lambda_n}\frac{(u_0, \mathcal{L}X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\lambda_n}\frac{(\mathcal{L}u_0, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{4l^3 F_0}{EJ\mu_n^4 X_n(l)}.$$

Окончательный вид решения

$$u(x,t) = \frac{4l^3 F_0}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{\mu_n^4 X_n(l)}\cos\frac{a\mu_n^2 t}{l^2}.$$

2.139. $u(x,t) = \frac{2M_0 l^2}{\pi^4 JE}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{l^2}}{(2n+1)^4}$.

2.140. $u(x,t) = \frac{16Fl^3}{\pi^4 JE}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l^2}}{(2n+1)^4}$.

2.141. $u(x,t) = \frac{Il^2}{m_0 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ch\,2\mu_n}{\mu_n^4 sh^4\mu_n}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $tg\,\mu = th\,\mu$, $X_n(x) = sh\,\mu_n \sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right) - \sin\mu_n sh\,\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)$, $m_0 = \rho_0 S_0 l$.

2.142. $u(x,t) = \frac{M_0 l^3}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n'(x_0)X_n(x)\cos\frac{\mu_n^2 at}{l^2}}{\mu_n^4 sh^2\mu_n \sin^2\mu_n}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $tg\,\mu = th\,\mu$, $X_n(x) = sh\,\mu_n \sin\frac{\mu_n x}{l} - \sin\mu_n sh\frac{\mu_n x}{l}$.

2.143. $u(x,t) = -\frac{8M_0 l^2}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\,\mu_n \sin\mu_n X_n(x)\cos\frac{\mu_n^2 at}{l^2}}{\mu_n^3(sh\,\mu_n + \sin\mu_n)^2}$, μ_n и $X_n(x)$ даны в ответе к задаче 2.138. **2.144.** $u(x,t) = \frac{4f_0 l^2}{\pi^2 T}\left(1-\cos\frac{\pi at}{2l}\right)\cos\frac{\pi x}{2l}$.

2.145. $u(x,t) = \frac{g(l^2-x^2)}{2a^2} + \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^3}$.

2.146. $u(x,t) = \frac{m_0 gl}{4T}\left(1 - \frac{x^2}{l^2} + \frac{2}{p}\left(1-\frac{|x|}{l}\right) - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n^2+p^2)\sin\mu_n\left(1-\frac{|x|}{l}\right)\cos\omega_n t}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2+p)}\right)$,
$\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu = p$, $p = m_0/m$, $m_0 = 2\rho_0 l$.

2.147. $u(x,t) = \frac{F_0 l}{2T}\left(1 - \frac{|x|}{l} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2}\right)$.

2.148. $u(x,t) = \frac{F_0 l}{2T}\left(1 - \frac{|x|}{l} + 2p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{|x|}{l}\right)\cos\frac{\mu_n at}{l}\right)$,
$\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu = p$, $p = m_0/m$, m_0 — масса струны.

2.149. 1) $u(x,t) = v_0 t - \frac{8v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2}$;

2) $u(x,t) = \frac{w_0}{2a^2}(x^2 + a^2t^2 - 2xl) + \frac{16w_0 l^2}{a^2 pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^3}$.

2.150. 1) $u(x,t) = \frac{v_0}{2l}\left(x^2 + a^2t^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{v_0 l}{pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nat}{l}}{n^2}$;

2) $u(x,t) = \frac{w_0 t}{2l}\left(x^2 + \frac{a^2t^2}{3} - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{2w_0 l^2}{api^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}}{n^3}$.

2.151. $u(x,t) = E_0\left(1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\omega_n t + \frac{\beta}{\omega_n}\sin\omega_n t)\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}\right)$,
$\beta = \frac{R}{2L}$; $a^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 + \beta^2}$.

2.152. $u(x,t)=E_0\left(1-\frac{p}{p+1}\frac{x}{l}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\frac{\mu_n x}{l}\cos\frac{\mu_n at}{l}\right)$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{lL}{L_0}$, $a^2=\frac{1}{LC}$.

2.153. $u(x,t)=\frac{2Ql}{\pi^2\rho_0 S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}}{n^2}+g(x)$,

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{Q}{\rho_0 S}\left(1-\frac{x_0}{l}\right)x, & 0\le x\le x_0,\\ -\frac{Q}{\rho_0 S}\left(1-\frac{x}{l}\right)x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

2.154. $u(x,t)=\frac{P_0-P_1}{\gamma P_0}l\left(\frac{1}{p+1}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\mu_n at}{l}}{\mu_n^2+p^2+p}\right)$, $p=\frac{kl}{\gamma P_0 S}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $p\,tg\,\mu=-\mu$. **2.155.** $u(x,t)=V_0\left(\frac{x}{l}+\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi nx}{l}}{n}e^{-\frac{\pi^2n^2\nu}{l^2}t}\right)$.

2.156. $u(x,t)=\frac{f_0}{a^2}\left(x^2+a^2t^2-\frac{l^2}{3}\right)+\frac{1}{2a^2l}\int_0^l(l-\xi)^2f(\xi)\,d\xi-$

$$-\frac{1}{a^2}\int_0^x(x-\xi)f(\xi)\,d\xi-\frac{l^2}{\pi^2a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nat}{l}}{n^2},$$

f_n — коэффициент ряда $f(x)=\sum_0^{\infty}f_n\cos\frac{\pi nx}{l}$.

2.157. $u(x,t)=\frac{Ae^{-\alpha x}}{\alpha a^2}\left(\frac{x}{l}-\frac{e^{\alpha x}-1}{e^{\alpha l}-1}\right)-$

$$-\frac{2\pi Ae^{-\frac{\alpha x}{2}}}{a^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(1+(-1)^{n+1}e^{-\frac{\alpha l}{2}}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\cos a\sqrt{\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}}t}{\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2}.$$

2.158. $u(x,t)=\frac{A}{\alpha^2a^2}[(\alpha l+1)(e^{\alpha x}-1)-\alpha xe^{\alpha x}]-$

$$-\frac{2Al^3e^{\frac{\alpha x}{2}}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n\left(\sqrt{\mu_n^2+p^2}+(-1)^{n+1}2pe^{\frac{\alpha l}{2}}\right)\sin\frac{\mu_n x}{l}\sin\frac{a\sqrt{\mu^2+p^2}t}{l}}{(\mu^2+p^2+p)\,(\mu^2+p^2)^2},$$

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{\alpha l}{2}$.

2.159. $u(x,t)=\frac{A}{\alpha(e^{\alpha l}-1)}\left[\alpha x+e^{-\alpha x}+\alpha^2a^2t+\frac{(\alpha l-1)e^{\alpha l}+\alpha l+1}{e^{\alpha l}-1}\right]+$

$$+\frac{2\pi Ae^{\frac{\alpha(l-x)}{2}}}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\left(\frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}+\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi nx}{l}\right)e^{-a\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)t}}{\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2}.$$

2.160. $u(r,t)=\frac{3Ar_0t^2}{8}+\frac{Ar^2}{4a^2}\left(\frac{r_0}{2}-\frac{r}{3}\right)-\frac{Ar_0^3}{90a^2}-$

$$-\frac{2Ar_0^4}{a^2r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n(2+\mu_n^2)-2\sqrt{1+\mu_n^2}\right]\sqrt{1+\mu_n^2}}{\mu_n^7}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\cos\frac{\mu_n at}{r_0}.$$

2.161. $u(r,t)=\frac{3Ar_0^2t^2}{10}-\frac{Ar^4}{10a^2}\left(\frac{r^2}{2}-r_0^2\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}\sin\frac{\pi nr}{r_0}\cos\frac{\pi nat}{r_0}}{\mu_n^5}$.

2.162. 1) $u(x,t)=\frac{Q_0l^2}{k\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}\cdot\left(1-e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\right)$;

2) $u(x,t)=\frac{Q_0l^2}{k\pi^2}\left[\frac{2\pi a^2}{l^2}t+\frac{\pi^2-12}{6\pi}-\pi\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi x}{l}}{n^2(4n^2-1)}e^{-\left(\frac{2n\pi a}{l}\right)^2t}\right].$$

2.163. $u(x,t)=\frac{lR}{R_0}E_0\left(\frac{1-\frac{x}{l}}{1+\frac{RL}{R_0}}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}\right)$, $p=\frac{Rl}{R_0}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu=-p$.

2.164. $u(x,t)=\frac{L_2E_0}{L_1+L_2+lL}\left[1+\frac{lL}{L_2}\left(1-\frac{x}{l}\right]-\frac{l^2LE_0}{L_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\cos\frac{a\mu_n}{l}t}{\mu_n\|X\|^2}\right]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.91), $X_n(x)$ и $\|X\|^2$ имеют вид (2.92) и (2.93) соответственно, где $p_i=lL/L_i$, $i=1,2$.
Указание. Выделить стационарное решение, полагая $u(x,t)=u_0(x)+v(x,t)$; задачу для $u_0(x)$ поставить в виде (2.94), где $h_i=\frac{L}{L_i}$, $i=1,2$.

2.165. $u(x,t)=\frac{k\alpha_2\tau_0}{k(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2 l}\left(1+\frac{\alpha_1}{k}x\right)+\frac{\alpha_2\tau_0l^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2t}}{\mu_n\|X\|^2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.91),

$$X_n(x)=p_2\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)+\mu_n\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right), \tag{2.96}$$

$$\|X\|^2=\frac{l}{2}\,\frac{(\mu_n^2+p_1^2)(\mu_n^2+p_2^2)+(p_1+p_2)(\mu_n^2+p_1p_2)}{\mu_n^2+p_1^2}, \tag{2.97}$$

$p_i=\frac{\alpha_i}{k}$, $i=1,2$. Указание. См. предыдущую задачу. Для вычисления квадрата нормы собственных функций применить формулу (2.89).

2.166. $u(x,t)=\frac{f_0}{12a^2}(3x^2-l^2+6a^2t)+\frac{1}{2a^2l}\int_0^l f(\eta)(l-\eta)^2\,d\eta-\frac{1}{a^2}\int_0^x f(\xi)(x-\xi)\,d\xi-$
$-\frac{l^2}{\pi^2a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\cos\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}}{n^2}$, f_n — коэффициент ряда $f(x)=\sum_0^{\infty}f_n\cos\frac{\pi nx}{l}$.

2.167. $u(x,t)=\frac{A}{\alpha(1-e^{\alpha l})}(\alpha x-e^{\alpha x}+\alpha l+1-\alpha^2a^2t)+$
$+\frac{\pi\alpha A}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nX_n(x)}{\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{\alpha^2}{4}\right]}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)t}$, $X_n(x)=e^{\frac{\alpha x}{2}}(\sin\frac{\pi nx}{l}-\frac{2\pi n}{\alpha l}\cos\frac{\pi nx}{l})$.

2.168. $u(x,t)=\frac{A}{\alpha^2a^2}\left[(\alpha x+1)e^{-\alpha x}+\frac{\alpha le^{-\alpha l}}{1-e^{-\alpha l}}(\alpha x+e^{-\alpha x})\right]-\frac{lAe^{-\alpha l}}{\alpha a^2(1-e^{-\alpha l})^2}-$
$-\frac{4\pi Al^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-(-1)^ne^{-\alpha l})X_n(x)e^{-a^2\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)t}}{\left(\pi^2n^2+\frac{\alpha^2l^2}{4}\right)^3}$,
где собственные функции $X_n(x)=e^{-\frac{\alpha x}{2}}(\sin\frac{\pi nx}{l}-\frac{2\pi n}{\alpha l}\cos\frac{\pi nx}{l})$.

2.169. $Q=-\frac{kS_0}{\mu l}(P_0-P_1)\left[\frac{hl}{1+hl}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n^2+h^2l^2}{\gamma_n^2+h^2l^2+hl}e^{-\left(\frac{\gamma_na}{l}\right)^2t}\right]$, где $\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma\,ctg\,\gamma=-hl$.

2.170. $P^2(x,t)=P_1^2+\frac{4(P_0^2-P_1^2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}}{2n+1}e^{-\left[\frac{\pi a(2n+1)}{2l}\right]^2t}$, $a^2=\frac{kP_0}{\mu m}$.

2.171. $\mathbf{q}=\frac{k(P_1^2-P_2^2)}{2\mu lRT}\mathbf{e}_x$. **2.172.** $\zeta(x)=\left(H^2+\frac{2\mu q}{k\rho g}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.173. $t_0=\frac{mL_0[\mu_1k_2L_0+\mu_2k_1(2l-L_0)]}{2k_1k_2(P_2-P_1)}$, $L(t)=\left[1-\frac{2k_1(P_2-P_1)}{\mu_1mL_0^2}t\right]^{\frac{1}{2}}$.

2.174. $u(x,t)=u_0\left[1+\frac{2(p+1)l}{l-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\frac{\mu_na}{l}\right)^2t}\right]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=hl-1$.

2.175. $u(x,t)=\frac{Q_0l^2}{k}\left[\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)-\frac{2l}{\pi^3(l-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n^3}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\right]$.

2.176. $u(x,t)=\frac{l^2l_0^2F_0}{E_0S_0(l_0-l)(l_0-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\cos\frac{\mu_n at}{l}}{\mu_n\|X_n\|^2}$, μ_n — корень уравнения (2.91), собственные функции X_n и квадрат их нормы $\|X_n\|^2$ определены формулами (2.96) и (2.97) соответственно, где $p_i=lh_i$, $i=1,2$, $h_1=\frac{l_0h-1}{l_0}$, $h_2{=}\frac{1}{l_0-l}$, $h{=}\frac{k}{E_0S_0}$. Указание. Функция $u(x,t)$ — решение задачи

$$u_{tt}=-a^2\mathcal{L}u,\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=0,$$

где $\mathcal{L}{=}-\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}(l_0{-}x)^2\frac{\partial}{\partial x}$, $\rho(x){=}(l_0{-}x)^2$, $a^2{=}\frac{E_0}{\rho_0}$, а $u_0(x)$ — решение стационарной задачи, которую можно поставить в двух (эквивалентных) формах (см. задачу 10.76.):

1) $\mathcal{L}u_0(x)=0,\quad 0<x<l$
$u_0'(0)-hu_0(0)=0,\ u'(l)=\frac{F_0}{E_0S_l}$,

2) $\rho(x)\mathcal{L}u_0(x)=\frac{L_0^2F_0}{E_0S_0}\delta(x-l),\quad 0<x<l,$
$u_0'(0)-hu_0(0)=0,\ u'(l)=0$

Задача на собственные значения

$$\mathcal{L}v(x)=\lambda v(x),\quad 0<x<l,$$
$$v_0'(0)-hv_0=0,\ \ v'(l)=0$$

заменой $v(x)=X(x)/(l_0-x)$ сводится к

$$X''+\lambda X=0,\quad 0<x<l,$$
$$X'(0)-h_1X(0)=0,\ \ X'(l)-h_2X(l)=0.$$

Собственные функции $v_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[0;\,l]$, при этом $\|v_n\|^2{=}\int_0^l v_n^2\rho\,dx{=}\int_0^l X_n^2\,dx{=}\|X_n\|^2$. Решение имеет форму ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nv_n(x)\cos\tfrac{a\mu_n}{l}t,$$

коэффициенты которого

$$A_n=\tfrac{(u_0,\,\rho v_n)}{\|v_n\|^2}=\tfrac{(u_0,\,\rho\mathcal{L}v_n)}{\lambda\|v_n\|^2}=\tfrac{(\rho\mathcal{L}u_0,\,v_n)}{\lambda\|v_n\|^2}=\tfrac{(l_0^2F_0\delta(x-l),\,v_n)}{E_0S_0\lambda\|v_n\|^2}=\tfrac{l_0^2F_0v_n(l)}{E_0S_0\lambda_n\|v_n\|^2}.$$

2.177. $u(x,t)=\frac{l_0F_0}{E_0S_0}\left(\frac{l_0}{l_0-x}+\frac{E_0S_0}{kl_0}-\frac{l^2l_0}{(l_0-l)(l_0-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\,\cos\frac{a\mu_n}{l}t}{\mu_n\|X\|^2}\right)$,
$\mu_n>0$, $X_n(x),\|X\|^2$ те же, что и в ответе к предыдущей задаче.
Указание. Решение представить в виде $u(x,t)=u_0(x)+v(x,t)$, где функция $u_0(x)$ та же, что и в предыдущей задаче.

2.178. $u(r,t)=\frac{q_0r_0}{k}\left(\frac{3a^2t}{r_0^2}{+}\frac{r^2}{2r_0^2}{-}\frac{3}{10}{-}2\frac{r_0}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}}{\mu_n^3}\sin\frac{\mu_nr}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_na}{r_0}\right)^2t}\right)$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\,\mu=\mu$.

2.179. $u(r,t)=u_0\Big(1-\frac{2hr_0^2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\frac{\mu_nr}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2Dt}\Big)$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p\quad p=hr_0-1$.

2.180. 1) $u(r,t)=\frac{Q}{6k}(r-r_1)(r_2-r)(1+\frac{r_1+r_2}{r})+$
$+\frac{2Q(r_2-r_1)^2}{k\pi^3 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r_2-r_1}{n^3}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}e^{-(\frac{\pi a n}{r_2-r_1})^2 t}$;

2) $u(r,t)=\frac{Q}{3k}(r_2-r)(\frac{r_2+r}{2}-\frac{r_1^3}{r_2 r})-$
$-\frac{2Q(r_2-r_1)^2}{kr}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\frac{\mu_n(r_2-r)}{r_2-r_1}e^{-(\frac{a\mu_n}{r_2-r_1})^2 t}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=-p\sin\mu$, $p=\frac{r_2}{r_1}-1$; 3) $u(r,t)=\frac{Qt}{C\rho}$.

2.181. 1) $u(r,t)=\frac{A(r-r_1)(r_2-r)}{2a^2 r}-\frac{4A(r_2-r_1)^2}{\pi^3 a^2 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)(r-r_1)}{r_2-r_1}}{(2n+1)^3}e^{-(\frac{\pi a(2n+1)}{r_2-r_1})^2 t}$;

2) $u(r,t)=\frac{A}{2a^2}(r-r_1)(\frac{r_2^2}{r_1 r}-1)+$
$+\frac{2A(r_2-r_1)^2}{a^2 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2-p)}\left(\frac{(-1)^{n+1}p}{\sqrt{\mu_n^2+p^2}}-1\right)\sin\frac{\mu_n(r-r_1)}{r_2-r_1}e^{-(\frac{a\mu_n}{r_2-r_1})^2 t}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=p\sin\mu$, $p=1-\frac{r_1}{r_2}$;

3) 2. $u(r,t)=\frac{15At}{38}+\frac{A}{2a^2}(\frac{5r^2}{38}-r-\frac{36}{19r}+\frac{3519}{1444})+$
$+\frac{2A}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9\mu_n^2+1}{\mu_n^5(36\mu_n^2+19)}\left((-1)^n\sqrt{\frac{4\mu_n^2+1}{9\mu_n^2+1}}-1\right)R_n(r)e^{-(a\mu_n)^2 t}$,

$R_n(r)=\frac{1}{r}(\sin\mu_n(r-2)+2\mu_n\cos\mu_n(r-2))$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+6\mu^2)\sin\mu$. Указания к п.2, п.3 — см. задачу 2.13 п.2,п.4.

2.182. 1) $u(r,t)=\frac{A}{12a^2 r}(r-r_1)(r_2-r)(r^2+(r_1+r_2)r+r_1^2+r_1 r_2+r_2^2)+$
$+\frac{2A(r_2-r_1)^2}{\pi^3 a^2 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[(-1)^n r_2^2-r_1^2-\frac{2(r_2-r_1)^2}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1)\right]\times$
$\times\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}e^{-(\frac{\pi a n}{r_2-r_1})^2 t}$;

2) $u(r,t)=\frac{A}{12a^2}(r-r_1)(\frac{3r_2^4}{r_1 r}-r_1^2-r_1 r-r^2)-$
$-\frac{2Ad^2}{a^2 r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2-p)}\left[r_1^2-\frac{2d^2}{\mu_n^2}+(r_2^2+\frac{2d^2}{\mu_m^2})\frac{(-1)^{n+1}p}{\sqrt{\mu_n^2+p^2}}\right]\sin\frac{\mu_n(r-r_1)}{d}e^{-(\frac{a\mu_n}{d^2})^2 t}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=p\sin\mu$, $p=1-\frac{r_1}{r_2}$, $d=r_2-r_1$;

3) $u(r,t)=\frac{195At}{76}-\frac{A}{a^2}(\frac{r^3}{12}-\frac{65r^2}{152}-\frac{54}{19r}+\frac{70759}{6498})+$
$+\frac{2A}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9\mu_n^2+1}{\mu_n^5(36\mu_n^2+19)}\left(4+\frac{2}{\mu_n^2}+(-1)^n(9+\frac{2}{\mu_n^2})\sqrt{\frac{4\mu_n^2+1}{9\mu_n^2+1}}\right)R_n(r)e^{-(a\mu_n)^2 t}$,

$R_n(r)=\frac{1}{r}(\sin\mu_n(r-2)+2\mu_n\cos\mu_n(r-2))$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+6\mu^2)\sin\mu$. Указания к п.2, п.3 — см. задачу 2.13 п.2,п.4.

2.183. $u(r,t)=u_0\left(1-\frac{2r_2}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\frac{r_2-r}{r_2-r_1}e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_2-r_1}\right)^2 Dt}\right)$,

$\mu>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=-p$, $p=\frac{r_2}{r_1}-1$. См. задачу 2.13 п.3.

2.184. $u(r,t)=\frac{q_0}{14k}(r^2+\frac{16}{r}-\frac{453}{35}+6a^2 t)-\frac{28q_0}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^3(4\mu_n^2+7)}R_n(r)e^{-(a\mu_n)^2 t}$,

$R_n(r)=\dfrac{1}{r}(\sin\mu_n(r-1)+\mu_n\cos\mu_n(r-1))$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=(1+2\mu^2)\sin\mu$. Указание. См. задачу 2.13 п.4.

2.185. $u(r,t)=\frac{Q}{4\pi k}(\frac{1}{r}-\frac{9}{14})-\frac{Q}{2\pi k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^2(4\mu_n^2+7)}\left(1+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\mu_n^2+1}{4\mu_n^2+1}}R_n(r)e^{-a\mu_n)^2t},$
$R_n(r)$ и μ_n те же, что и в задаче 2.185. **2.186.** $u(r,t)=\frac{q_0}{7k}(\frac{99}{70}-\frac{3r^2}{2}+\frac{4}{r}-9a^2t)+$
$+\ \frac{2q_0}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^3(4\mu_n^2+7)}\left(1\ +\ (-1)^{n+1}4\sqrt{\frac{\mu_n^2+1}{4\mu_n^2+1}}\right)R_n(r)e^{-(a\mu_n)^2t}\Big),\quad R_n(r)\quad$ и $\quad\mu_n$
определены в задаче 2.184.

2.187. 1) $u(r,t)=\frac{A}{12a^2r}(r-1)(2-r)(r^2+3r+7)+$
$+\frac{2A}{a^2\pi^3r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n-1+\frac{2}{\pi^2n^2}(1+(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\pi n(r-1)\cos\pi ant;$

2) $u(r,t)=\frac{A(2-r)(2r^3+4r^2+8r-3)}{24a^2r}+$
$+\frac{2A}{a^2r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3}\Big(\frac{2}{\mu_n^2}-4+(-1)^{n+1}\frac{\mu_n^2+2}{\mu_n^2\sqrt{\mu_n^2+1}}\Big)\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^2+2}\sin\mu_n(2-r),$
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\cos\mu=-\sin\mu$;

3) $u(r,t)=\frac{45At^2}{56}-\frac{A}{a^2}(\frac{r^3}{12}-\frac{15r^2}{56}+\frac{2}{7r}+\frac{117}{196})+$
$+\frac{2A}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^5(4\mu_n^2+7)}\Big(1+\frac{2}{\mu_n^2}+2(-1)^{n+1}(2+\frac{1}{\mu_n^2})\sqrt{\frac{\mu_n^2+1}{4\mu_n^2+1}}\Big)R_n(r)\cos a\mu_nt,$
$R_n(r)=\frac{1}{r}(\sin\mu_n(r-1)+\mu_n\cos\mu_n(r-1)),\ \ \mu_n>0$ — корень уравнения
$\mu\cos\mu=(1+2\mu^2)\sin\mu$. Указания к п.2, п.3 — см. задачу 2.13 п.2,п.4.

2.188. 1) $u(r,t)=\frac{u_2r_2-u_1r_1}{r_2-r_1}-\frac{r_1r_2(u_2-u_1)}{(r_2-r_1)r}+$
$+\frac{2}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nr_2u_2-r_1u_1}{n}\sin\frac{\pi n(r-r_1)}{r_2-r_1}\cos\frac{\pi ant}{r_2-r_1};$

2) $u(r,t)=u_0\left(1-\frac{2r_2}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+p^2}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\sin\mu_n\frac{r_2-r}{r_2-r_1}\cos\frac{a\mu_nt}{r_2-r_1}\right),$
$\mu>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=-p,\ \ p=\frac{r_2}{r_1}-1$. См. задачу 2.13.п.3;

3) $u(r,t)=-Ar_1^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{r})+\frac{2Ar_1(r_2-r_1)}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)}\times$
$\times\sin\frac{\mu_n(r_2-r)}{r_2-r_1}\cos\frac{a\mu_nt}{r_2-r_1},\ \ \mu_n$ и p определены в ответе к задаче 2.183;

4) $u(r,t)=-\frac{A}{7}(\frac{r^2}{2}+\frac{8}{r}-\frac{3Aa^2t}{14}+\frac{453A}{490}+2A\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_n^2+1}{\mu_n^3(4\mu_n^2+7)}R_n(r)e^{-(a\mu_n)^2t},$
$R_n(r)=\dfrac{1}{r}(\sin\mu_n(r-1)+\mu_n\cos\mu_n(r-1)),\ \ \mu_n>0$ — корень уравнения
$\mu\cos\mu=(1+2\mu^2)\sin\mu$. Указание. См. задачу 2.13. п.4.

2.189. $u(x,y)=\frac{F_0l_2}{4T_0l_1}\left(1+\frac{|y|}{l_2}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ch\,\frac{(2n+1)\pi x}{2l_2}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l_2}}{(2n+1)^2ch\,\frac{(2n+1)\pi l_1}{2l_2}}\right).$

2.190. $u(x,y,t)=\frac{F_0l_2}{4\pi T_0l_1}\left[\frac{sh\frac{\pi(l_1-|x|)}{l_2}}{ch\frac{\pi l_1}{l_2}}-\frac{2}{\pi l_1l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1}\cos\omega_nt}{\left(\frac{2n+1}{2l_1}\right)^2+\frac{1}{l_2^2}}\right]\sin\frac{\pi y}{l_2},$
$\omega_n=\pi a\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2l_1}\right)^2+\frac{1}{l_2^2}}$. **2.191.** $u(x,y,t)=\frac{4I}{\pi a\rho l}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^{m+n}]\sin\frac{\pi m}{4}\sin\frac{\pi n}{4}}{\sqrt{m^2+n^2}}\times$
$\times\sin\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi a}{l}\sqrt{m^2+n^2}t.$

Указание. Методом продолжений перейти к задаче для квадрата.

2.192. $u(x,y,t)=\frac{4I}{\pi a\rho l}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^{m+n}]\sin\frac{\pi m}{4}\sin\frac{\pi n}{4}}{\sqrt{m^2+n^2}}\times$
$\times\sin\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi a}{l}\sqrt{m^2+n^2}t$. См. указание к предыдущей задаче.

2.193. $u(x,y)=C-\frac{Qy}{kl_1}$. **2.194.** $u(x,y)=\frac{Q}{k}\left(\frac{x}{l_2}-\frac{y}{l_1}\right)+C$.

2.195. $u(x,y)=C-\frac{1}{k}\left(Q_1\frac{x}{l_1}-Q_2\frac{y}{l_2}\right)$. **2.196.** $u(x,y)=\frac{q_0\sqrt{2}}{kl}xy$,
$u_{max}=u(\frac{l}{2},\frac{l}{2})=\frac{q_0l\sqrt{2}}{4k}$. **2.197.** $u(x,y)=\frac{Q}{2kl^2}[(l-x)^2-y^2]$.

2.198. $u(x,y)=\frac{u_0}{2l^2}[(l-x)^2-y^2]+\frac{u_0x}{l}$. **2.199.** $\mathbf{j}(x,y)=-\frac{\sqrt{2}j_0}{l}(y\mathbf{e}_x+x\mathbf{e}_y)$.

2.200. 1. $u(x,y)=\frac{Q}{2kl_1l_2}[(x-l_1)^2-(y-l_2)^2]+C$;
2. $u(x,y)=\frac{Q}{2kl_1l_2}[-(x+l_1)^2+(y-l_2)^2]+C$; 3. $u(x,y)=\frac{Q}{2kl_1l_2}(x^2-y^2)+C$.

2.201. $u(x,y,z)=\frac{1}{16kl_1l_2l_3}[\,Q_{-1}(l_1-x)^2-Q_1(l_1+x)^2+$
$+Q_{-2}(l_2-y)^2-Q_2(l_2+y)^2+Q_{-3}(l_3-z)^2-Q_3(l_3+z)^2\,]+C$.

2.202. $u(r,\varphi)=\frac{Q_0}{2k}\left[\frac{r}{r_0}\sin-\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{r^4}{r_0^4}+2\frac{r^2}{r_0^2}\cos2\varphi\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_0})^{2n}\frac{\cos2n\varphi}{n(4n^2-1)}\right]$.

2.203. $u(r,\varphi)=u_0\left(1-\frac{\varphi}{\alpha}-\frac{2r_0h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_0})^n\frac{\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n(n+r_0h)}\right)$.

2.204. $u(x,y)=\frac{(P_1-P_2)a^2b^2}{2\rho\nu(a^2+b^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$. Указание. Решение отыскивать в виде многочлена второй степени относительно x и y.

2.205. $u(x,t)=\frac{gl^2}{24a^2}\left[\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_nX_n(x)\cos\frac{a\mu_n^2}{l^2}t}{\mu_n^5ch\,\mu_n\cos^2\mu_n}\right]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\,\mu+th\,\mu=0$, $X_n(x)=ch\,\mu_n\cos\frac{\mu_n}{l}x-\cos\mu_n\,ch\frac{\mu_n}{l}x$.

2.206. $P^2(r)=P_1^2+\frac{P_2^2-P_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r}{r_1}$.

2.207. $\mathbf{q}=\frac{\alpha r_2}{RT(1+2\beta)}\left[P_1^2-P_2\frac{\beta P_2+\sqrt{\beta^2P_2^2+(1+2\beta)P_1^2}}{1+2\beta}\right]\mathbf{e}_r$, $h=\frac{\alpha\mu}{k}$, $\beta=hr_2\ln\frac{r_2}{r_1}$.

2.208. $\zeta(r)=\left(H^2+\frac{\mu q}{\pi\rho kg}\ln\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. **2.209.** $t_0=\frac{\mu_1mr_1}{4k_1}\frac{\left(\frac{R_0}{r_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{R_0}{r_1}\right)^2-1\right]+1}{P_2-P_1}$.

2.210. $u(r)=\frac{F_0r_0^2}{16\pi D}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$.

2.211. $u(r)=\frac{F_0r_0^2}{16\pi D}\left[\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)\frac{3+\sigma}{1+\sigma}+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$.

2.212. $u(x,t)=\frac{F_0}{\rho_0l}\begin{cases}\frac{\omega_0\sin\omega t-\omega\sin\omega_0t}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{\pi}{4}(1-\frac{x}{l}), & \omega\neq\omega_0=\frac{\pi a}{4l},\\ \frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega}\sin\frac{\pi}{4}(1-\frac{x}{l}), & \omega=\omega_0.\end{cases}$

2.213. Если $\omega\neq\omega_n=\frac{(2n+1)\pi a}{2l}$, то
$u(x,t)=\frac{f_0}{\rho_0\omega^2}\left[\left(\frac{\cos\frac{\omega x}{a}}{\cos\frac{\omega l}{a}}-1\right)\sin\omega t-\frac{8\omega^3l}{\pi^2a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\omega_nt}{(2n+1)^2(\omega_n^2-\omega^2)}\right]$.
Если $\omega=\omega_{n_0}$, то $u(x,t)=\frac{f_0}{\rho_0\omega^2}\left[\left(\frac{x\sin\frac{\omega x}{a}}{l\sin\frac{\omega l}{a}}-\frac{5a\cos\frac{\omega x}{a}}{2\omega\,l\sin\frac{\omega l}{a}}-1\right)\sin\omega t-\right.$

$-\frac{a\cos\frac{\omega x}{a}}{l\sin\frac{\omega l}{a}}t\cos\omega t-\frac{8\omega^3 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1,n\neq n_0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\omega_n t}{(2n+1)^2(\omega^2-\omega_n^2)}\Big]$.

2.214. Если $\omega\neq\frac{(2n+1)\pi a}{l}$, то $u(x,t)=\frac{f_0}{\rho\omega^2}\left[\frac{2a^2\cos\frac{\omega(l-2x)}{2a}}{\omega^2 l^2\cos\frac{\omega l}{2a}}-\frac{(l-x)x}{l^2}-\frac{2a^2}{\omega^2 l^2}\right]\sin\omega t-$

$-\frac{8\omega l f_0}{\rho a^3\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}}{(2n+1)^4\left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2-\frac{\omega^2}{a^2}\right]}$. Если $\omega=\frac{(2n_0+1)\pi a}{l}$, то

$u(x,t)=\frac{F_0}{\rho\omega^2}\left[\frac{2a^2}{\omega^2 l^2}\left(\frac{7a}{\omega l}\sin\frac{\omega x}{a}+\frac{l-2x}{l}\cos\frac{\omega x}{a}-1\right)-\frac{(l-x)x}{l^2}\right]\sin\omega t+$

$+\frac{4F_0}{\rho}\left[\frac{a^3}{\omega^5 l^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}-\frac{2\omega l}{a^3\pi^4}\sum_{\substack{n=0\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}}{(2n+1)^4\left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2-\frac{\omega^2}{a^2}\right]}\right]$.

2.215. $u(x,t)=\frac{F_0}{\rho}\begin{cases}\frac{(\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_n t)\sin\frac{\omega_n x}{a}}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}, & \omega\neq\omega_n=\frac{\pi na}{l},\\ \frac{(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}}{2\omega^2}, & \omega=\omega_n.\end{cases}$

2.216. $u(x,t)=\frac{f_0}{\rho\omega_n}\begin{cases}\frac{(\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_n t)\sin\frac{\omega_n x}{a}}{\omega_n^2-\omega^2}, & \omega\neq\omega_n=\frac{\pi nx}{l},\\ \frac{(\sin\omega_n t-\omega_n t\cos\omega_n t)\sin\frac{\omega_n x}{a}}{2\omega_n}, & \omega=\omega_n.\end{cases}$

2.217. $u=-\frac{2lF_0}{\pi T}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2l}\sin\frac{3\pi at}{2l}\,\eta\left(\frac{2l}{3}-x\right)+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}}{n(4n^2-9)}\right]$.

2.218. 1) $u=-\frac{lF_0}{4\pi T}\left[\left|\sin\frac{2\pi x}{l}\right|\sin\frac{2\pi at}{l}+\frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}}{(2n+3)(4n^2-1)}\right]$;

2) $u=f(x)\sin\frac{2\pi at}{l}+\frac{2lF_0}{\pi^2 T}\left[\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\sin\frac{2\pi at}{l}-\frac{2\pi at}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}\right)+\right.$

$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi at}{l}-2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}}{n(n^2-4)}\right]$,

где $f(x)=\frac{lF_0}{4\pi T}\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}-\frac{2}{3}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}-\frac{\sqrt{3}\,x}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}, & 0\le x\le\frac{l}{3},\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}+\frac{1}{3}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}-\frac{\sqrt{3}(l-x)}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}, & \frac{l}{3}\le x\le l.\end{cases}$

2.219. Если $\omega\neq\omega_n=\frac{\pi na}{l}$, $n\in\mathbf{N}$, то

$u(x,t)=f(x)\sin\omega t-\frac{2\omega F_0}{\rho l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}$, $X_n(x)=\sin\frac{\pi nx}{l}$, где

$$f(x)=\frac{F_0}{a\omega\rho\sin\frac{\omega l}{a}}\begin{cases}\sin\frac{\omega(l-x_0)}{a}\sin\frac{\omega x}{a}, & 0\le x\le x_0,\\ \sin\frac{\omega(l-x)}{a}\sin\frac{\omega x_0}{a}, & x_0\le x\le l.\end{cases}.$$

Если $\omega=\omega_{n_0}$ и $X_{n_0}(x_0)=0$, где $x_0=\frac{ml}{n_0}$, $0<m<n_0$ (m – целое), то

$u(x,t)=f(x)\sin\omega t-\frac{2\omega F_0}{\rho l}\sum_{\substack{n=1\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}$,

где

$$f(x)=\frac{(-1)^m F_0}{a\omega\rho l}\sin\frac{\omega x}{a}\begin{cases}l-x, & 0\le x\le x_0,\\ -x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Если $\omega=\omega_{n_0}$, а $X_{n_0}(x_0)\neq 0$, то

$$u(x,t)=f(x)\sin\omega t-\frac{F_0\sin\frac{\omega x_0}{a}}{\omega^2\rho\,l}(\omega t\cos\omega t-\sin\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}-$$
$$-\frac{2\omega F_0}{\rho\,l}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)},$$

где функция $f(x)$ имеет вид

$$f=\frac{F_0}{a\omega\rho l}\begin{cases}\left(\frac{a}{2\omega}\sin\frac{\omega x}{a}-x\cos\frac{\omega x}{a}\right)\sin\frac{\omega x_0}{a}+(l-x_0)\cos\frac{\omega x_0}{a}\sin\frac{\omega x}{a}, & 0\le x\le x_0,\\ \left(\frac{a}{2\omega}\sin\frac{\omega x_0}{a}-x_0\cos\frac{\omega x_0}{a}\right)\sin\frac{\omega x}{a}+(l-x)\cos\frac{\omega x}{a}\sin\frac{\omega x_0}{a}, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

2.220. $u(x,t)=u_0\left[\left(\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}-\right.$
$$\left.-\frac{x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi at}{l}\right]+\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi at}{l}}{n^2-1}.$$

Указание. Исходную задачу для функции $u(x,t)$ можно свести к двум, более простым, полагая $u(x,t)=U(x,t)+w(x,t)$, где $U(x,t)$ и $w(x,t)$ — решения следующих смешанных задач:

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+C\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi at}{l},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$U(0,t)=0,\ U(l,t)=u_0\sin\frac{\pi at}{l},\ U(x,0)=U_t(x,0)=0,$$

$$w_{tt}=a^2w_{xx}-C\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi at}{l},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$w(0,t)=w(l,t)=w(x,0)=w_t(x,0)=0.$$

Для обоснования указанной редукции следует перевести неоднородность из граничного условия в уравнение (см. задачу 10.75.) и воспользоваться методикой, изложенной в примере 2.11.

2.221. $u(x,t)=\frac{lF_0}{\pi ES}\left[\left(\frac{at}{l}-\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{l-x}{l}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\sin\frac{\pi at}{l}+\right.$
$$\left.\frac{at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\right]-\frac{2lF_0}{\pi^2ES}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}}{n(n^2-1)}.$$

2.222. $u(x,t)=\frac{2lF_0}{\pi ES}\left[\left(\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}-\frac{x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}\right)\sin\frac{\pi at}{2l}-\right.$
$$\left.-\frac{at}{l}\cos\frac{\pi at}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}\right]-\frac{lF_0}{2\pi^2ES}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

2.223. Если $\omega\neq\omega_n=a\sqrt{\lambda_n}$, $\sqrt{\lambda_n}=\frac{(2n+1)\pi}{2l}$, $n\in\mathbf{N}_0$, то

$$u(x,t)=u_0\left[\frac{\cos\frac{\omega(l-x)}{a}}{\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t-\frac{2a\omega}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\sin\omega_n t}{\omega_n^2-\omega^2}\right].$$

Если $\omega=\omega_{n_0}$, то $u(x,t)=u_0\left[\left(\frac{at}{2\omega l}\sin\frac{\omega x}{a}+\frac{l-x}{l}\cos\frac{\omega x}{a}\right)\sin\omega t\right)+$
$$+\frac{a}{\omega l}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}\Big]-\frac{2\omega au_0}{l}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\sin\omega_n t}{\omega_n^2-\omega^2}.$$

2.224. Если $\omega\neq\frac{\pi na}{l}$, то

$$u(x,t)=\frac{av_0}{\omega}\left[\frac{\cos\frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t+\frac{at}{l}+\frac{2\omega^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l}}{n\left(\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2-\omega^2\right)}\right].$$

Если $\omega=\frac{\pi n_0 a}{l}$, то

$u(x,t)=\frac{v_0 a}{l\omega}\left\{\left[(l-x)\sin\frac{\omega x}{a}-\frac{3a}{2\omega}\cos\frac{\omega x}{a}\right]\sin\omega t+at\cos\frac{\omega x}{a}\cos\omega t+at\right\}+$
$+\frac{2\omega a^2 v_0}{l}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n a t}{l}}{n\left(\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2-\omega^2\right)}.$

2.225. $u(x,t)=\frac{\rho A}{12la^4}\left[2l^2(l-x)^2-6a^2t^2(l-x)^2-(l-x)^4-a^4t^4+2a^2l^2t^2\right]+$
$+\frac{A\rho l^3}{3a^4}\left(-\frac{7}{60}+\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n a t}{l}}{n^4}\right).$

2.226. $u(x,t)=\frac{Ax(l-x)t}{2a^2}-\frac{4Al^3}{\pi^4a^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{l}}{(2n+1)^4}.$

2.227. $u(x,t)=\frac{A(l^2-x^2)}{2a^2}\left(t^2-\frac{5l^2-x^2}{6a^2}\right)+\frac{128Al^4}{\pi^5a^4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}}{(2n+1)^5}.$

2.228. $u(x,t)=\int\limits_0^t(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$. **2.229.** $u(x,t)=\frac{Ala^2t^3}{12a^2}+\frac{Ax^2(3l-2x)t}{12a^2}+\frac{Al^4}{24a^2}+$
$+\frac{4Al^4}{\pi^5a^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{l}}{(2n+1)^5}.$

2.230. $u(x,t)=\frac{Alt^4}{24}-\frac{A}{2a^2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{lx^2}{2}+\frac{l^3}{2}\right)t^2-\frac{Ax^2}{4a^4}\left(\frac{x^3}{15}-\frac{lx^2}{6}+\frac{l^3}{6}\right)-\frac{Al^5}{120a^4}-$
$-\frac{8Al^5}{\pi^6a^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{l}}{(2n+1)^6}.$

2.231. $u(r,t)=\frac{A}{2a^2}(r_0-r)(r_0^2+rr_0-r^2)t-\frac{8Ar_0^5}{\pi^6a^3r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{r_0}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{r_0}}{(2n+1)^6}.$

2.232. $u(r,t)=\frac{A(r_0^2-r^2)}{6a^2}\left(t^2-\frac{7r_0^2-3r^2}{30a^2}\right)-\frac{4Ar_0^5}{\pi^5a^4r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n r}{r_0}\cos\frac{\pi n a t}{r_0}}{n^5}.$

2.233. $u(r,t)=\frac{A(r_0^2-r^2)}{2a^2}\left[(7r_0^2-3r^2)t^2-\frac{3r^4-18r_0^2r^2+31r_0^4}{630a^2}\right]-$
$-\frac{24Ar_0^7}{\pi^7a^4r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n r}{r_0}\cos\frac{\pi n a t}{r_0}}{n^7}.$

2.234. Если $\omega\neq\omega_n=\frac{\pi n a}{l}$, то

$u(r,t)=\frac{u_0r_0}{r}\left[\frac{\sin\frac{\omega r}{a}\sin\omega t}{\sin\frac{\omega r_0}{a}}+\frac{2\omega a}{r_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n r}{r_0}\sin\frac{\pi n a t}{r_0}}{\omega_n^2-\omega^2}\right].$

Если $\omega=\omega_{n_0}$, то

$u(x,t)=\frac{u_0a\omega}{\cos\frac{\omega r_0}{a}}\left[\left(\omega t\cos\omega t-\frac{1}{2}\sin\omega t\right)\frac{\sin\frac{\omega r}{a}}{r}+\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega r}{a}\sin\omega t\right]+$
$+\frac{2u_0a\omega}{r}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n r}{r_0}\sin\frac{\pi n a t}{r_0}}{\omega_n^2-\omega^2}.$

2.235. $u(t)=\frac{A}{\alpha}\left(1-\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)$. **2.236.** $u(r,t)=\frac{Ar_0t^3}{8}+\frac{Ar}{4a^2}\left(\frac{r_0r}{2}-\frac{r^2}{3}\right)-\frac{Ar_0^3t}{90a^2}-$
$-\frac{2Ar_0^5}{a^3r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n(2+\mu_n^2)-2\sqrt{1+\mu_n^2}\right]\sqrt{1+\mu_n^2}}{\mu_n^8}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\sin\frac{\mu_n a t}{r_0}.$

2.237. $u(r,t)=\frac{Ar_0^2t^2}{20}-\frac{Ar^2}{2a^2}\left(\frac{r^2}{10}-\frac{rr_0}{3}+\frac{3r_0^2}{10}\right)t-$
$-\frac{8Ar_0^6}{a^3r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu_n^2+1}-(-1)^n)\sqrt{\mu_n^2+1}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\cos\frac{\mu_n a t}{r_0}}{\mu_n^8}.$

2.238. $u(r,t)=\frac{Aa^2t^3}{2r_0}+\frac{Ar^2t}{2r_0}-\frac{3Ar_0t}{10}-\frac{2Ar_0^3}{ar}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{1+\mu_n^2}}{\mu_n^4}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\sin\frac{\mu_n at}{r_0}$.

2.239. $u(r,t)=\frac{Aa^2t^4}{4r_0}+\frac{A}{2r_0}\left(r^2-\frac{3r_0^2}{5}\right)t^2+\frac{A}{20a^2r_0}\left(r^4-2r_0^2r^2+\frac{27r_0^4}{35}\right)+$
$+\frac{4Ar_0^4}{a^2r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{1+\mu_n^2}}{\mu_n^5}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\cos\frac{\mu_n at}{r_0}$.

2.240. $u(x,t)=\frac{M_0L^2}{EJ}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(sh\,\mu_n-\sin\mu_n)X_n(x)\cos\frac{a\mu_n^2t}{l^2}}{\mu_n^3\,sh\,\mu_n^2\sin^2\mu_n}-\frac{x^2}{4l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]$,
$X_n(x)=sh\,\mu_n\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)-\sin\mu_n sh\,\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\mu=th\mu$. Решение. Пусть $\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$ — радиальная часть оператора Лапласа в сферических координатах в трехмерном пространстве. Отыскание частного решения задачи

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad 0<r<r_0,\ 0<t,$$
$$|u|<\infty,\ \ u_r(r_0,t)=At^2,$$
$$u(r,0)=u_t(r,0)=0$$

достигается несколькими заменами. Замена $u(r,t)=v(r,t)+\frac{Ar^2t^2}{2r_0}$ ликвидирует неоднородность в граничном условии:

$$v_{tt}=a^2\Delta v+\frac{3Aa^2t^2}{r_0}-\frac{Ar^2}{r_0},\quad v_r(r_0,t)=0.$$

Замена $v(r,t)=w(r,t)+f(r)+\frac{Aa^2t^4}{4r_0}$, где $\Delta f=\frac{Ar^2}{a^2r_0}$, приводит к однородному уравнению для $v(r,t)$ со стационарным граничным условием:

$$w_{tt}=a^2\Delta w,\quad w_r(r_0,t)=-f'(r_0).$$

Наконец, замена $w(r,t)=U(r,t)-\frac{f'(r_0)r^2}{2r_0}-\frac{3a^2f'(r_0)t^2}{2r_0}$ (см. пример 2.10.) полностью снимает неоднородности. Итак,

$$u(r,t)=U(r,t)+f(r)-\frac{f'(r_0)r^2}{2r_0}+\frac{Aa^2t^4}{4r_0}-\frac{3a^2f'(r_0)t^2}{2r_0},$$

где

$$U_{tt}=a^2\Delta U,\quad 0<r<r_0,\ 0<t,$$
$$|U|<\infty,\ \ U_r(r_0,t)=0,$$
$$U(r,0)=F(r),\ \ U_t(r,0)=0,\quad F(r)=-f(r)+\frac{f'(r_0)r^2}{2r_0}.$$

Задача на собственные значения

$$\Delta R+\lambda R=0,\quad 0<r<r_0,$$
$$|R|<\infty,\ \ R'(r_0)=0,$$

возникающая в процессе разделения переменных $U(r,t)=R(r)T(t)$, решена в примере 2.6. Для функции $U(r,t)$ получается ряд

$$U(r,t)=C_0+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}C_nR_n(r)\cos\frac{\mu_n at}{r_0},$$

при формировании которого учтено, что $U_t(r,0)=0$. При $t=0$

$$F(r)=C_0+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}C_nR_n(r),$$

откуда

$C_0 = \frac{(F,R_0)}{\|R_0\|^2} = \frac{1}{\|R_0\|^2}\int_0^{r_0} F(r)r^2dr$, $C_n = \frac{(F,R_n)}{\|R_n\|^2} = \frac{1}{\|R_n\|^2}\int_0^{r_0} F(r)R_n(r)r^2dr$.

Так как $|F(r)| < \infty$ и $F'(r_0) = 0$, то функция $F(r)$ принадлежит области определения эрмитова оператора Δ, поэтому при $n > 1$

$$(F,R_n) = -\tfrac{1}{\lambda_n}(F,\Delta R_n) = -\tfrac{1}{\lambda_n}(\Delta F,R_n) = -\tfrac{1}{\lambda_n}(-\Delta f + \tfrac{3f'(r_0)}{r_0},R_n) = \\ = \tfrac{1}{\lambda_n}(\tfrac{Ar^2}{a^2r_0},R_n) + \tfrac{3f'(r_0)}{r_0}(1,R_n) = \tfrac{A}{a^2r_0\lambda_n}(r^2,R_n),$$

где $(1,R_n) = 0$ в силу ортогональности собственных функций. Пусть

$$h(r) = r^2, \quad 0 \le r \le r_0, \qquad h'(r_0) = \begin{cases} 2r, & 0 \le r < r_0, \\ 0, & r = r_0, \end{cases}$$

тогда обобщенный оператор $\Delta h = 6 - 2r_0\delta(r-r_0)$ (см.(10.40). Следовательно,

$$(r^2,R_n) = (h,R_n) = -\tfrac{1}{\lambda_n}(h,\Delta R_n) = -\tfrac{1}{\lambda_n}(\Delta h,R_n) = \tfrac{2r_0}{\lambda_n}R_n(r_0)r^2 = \\ = \tfrac{2r_0^2}{\lambda_n}\sin\mu_n = \tfrac{2r_0^2\mu_n(-1)^n}{\lambda_n\sqrt{\mu_n^2+1}} = \tfrac{2r_0^4(-1)^n}{mu_n\sqrt{\mu_n^2+1}}.$$

2.241. $u(x,t) = \frac{2M_0L^2}{EJ}\left[\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{a\mu_n^2t}{l^2}}{n^3} - \frac{x}{12l}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\right]$.

2.242. $u(x,t) = w(x) - \frac{M_0L^3}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\cos\frac{a\mu_n^2t}{l^2}}{\mu_n^4\,sh\,\mu_n^2\sin^2\mu_n}$,

$$w(x) = \begin{cases} (l-x)^2(2x_0x + lx - 3lx_0)x^2, & 0 \le x \le x_0, \\ (l-x_0)^2(2x_0x + lx_0 - 3lx)x_0^2, & x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Собственные функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = (\cos\mu_n - ch\,\mu_n)(\sin\tfrac{\mu_nx}{l} - sh\tfrac{\mu_nx}{l}) - (\sin\mu_n - sh\,\mu_n)(\cos\tfrac{\mu_nx}{l} - ch\tfrac{\mu_nx}{l}),$$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $ch\,\mu\cos\mu = 1$. Указание. Функция $w(x)$ — решение задачи, которая имеет следующие эквивалентные постановки:

$$w^{IV} = \tfrac{F_0}{EJ}\delta(x-x_0), \quad 0 < x < l, \qquad w^{IV} = 0, \quad 0 < x < x_0, \ x_0 < x < l,$$
$$w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0, \qquad w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0,$$
$$w(x_0+0) - w(x_0-0) = 0,$$
$$w'(x_0+0) - w'(x_0-0) = 0,$$
$$w''(x_0+0) - w''(x_0-0) = 0,$$
$$w'''(x_0+0) - w'''(x_0-0) - \tfrac{M_0}{EJ}.$$

Для вычисления коэффициентов Фурье функции $w(x)$ по собственным функциям $X_n(x)$ следует воспользоваться постановкой в первой форме.

2.243. $u(x,t) = \frac{M_0}{2EJ}[x_0(x_0-2x) - (x_0-x)^2\eta(x_0-x)] -$

$-\frac{M_0l^3}{EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n'(x_0)X_n(x)\cos\frac{a\mu_n^2t}{l^2}}{\mu_n^3(sh\mu_n+\sin\mu_n)^2}$, где μ_n и X_n даны в ответе к задаче 2.138.

2.244. 1) Если $\alpha = 0$, то

$$u(x,t)=\frac{Q_0l^2}{2k}\Big[\frac{x}{l}\Big(1-\frac{x}{l}\Big)-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}}{(2n+1)^3}\Big].$$

Если $0<\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\neq\frac{(2n+1)\pi}{l}$, то

$$u(x,t)=\frac{Q}{\alpha\rho C}\Big[\Big(\frac{\cos\frac{\sqrt{\alpha}(2x-l)}{2a}}{\cos\frac{\sqrt{\alpha}l}{2a}}-1\Big)e^{-\alpha t}-\frac{4\alpha}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}}{(2n+1)\Big(\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2-\alpha\Big)}\Big].$$

Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\frac{(2n_0+1)\pi}{l}$, то

$$u(x,t)=\frac{Q}{\alpha\rho C}\Big[\Big(1-\frac{2x}{l}\Big)\cos\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x-1+\frac{a}{l\sqrt{\alpha}}(3+4\alpha t)\Big]\,e^{-\alpha t}-$$

$$-\frac{4Q_0}{\pi\rho C}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}}{(2n+1)\Big(\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2-\alpha\Big)}.$$

2) Если $\alpha=0$, то $u(x,t)=\frac{Q_0t}{\rho C}$, если $\alpha>0$, то $u(x,t)=\frac{Q_0}{\alpha\rho C}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$.

2.245. Если $\alpha<h=\frac{\beta}{\rho C}$, то

$$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}-\frac{Q_0}{kl\gamma^2}\left[1-2\gamma^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_nt}}{\lambda_n+\gamma^2}\right]e^{-ht},\ \sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{l},$$

$\gamma^2=\frac{h-\alpha}{a^2}$, $X_n(x)=\cos\frac{\pi nx}{l}$, $f(x)=\frac{Q_0}{k\gamma\,sh\gamma l}\begin{cases}ch\gamma(l-x_0)\,ch\gamma x, & 0\le x\le x_0,\\ ch\gamma(l-x)\,ch\gamma x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$

Если $\alpha=h$, то

$$u(x,t)=\Big[f(x)+\frac{lQ_0}{k}\left(\frac{a^2t}{l^2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_nt}}{n^2}\right)\Big]e^{-ht},\quad\text{где}$$

$$f(x)=\frac{Q_0}{k}\begin{cases}\frac{x^2+x_0^2}{2l}-x_0+\frac{l}{3}, & 0\le x\le x_0,\\ \frac{x^2+x_0^2}{2l}-x+\frac{l}{3}, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Если $\alpha>h$, $\frac{\alpha-h}{a^2}=\gamma^2\neq\lambda_n$, то

$$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}+\frac{Q_0e^{-ht}}{kl\gamma^2}\left[1-2\gamma^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_nt}}{\lambda_n-\gamma^2}\right],\quad\text{где}$$

$$f(x)=\frac{Q_0}{k\gamma\sin\gamma l}\begin{cases}\cos\gamma(l-x_0)\cos\gamma x, & 0\le x\le x_0,\\ \cos\gamma(l-x)\cos\gamma x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Если $\alpha>h$, $\frac{\alpha-h}{a^2}=\lambda_{n_0}$, $X_{n_0}(x_0)=0$, то $x_0=\frac{(2m+1)l}{2n_0}$, $0\le m\le n_0-1$,

$$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}+\frac{lQ_0}{k\pi^2n_0^2}\Big[1-2n_0^2\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_nt}}{n^2-n_0^2}\Big]e^{-ht},\quad\text{где}$$

$$f(x)=(-1)^{m+1}\frac{lQ_0}{k\pi n_0}\cos\frac{\pi n_0x}{l}\begin{cases}l-x_0, & 0\le x\le x_0,\\ -x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}\qquad m\ —\text{ целое число.}$$

Если $\alpha>h$, $\frac{\alpha-h}{a^2}=\lambda_{n_0}$, $X_{n_0}(x_0)\neq0$, то

$$u(x,t)=\Big[f(x)+\frac{2a^2Q_0}{kl\pi^2}X_{n_0}(x_0)X_{n_0}(x)\,t\Big]\,e^{-\alpha t}+$$

$$+\frac{Q_0l}{k\pi^2n_0^2}\Big(1-2\sum_{n=1,n\neq n_0}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_nt}}{\lambda_n-\lambda_{n_0}}\Big)e^{-ht},$$

где функция $f(x)$ на промежутке $[0;x_0]$ определена выражением

$f(x)=\frac{lQ_0}{k\pi n_0}\left[\frac{1}{2\pi n_0}\cos\frac{\pi n_0 x_0}{l}-\left(1-\frac{x_0}{l}\right)\sin\frac{\pi n_0 x_0}{l}\right]\cos\frac{\pi n_0 x}{l}+\frac{x}{l}\sin\frac{\pi n_0 x}{l}\cos\frac{\pi n_0 x_0}{l}$, а при $x_0\le x\le l$ в этом выражении надо заменить $x\to x_0$, $x_0\to x$.

2.246. Если $\alpha<\beta$, то

$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}-\frac{2Q_0e^{-\beta t}}{lD}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-D\lambda_n t}}{\lambda_n+\gamma^2}$, где $\gamma^2=\frac{\beta-\alpha}{D}$,

$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$, $\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{l}$, $f(x)=\frac{Q_0}{D\gamma\,sh\,\gamma l}\begin{cases} sh\,\gamma(l-x_0)\,sh\,\gamma x, & 0\le x\le x_0,\\ sh\,\gamma(l-x)\,sh\,\gamma x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$

Если $\alpha=\beta$, то $u(x,t)=\left[f(x)-\frac{2lQ_0}{\pi^2D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-D\lambda_n t}}{n^2}\right]e^{-\alpha t}$,

где $f(x)=\frac{Q_0}{lD}\begin{cases}(l-x_0)\,x, & 0\le x\le x_0,\\ (l-x)\,x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$ Если $\alpha>\beta$, $\frac{\alpha-\beta}{D}=\gamma^2\ne\lambda_n$, то

$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}-\frac{2Q_0e^{-\beta t}}{lD}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-D\lambda_n t}}{\lambda_n-\gamma^2}$,

где $f(x)=\frac{Q_0}{D\gamma\sin\gamma l}\begin{cases}\sin\gamma(l-x_0)\,\sin\gamma x, & 0\le x\le x_0,\\ \sin\gamma(l-x)\,\sin\gamma x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$

Если $\alpha>\beta$, $\frac{\alpha-\beta}{D}=\lambda_{n_0}$, $X_{n_0}(x_0)=0$, то $x_0=\frac{ml}{n_0}$, $0<m<n_0$,

$u(x,t)=f(x)e^{-\alpha t}-\frac{2lQ_0e^{-\beta t}}{\pi^2D}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-D\lambda_n t}}{n^2-n_0^2}$,

где $f(x)=(-1)^m\frac{Q_0}{\pi Dn_0}\sin\frac{\pi n_0 x}{l}\begin{cases}l-x_0, & 0\le x\le x_0,\\ -x_0, & x_0\le x\le l.\end{cases}$ m — целое число.

Если $\alpha>\beta$, $\frac{\alpha-\beta}{D}=\lambda_{n_0}$, $X_{n_0}(x_0)\ne0$, то

$u(x,t)=f(x)\,e^{-\alpha t}+\frac{2Q_0}{l}\sin\frac{\pi n_0 x_0}{l}\sin\frac{\pi n_0 x}{l}\,te^{-\alpha t}-$

$$-\frac{2lQ_0e^{-\beta t}}{\pi^2D}\sum_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)\,e^{-D\lambda_n t}}{n^2-n_0^2},$$

где функция

$f(x)=\frac{Q_0}{\pi n_0 D}\left\{\left[\frac{l}{2\pi n_0}\sin\frac{\pi n_0 x_0}{l}+(l-x_0)\cos\frac{\pi n_0 x_0}{l}\right]\sin\frac{\pi n_0 x}{l}-x\sin\frac{\pi n_0 x_0}{l}\cos\frac{\pi n_0 x}{l}\right\}$ определена при $0\le x\le x_0$, а при $x_0\le x\le l$ выражение для $f(x)$ получается из данного заменами $x\to x_0$, $x_0\to x$.

2.247. $u(x,t)=\frac{Al^2}{a^2}\left(\frac{a^2xt}{l^3}+\frac{x^3}{6l^3}-\frac{x}{6l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}}{n^3}\right)$.

2.248. $u(x,t)=\frac{Al^3}{ka^2}\left(\frac{a^2xt}{l^3}+\frac{x^3}{6l^3}-\frac{x}{2l}+\frac{32}{\pi^4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2t}}{(2n+1)^4}\right)$.

2.249. $u(x,t)=\frac{Al^2}{D}\left(\frac{Dt}{l^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2l^2}+\frac{16}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2t}\right)$.

2.250. $u(x,t)=\frac{Al^3}{D^2}\left[\frac{Dt}{2l^2}\left(\frac{x^2}{l^2}+\frac{Dt}{l^3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{x^2}{12l^2}\left(1-\frac{x^2}{2l^2}\right)+\frac{7}{360}+\right.$

$$\left.+\frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}}{n^4}\right].$$

2.251. $u(x,t)=\frac{Al^2}{D}\Big(\frac{Dt}{l^2}+\frac{x^2}{2l^2}-\frac{p+2}{2p}-2p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}\cos\frac{\mu_n x}{l}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}\Big)$, $p=hl$, $h=\frac{\alpha}{D}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$.

2.252. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ne\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{l}$, то

$u(x,t)=u_0\left[\frac{\sin\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}}{\sin\frac{\sqrt{\alpha}l}{a}}e^{-\alpha t}+\frac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\lambda_n}X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_n t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}\right]$, $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$.

Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\sqrt{\lambda_{n_0}}$, то

$u(x,t)=u_0(-1)^{n_0}\left[\left(\frac{1}{2\pi n_0}-\frac{2\pi n_0 a^2 t}{l^2}\right)\sin\frac{\pi n_0 x}{l}+\frac{x}{l}\cos\frac{pin_0x}{l}\right]e^{-\left(\frac{\pi a n_0}{l}\right)^2 t}+$

$+\frac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi n x}{l}\,e^{-\left(\frac{\pi a n_0}{l}\right)^2 t}}{n^2-n_0^2}$.

2.253. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ne\sqrt{\lambda_n}=\frac{(2n+1)\pi}{2l}$, то

$u(x,t)=u_0\left[\frac{\cos\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{a}}{\cos\frac{\sqrt{\alpha}l}{a}}e^{-\alpha t}-\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}x\,e^{-a^2\lambda_n t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}\right]$.

Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\sqrt{\lambda_{n_0}}$, то

$u(x,t)=\frac{u_0 a}{2l\sqrt{\alpha}}\left[\left(\frac{2(l-x)\sqrt{\alpha}}{a}\cos\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}+(4\alpha t-1)\sin\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}\right)e^{-\alpha t}-\right.$

$\left.-\frac{4\sqrt{\alpha}}{a}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}x\,e^{-a^2\lambda_n t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}\right]$.

2.254. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ne\sqrt{\lambda n}\frac{(2n+1)\pi}{2l}$, то $u(x,t)=\frac{q_0 a\sin\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{a}}{k\sqrt{\alpha}\cos\frac{\sqrt{\alpha}l}{a}}e^{-\alpha t}-$

$-\frac{2q_0}{kl}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\,e^{-a^2\lambda_n t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}$, $X_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x$. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\sqrt{\lambda_{n_0}}$, то

$u(x,t)=\frac{q_0 a^2}{2kl\alpha}\left((1+4\alpha t)\cos\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}-\frac{2(l-x)\sqrt{\alpha}}{a}\sin\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}\right)e^{-\alpha t}-\frac{2q_0}{kl}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x)e^{-a^2\lambda_n t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}$.

2.255. Если $\alpha=0$, то

$u(x,t)=\frac{q_0}{2kl}\left[\left(x^2-2lx-2a^2t+\frac{2l}{3}\right)-\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n x}{l}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right]$.

Если $0<\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ne\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{l}$, то $u(x,t)=\frac{q_0 a^2}{kl\alpha}\left(1-\frac{l\sqrt{\alpha}\cos\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{a}}{a\sin\frac{\sqrt{\alpha}l}{a}}e^{-\alpha t}\right)-$

$-\frac{2q_0}{kl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n x}{l}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}$. Если $0<\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\sqrt{\lambda_{n_0}}$, то $u(x,t)=$

$=\frac{q_0 a^2}{2kl\alpha}\left[(1+4\alpha t)\cos\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}-\frac{2(l-x)\sqrt{\alpha}}{a}\sin\frac{\sqrt{\alpha}x}{a}\right]e^{-\alpha t}-\frac{4\alpha}{a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n x}{l}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}$.

2.256. $u(x,t)=\frac{Ahl^3}{(p+1)a^2}\Big(\frac{a^2xt}{l^3}+\frac{x^3}{6l^3}-\frac{(p+3)x}{6(p+1)l}-$

$-2(p+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}\sin\frac{\mu_n x}{l}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}}{\mu_n^2(\mu_n^2+p^2+p)}\Big)$, $h=\frac{\alpha}{k}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=hl$, α — коэффициент теплообмена.

2.257. $u(x,t)=\frac{Ax(l-x)}{2a^2}\left(t+\frac{x^2-lx-l^2}{12a^2}\right)+\frac{4Al^4}{\pi^5a^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}}{(2n+1)^5}$.

2.258. $u(x,t)=\frac{Ax(l^2-x^2)}{6a^2}\left(t-\frac{7l^2-3x^2}{6a^2}\right)-\frac{2Al^5}{\pi^5a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}}{n^5}$.

2.259. $u(x,t)=\frac{A}{h}\left(1-\frac{ch\,\alpha x}{sh\,\alpha l}\right)t+\frac{A}{2h\alpha^2ch\,\alpha l}[(2+\alpha l\,th\,\alpha l)\,ch\,\alpha x-\alpha x\,sh\,\alpha x-2ch\,\alpha l]+$

$+\frac{4Ale^{-ht}}{\pi a^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2t}}{(2n+1)\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+\alpha^2\right)}$, $\alpha=\frac{\sqrt{h}}{a}$.

2.260. $u(x,t)=\frac{Alt^2}{4}-\frac{A}{24a^2}(4x^3-6lx^2+l^3)t-$

$-\frac{A}{240a^4}(2x^5-5lx^4+5l^3x^2-l^5)+\frac{4Al^5}{\pi^6a^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2t}}{(2n+1)^6}$.

2.261. $u(x,t)=\frac{Aa^2t^3}{3l}+\frac{A}{6l}(3x^2-l^2)t^2+\frac{A}{180a^2l}(15x^4-30l^2x^2+7l^4)t+$

$+\frac{Ax^2}{360a^4l}(x^4-5x^2l^2+7l^4)-\frac{31Al^5}{7560a^4}-\frac{4Al^5}{\pi^6a^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}}{n^6}$.

2.262. $u(x,t)=\frac{A}{\alpha(e^{\alpha l}-1)}[\alpha x+e^{-\alpha x}+\alpha^2a^2t+\frac{e^{\alpha l}(\alpha l-1)+\alpha l+1}{e^{\alpha l}-1}]+$

$+\frac{2\pi Ae^{\frac{\alpha(l-x)}{2}}}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\left(\frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}+\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi nx}{l}\right)e^{-a\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)t}}{\left(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2}$.

2.263. $u(r,t)=\frac{Ar_0^3}{a^2r}\left[\frac{a^2t}{r_0^2}+\frac{r^2}{2r_0^2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{r_0}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{r_0}\right)^2t}}{(2n+1)^3}\right]$.

2.264. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\neq\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{r_0}$, то

$u(x,t)=\frac{u_0r_0}{r}\left[\frac{\sin\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}}{\sin\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}}e^{-\alpha t}+\frac{2}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}r\,e^{-a^2\lambda_nt}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}\right]$.

Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a}=\sqrt{\lambda_{n_0}}$, то

$u(x,t)=\frac{u_0}{\cos\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}}\left[\cos\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}+\left(\frac{a}{2\sqrt{\alpha}}-2\sqrt{\alpha}\,at\right)\frac{\sin\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}}{r}\right]e^{-\alpha t}+$

$+\frac{2u_0}{r}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}r\,e^{-a^2\lambda_nt}}{\lambda_n-\frac{\alpha}{a^2}}$.

2.265. $u(r,t)=\frac{A}{2kr_0}\left(\frac{r^4}{20a^2}-\frac{r_0^2r^2}{10a^2}+r^2t-\frac{3r_0^2t}{5}+3a^2t^2+\frac{27r_0^4}{700a^2}\right)+$

$+\frac{2Ar_0^4}{a^2kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{1+\mu_n^2}\sin\frac{\mu_nr}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_na}{r_0}\right)^2t}}{\mu_n^5}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\,\mu=\mu$. **2.266.** При $\alpha=0$ см. ответ к задаче 2.178.

Если $\sqrt{\alpha}\,r_0\neq a\mu_n$, где $\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\,\mu=\mu$, то

$u(r,t)=\frac{q_0r_0^2}{kr}\left[\frac{\sin\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\,e^{-\alpha t}}{\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\cos\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}-\sin\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}}+\frac{3a^2r}{\alpha r_0^3}\right]-$

$-\frac{2q_0r_0^2}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}\sin\frac{\mu_nr}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_na}{r_0}\right)^2t}}{\mu_n\left(\mu_n^2-\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)^2\right)}$.

Если $0 < \frac{\sqrt{\alpha}\,r_0}{a} = \mu_{n_0}$, то

$$u(r,t) = \frac{q_0 r_0^2}{kr}\left\{\frac{a^2}{2\alpha r_0^2 \sin\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}}\left[(1+4\alpha t)\sin\frac{\sqrt{\alpha}r}{a} - \frac{2r\sqrt{\alpha}}{a}\cos\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\right] + \frac{3a^2 r}{\alpha r_0^3}\right\} -$$
$$- \frac{2q_0 r_0^2}{kr}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n\left(\mu_n^2-\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)^2\right)}.$$

2.267. Если $hr_0 = 1$, то

$$u(r,t) = \frac{A}{6a^2}\left[r^2 + 6a^2 t - 3r_0^2 + \frac{192r_0^3}{\pi^4 r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{(2n+1)\pi r}{2r_0}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2r_0}\right)^2 t}}{(2n+1)^4}\right].$$

Если $hr_0 \neq 1$, то

$$u(r,t) = \frac{A}{6a^2}\left[r^2 + a^2 t - r_0^2 - \frac{2r_0}{h} + \frac{12hr_0^4}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n^3(\mu_n^2+p^2+p)}\right],$$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu\, ctg\,\mu = p$, $p = 1 - hr_0$.

2.268. Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a} \neq \frac{(2n+1)\pi}{r_0}$, то

$$u(r,t) = \frac{2a^4 Q_0}{k\alpha^2 r_0 r}\left[\frac{\cos\frac{(2r-r_0)\sqrt{\alpha}}{2a}}{\cos\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{2a}} - 1 - \frac{\alpha r_0 r}{2a^2}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\right]e^{-\alpha t} -$$
$$- \frac{8Q_0 r_0}{k\pi^3 r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{r_0}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{r_0}\right)^2 t}}{(2n+1)^3\left[\frac{\pi^2(2n+1)^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right]}.$$

Если $\frac{\sqrt{\alpha}}{a} = \frac{(2n_0+1)\pi}{r_0}$, то $u(r,t) = \frac{2a^4 Q_0}{k\alpha^2 r_0 r}\left[\frac{2a}{r_0\sqrt{\alpha}}(3+\alpha t)\sin\frac{\sqrt{\alpha}r}{a} - 1 - \frac{\alpha r_0 r}{2a^2}\left(1-\frac{r}{r_0}\right) + \right.$

$$\left. + \left(1-\frac{2r}{r_0}\right)\cos\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\right]e^{-\alpha t} - \frac{8Q_0 r_0}{k\pi^3 r}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi r}{r_0}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{r_0}\right)^2 t}}{(2n+1)^3\left[\frac{\pi^2(2n+1)^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right]}.$$

2.269. $u(r,t) = \frac{Aa^2 t^3}{r_0} + \frac{A}{10r_0}(5r^2 - 3r_0^2)t^2 + \frac{A}{700a^2 r_0}(35r^4 - 70r_0^2 r^2 + 27r_0^4)t +$

$$+ \frac{Ar^2}{4200a^4 r_0}(5r^4 - 21r_0^2 r^2 + 27r_0^4) - \frac{353Ar_0^5}{6300a^4} - \frac{4Ar_0^6}{a^4 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}}{\mu_n^7}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t},$$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $tg\mu = \mu$.

2.270. $u(r,t) = \frac{3Ar_0 a^2 t^2}{8a^2} - \frac{A}{2a^2}\left(\frac{r^3}{6} - \frac{r_0 r^2}{4} + \frac{r_0^3}{15}\right)t - \frac{Ar^2}{20a^4}\left(\frac{r^3}{18} - \frac{r_0 r^2}{8} + \frac{r_0^3}{9}\right) +$

$$+ \frac{29Ar_0^5}{11200a^4} + \frac{2Ar_0^6}{a^4 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n(\mu_n+2) - 2\sqrt{\mu_n^2+1}]\sqrt{\mu_n^2+1}}{\mu_n^9}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}.$$

2.271. $u(x,t) = \frac{2lF_0}{\pi^2 T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\cos\frac{n\pi}{l}a(t-t_0) - \cos\frac{n\pi}{l}at\right)}{n^2}$.

2.272. Если $\omega \neq \omega_n$, то $u(x,t) = \frac{\omega F_0}{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$.

Если $\omega = \omega_{n_0}$, то $u(x,t) = \frac{F_0 X_{n_0}(x_0)X_{n_0}(x)}{2\rho_0\omega^2\|X_n\|^2}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t) +$

$$+ \frac{\omega F_0}{\rho_0}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(x_0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right),$$

$X_n(x)=p_1\sin\frac{\mu_n}{l}x+\mu_n\cos\frac{\mu_n}{l}x$, $\|X_n\|^2=\frac{l}{2}\frac{(\mu_n^2+p_1^2)(\mu_n^2+p_2^2)+(p_1+p_2)(\mu_n^2+p_1p_2)}{\mu_n^2+p_2^2}$,
$p_i=lh_i$, $i=1,2$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=\frac{\mu^2-p_1p_2}{p_1+p_2}$, $\omega_n=\frac{\mu_n}{l}a$.
Указание. Для вычисления нормы $\|X_n\|$ применить формулы (2.89), (2.90).
2.273. Если $\omega\neq\omega_n=\frac{\mu_n a}{l}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p$, $p=\frac{2\rho_0 l}{m}$, то
$u(x,t)=\frac{\omega F_0}{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$.
Если $\omega=\omega_{n_0}$, то $u(x,t)=\frac{F_0X_{n_0}(0)X_{n_0}(x)}{2\rho_0\omega^2\|X_{n_0}\|^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)+$
$+\frac{\omega F_0}{\rho_0}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{X_n(0)X_n(x)}{\|X_n\|^2(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$,
$X_n(x)=\sin\mu_n\left(1-\frac{|x|}{l}\right)$, $X_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}p}{\sqrt{\mu_n^2+p^2}}$, $\|X_n\|^2=l\frac{\mu_n^2+p^2+p}{\mu_n^2+p^2}$.

2.274. $u(x,t)=\frac{2Q}{lC}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\cos\omega_n t+\frac{R}{2L}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)$,
$\omega_n^2=\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2$. **2.275.** $u(x,t)=\frac{4Ql^2}{k\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x}{(2n+1)^3}e^{-(a\alpha_n)^2t}\left(e^{(a\alpha_n)^2t_0}-1\right)$,
$\alpha_n=\frac{(2n+1)\pi}{l}$. **2.276.** $u(x,t)=\frac{8lQ_0}{\pi^2kS}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x_0\sin\sqrt{\lambda_n}x}{(2n+1)^3}\times$
$\times\left[1-e^{-a^2\lambda_n t}-\left(1-e^{-a^2\lambda_n(t-t_0)}\right)\eta(t-t_0)\right]$, $\sqrt{\lambda_n}=\frac{(2n+1)\pi}{2l}$.
2.277. $Q(t)=Q_0\left[\frac{C_0}{lC}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2+p^2+p}\cos\mu_n\left(1-\frac{x_0}{l}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2t}\right]$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{CL}{C_0}$, $a^2=\frac{1}{RC}$.
2.278. $u(x,y,t)=\frac{64F_0}{\pi^4l_1l_2T_0}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2l_1}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}\sin^2\frac{\pi a}{4}\alpha_{mn}t}{(2m+1)(2n+1)\alpha_{mn}^2}$,
где $\alpha_{mn}=\sqrt{\left(\frac{(2m+1)}{l_1}\right)^2+\left(\frac{(2n+1)}{l_2}\right)^2}$.
2.279. $u(x,y,t)=\frac{2F_0}{\pi a\rho_0\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_n t}{n(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$,
$\omega_n=\frac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{l_1l_2}\pi an$. **2.280.** $u(x,y,t)=\frac{Q_0}{kl_1l_2}a^2[t-(t-t_0)\eta(t-t_0)]+$
$+\frac{Q_0}{kl_1l_2}\sum\limits_{m+n>0}\frac{\cos\frac{m\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi y}{l_2}}{\alpha_{mn}}\left[1-e^{-a^2\alpha_{mn}t}-\left(1-e^{-a^2\alpha_{mn}(t-t_0)}\right)\eta(t-t_0)\right]$,
$\alpha_{mn}=\pi^2\left[\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2\right]$.
2.281. $u(x,y)=\frac{2F_0l_1l_2}{\pi^2T_0(l_1^2+l_2^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$, $u(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2})=\frac{l_1l_2F_0}{4(l_1^2+l_2^2)T_0}$.
2.282. 1) $u(r,\varphi)=\frac{p_0r}{\pi T_0}\left\{\ln\frac{r_0}{r}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}\right]\sin(2n+1)\varphi\right\}$;
2) $u(r,\varphi)=\frac{2p_0r^2}{\pi r_0T_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+3)}\left[(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n-1}\right]\sin(2n+1)\varphi$.

2.283. $\sigma(\varphi)=-\frac{q}{2\pi r_0}\cdot\frac{|r_0^2-r_1^2|}{r_0^2+r_1^2-2r_0r_1\cos\varphi}$. **2.284.** $\sigma(\varphi)=\frac{q}{2\pi r_0}\left(1-\frac{|r_0^2-r_1^2|}{r_0^2+r_1^2-2r_0r_1\cos\varphi}\right)$.

2.285. $\mathbf{A}(r,\varphi)=\frac{2J}{c}\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\varphi}}+\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+d_1^2-2rd_1\cos\varphi}}-\ln\frac{1}{r}+C\Big)\mathbf{e}_z$, $d_1=\frac{r_0^2}{d}$. **2.286.** $\mathbf{A}(r,\varphi)=\Big(\frac{4\mu J}{(\mu+1)c}\ln\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r^2-2r_1r\cos\varphi}}+C\Big)\mathbf{e}_z$.

2.287. $\mathbf{F}=4p^2\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{r_1r_0^2}{(r_0^2-r_1^2)^3}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$. **2.288.** $u(z,\varphi)=\frac{I}{4\pi\sigma}\ln\frac{ch\frac{z}{r_0}-\cos(\varphi+\varphi_0)}{ch\frac{z}{r_0}-\cos(\varphi-\varphi_0)}+C$, плотность тока определяется формулой (1.165).

2.289. 1) $u_0=\frac{F_0r_0^2}{18\pi D}$; 2) $u_0=\frac{F_0r_0^2}{18\pi D}\frac{4+\sigma r_0}{1+\sigma r_0}$.

2.290. 1) $u_0=\frac{p_0r_0^3}{64\pi D}$; 2) $u_0=\frac{p_0r_0^3}{64\pi D}\frac{5+\sigma r_0}{1+\sigma r_0}$.

2.291. $u(x,y)=\frac{2F_0l_1^3l_2^3}{\pi^4D(l_1^2+l_2^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$; $u(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2})\frac{F_0l_1^3l_2^3}{48D(l_1^2+l_2^2)^2}$.

2.292. $u(x,y)=\frac{p_0a^4b^4}{8D(3a^4+3b^4+2a^2b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$.

2.293. Указание. Если неоднородность представить в форме

$$\mu(t)=\int_0^t\mu(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t\mu(\tau)\frac{\partial\eta(t-\tau)}{\partial t}d\tau,$$

то естественно предположить, что

$$u(x,t)=\int_0^t\mu(\tau)\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau,$$

где $v(x,t-\tau)$ — решение вспомогательной задачи с неоднородностью $\eta(t-\tau)$, или (после замены $t-\tau\to\tau$) с неоднородностью $\eta(t)$. Остается доказать, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям исходной задачи.

2.294. 1) $u(x,t)=\frac{4F_0}{\pi a\rho S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}(\omega\sin\frac{\pi(2n+1)a}{2l}t-\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\sin\omega t)}{(2n+1)(\omega^2-(\frac{\pi(2n+1)a}{2l})^2)}$;

2) $u(x,t)=\frac{F_0}{\rho\omega^2lS}\left(\omega t-\sin\omega t+\frac{2\omega^2l}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi nx}{l}(\omega\sin\frac{\pi na}{l}t-\frac{\pi na}{l}\sin\omega t)}{n(\omega^2-\frac{\pi na}{l})^2)}\right)$;

3) $u(x,t)=\frac{2F_0}{\rho aS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n^2+p^2)\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)(\omega\sin\frac{\mu_na}{l}t-\frac{\mu_na}{l}\sin\omega t)}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)(\omega^2-(\frac{\mu_na}{l})^2)}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu tg\,\mu=p$, $p=hl$.

2.295. $u(x,t)=\frac{4}{\pi a\rho_0S}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1}\int\limits_0^t F(\tau)\sin\frac{(2n+1)\pi a(t-\tau)}{2l}d\tau$.

2.296. $u(x,t)=\frac{2F_0}{a\rho_0S}\left(t-\frac{l}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2l}{a}\right)$.

2.297. $u(x,t)=\frac{2k}{S\sqrt{E\rho_0}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2+p^2+p}\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)\int\limits_0^t\alpha(\tau)\sin\frac{\mu_na(t-\tau)}{l}d\tau$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=\frac{kl}{ES}$.

2.298. $u(x,t)=\frac{2k}{S\sqrt{\rho_0E}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2+p^2+p}\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)\int\limits_0^t\alpha(\tau)\sin\frac{\mu_n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$.

2.299. Потенциал скоростей

$u(x,t)=\frac{a^2}{l}\int_0^t v(\tau)(t-\tau)\,d\tau+\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{n}\int_0^t v(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau$.

2.300. 1) $u(x,t)=\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1}\int_0^t v(\tau)\sin\frac{(2n+1)\pi a(t-\tau)}{2l}\,d\tau;$

2) $u(x,t)=2a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n^2+q^2)\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n(\mu^2+q^2+q)}\int_0^t v(\tau)\sin\frac{\mu_n a(t-\tau)}{l}\,d\tau,$

μ_n — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=q,\ \ q=\frac{kl}{\gamma P_0}$.

2.301. $u(x,t)=\frac{2\pi a^2}{l^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{l}}{\omega_n}\int_0^t E(\tau)e^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,$

$\omega_n=\frac{\pi^2n^2}{LCl^2}-\frac{R^2}{4L^2}$. **2.302.** $u(r,t)=3a^2\int_0^t\alpha(\tau)d\tau+$

$$+\frac{2a^2r_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\int_0^t\alpha(\tau)\cos\frac{a\mu_n(t-\tau)}{r_0}d\tau,$$

$\mu_n>0$ — корень уравнения $tg\,\mu=\mu$.

Указание Задачу поставить в виде: $u_{tt}=a^2\Delta u+a^2r_0\alpha_t\delta_S,$

$$u_r|_{r=r_0}=0,\ \ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$$

2.303. $u(x,t)=\frac{2}{l}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\int_0^t q(t)e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2D(t-\tau)}d\tau.$

2.304. $u(x,t)=\frac{2a^2h}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\mu_n\sqrt{\mu_n^2+p^2}}{\mu_n^2+p^2+p}\cos\frac{\mu_n x}{l}\int_0^t\mu(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau,$

$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=p,\ \ p=hl.$

2.305. $u(x,t)=\frac{2E_0Rl}{R_2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n^2+p_1^2)\left(p_1\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)+\mu_n\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)\right)}{\mu_n[(\mu_n^2+p_1^2)(\mu_n^2+p_2^2)+(p_1+p_2)(\mu_n^2+p_1p_2)]}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t}\times$

$$\times\left(e^{\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2t_0}-1\right),\ \mu_n>0$$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu\frac{\mu^2-p_1p_2}{p_1+p_2},\ \ p_i=\frac{Rl}{R_i}$.

2.306. $u(r,t)=\frac{3a^2}{2r_0}\Big[\int_0^t q(\tau)d\tau+\frac{2r_0}{3r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\mu_n^2+1}}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}\times$

$$\times\int_0^t q(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2(t-\tau)}\,d\tau\Big],\ \ \mu_n>0$$ корень уравнения $tg\,\mu=\mu$.

2.307. Если $\alpha\neq\lambda_{nk}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{(2k+1)^2}{l_2^2}}$, то

$u(x,y,z)=\frac{8\alpha u_0}{l_1^2}\sum_{n=1,r=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l_2}}{(2k+1)\lambda_{nk}^2-\alpha^2)}\left(\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}-\frac{e^{-\lambda_{nk}z}}{\lambda_{nk}}\right).$

Если $\alpha=\lambda n_0k_0$, то $u(x,y,z)=\frac{8\alpha u_0}{l_1^2}\frac{n_0l_1(1+\alpha z)\,e^{-\alpha z}}{(2k+1)\alpha^2}+$

$$+\frac{8\alpha u_0}{l_1^2}\sum_{\substack{n=1,r=0\\ n\neq n_0,k\neq k_0}}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l_2}}{(2k+1)\lambda_{nk}^2-\alpha^2)}\left(\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}-\frac{e^{-\lambda_{nk}z}}{\lambda_{nk}}\right).$$

2.308. $u(x,y,z)=\frac{8q_0}{k\pi l_2}\sum\limits_{n,m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}}{(2m+1)\alpha_{nm}^2}\left(1-e^{-\alpha_{nn}z}\right),$

$\alpha_{nm}=\pi\sqrt{\left(\frac{2n+1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{2l_2}\right)^2}$.

2.309. $u(x,y,z,t)=\frac{32u_0}{\pi l^2}\sum\limits_{k,m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}}{(2k+1)(2m+1)a_{kmn}}\times$

$$\times\Big(1-e^{-a^2\alpha_{kmn}t}\Big),\quad \alpha_{kmn}=\tfrac{\pi^2}{l^2}[(2k+1)^2+(2m+1)^2+n^2].$$

2.310. $u(x,y)=\frac{J}{2\pi\sigma h}\ln\frac{ch\frac{\pi y}{2l}-\sin\frac{\pi x}{2l}}{ch\frac{\pi y}{2l}+\sin\frac{\pi x}{2l}}+C,\ \ \mathbf{j}=-\sigma\nabla u.$

2.311. $u(r,\varphi)=\frac{J}{\pi\sigma}\ln\frac{r_0}{r}-\frac{J}{2\pi\sigma}\sum_1^\infty(-1)^n\big(\frac{r}{r_0}\big)^{2n}\frac{\cos 2n\varphi}{n}+C,\ \mathbf{j}=-\sigma\big(\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\big).$

2.312. $u(z,\varphi)=C-\frac{J}{2\pi\sigma}\ln\frac{ch\frac{z}{r_0}-\cos\varphi}{ch\frac{z}{r_0}+\cos\varphi},$ плотность тока имеет вид (1.165).

2.313. $u(\theta,\varphi)=C-\frac{J}{4\pi\sigma}\Bigg[\ln\frac{tg^2\frac{\theta}{2}+tg^2\frac{\theta_0}{2}-2\,tg\frac{\theta}{2}tg\frac{\theta_0}{2}\cos(\varphi-\varphi_0)}{1+tg^2\frac{\theta}{2}-2\,tg\frac{\theta}{2}\cos\varphi)}+$

$$+\ln\frac{tg^2\frac{\theta}{2}+ctg^2\frac{\theta_0}{2}-2tg\frac{\theta}{2}ctg\frac{\theta_0}{2}\cos(\varphi-\varphi_0)}{1+tg^2\frac{\theta}{2}-2tg\frac{\theta}{2}\cos\varphi)}\Bigg].$$

Плотность тока имеет вид (1.166). Указание. Задачу поставить в форме

$$\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\tfrac{\partial u}{\partial\theta}+\tfrac{1}{\sin^2\theta}\tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=-\tfrac{J}{\sigma}\Big[\tfrac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\cdot\delta(\varphi-\varphi_0)-\tfrac{\delta(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin\theta}\cdot\delta(\varphi)\Big],$$

$$0<\theta,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$

$$|u(0,\varphi)|<\infty,\quad \tfrac{\partial}{\partial\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0.$$

Продолжить функцию $u(\theta,\varphi)$ на всю сферу и воспользоваться указанием к задаче 2.127.

2.314. $\omega_{mn}=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\frac{\mu_{mn}}{r_0},\ \ v_{mn}(r,\varphi)=(A_{mn}cos\,m\varphi+B_{mn}sin\,m\varphi)J_m(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r),$ $m\in\mathbf{N}_0,\ n\in\mathbf{N},\ \mu_{mn}>0$ — нуль с номером n функции Бесселя $J_m(\mu)$.

2.315. $\omega_{mn}=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\frac{\mu_{mn}}{r_0},\ \ v_{mn}(r,\varphi)=A_{mn}\,sin\frac{\pi m\varphi}{\alpha}J_{\frac{\pi m}{\alpha}}(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r),\ \ m\in\mathbf{N}_0,\ \ n\in\mathbf{N},$ $\mu_{mn}>0$ — нуль с номером n функции Бесселя $J_{\frac{\pi m}{\alpha}}(\mu)$.

2.316. $\omega_n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l(\nu+1)}}\mu_{\nu n}$. Указание. Натяжение струны

$$T(x)=\int_0^l g\rho(x)\,dx=\tfrac{lgA}{\nu+1}\left(1-\tfrac{x}{l}\right)^{\nu+1},$$

$\omega_k=\sqrt{\lambda_k},\ \lambda_k$ — собственные значения задачи (см. пример 1.3.)

$$\tfrac{d}{dx}\left(1-\tfrac{x}{l}\right)^{\nu+1}\tfrac{dX}{dx}+\tfrac{(\nu+1)\lambda}{lg}\left(1-\tfrac{x}{l}\right)^{\nu}X=0,\quad 0<x<l,$$

$$X(0)=0,\quad lim_{x\to l}\left(1-\tfrac{x}{l}\right)^{\nu+1}X'(x)=0.$$

Уравнение для $X(x)$ является частным случаем линейного дифференциального уравнения

$$x^2v''+(1+2\alpha)xv'+\left[(\beta\gamma z^\gamma)^2+(\alpha^2-\nu^2\gamma^2)\right]v=0, \tag{2.98}$$

которое заменой $\xi=\beta x^\gamma,\ w=x^\alpha v$ преобразуется в уравнение Бесселя порядка $\nu:\ \xi^2w''+\xi w'+(\xi^2-\nu^2)w=0$. В данной ситуации нужно сделать замену: $1-\frac{x}{l}=\frac{\xi^2g}{4\lambda l(\nu+1)},\quad X=\xi^{-\nu}v(\xi)$. **2.317.** $l_k=\left(\frac{3l_2^2E\mu_1^2}{4\rho g}\right)^{\frac{1}{3}},\ \mu_1>0$ наименьший корень уравнения $J_{-\frac{1}{3}}(\mu)=0$. Указание. Уравнение (1.22) равновесия стержня под действием сил тяжести запишется в виде

$$JEu_{xx}=\int_x^l q(u(\xi)-u(x))\,d\xi,\ \ q=4l_1l_2\rho g,$$

при этом $u'(0)=u''(l)=0$. После дифференцирования по x и замены $v=u_x$

получается задача на собственные значения:

$$v''+\lambda(l-x)v=0,\quad 0<x<l,\quad \lambda=\tfrac{q}{ES},$$
$$v(0)=v'(l)=0.$$

Уравнение для v является частным случаем уравнения (2.98).

2.318. $\chi=\frac{r_0}{2L}\frac{I_0\left(\frac{r_0}{L}\right)}{I_1\left(\frac{r_0}{L}\right)}$.

2.319. 1) $\Phi_1(r)=\frac{q_0L}{2\pi D}\frac{I_0\left(\frac{\tilde r_0}{L}\right)K_0\left(\frac{r}{L}\right)-K_0\left(\frac{\tilde r_0}{L}\right)I_0\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\tilde r_0}{L}\right)}$;

2) $\Phi_2(r)=\frac{q_0L}{2\pi D}\frac{\left(I_0\left(\frac{r_0}{L}\right)+\frac{2D}{L}I_1\left(\frac{r_0}{L}\right)\right)K_0\left(\frac{r}{L}\right)-\left(K_0\left(\frac{r_0}{L}\right)-\frac{2D}{L}K_1\left(\frac{r_0}{L}\right)\right)I_0\left(\frac{r}{L}\right)}{\left(I_0\left(\frac{r_0}{L}\right)+\frac{2D}{L}I_1\left(\frac{r_0}{L}\right)\right)}$,

$\Phi_1(r)\approx\Phi_2(r)\frac{q_0L}{2\pi D}\frac{I_0\left(\frac{r_0}{L}\right)K_0\left(\frac{r}{L}\right)-K_0\left(\frac{r_0}{L}\right)I_0\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{r_0}{L}\right)}$,

$L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}}$, $D=\frac{1}{3\Sigma_c}$. См. указание к задаче 2.32.

2.320. $\Phi(r)=\frac{\Phi_0I_0\left(\frac{r}{L}\right)}{I_0(\varkappa)+\frac{2D}{L}I_1(\varkappa)}$, $\gamma=\frac{1-\frac{2D}{L}\frac{I_1(\varkappa)}{I_0(\varkappa)}}{1+\frac{2D}{L}\frac{I_1(\varkappa)}{I_0(\varkappa)}}$, $\varkappa=\frac{r_0}{L}$, $L=\sqrt{\frac{D}{\Sigma_c}}$, $D=\frac{1}{3\Sigma_c}$.

2.321. 1) $\tilde r_k=\frac{\mu_{01}}{\alpha}$; 2) $r_k=\frac{\mu}{\alpha}$, где $\mu>0$ — наименьший корень уравнения $J_0(\mu)-\alpha DJ_1(\mu)=0$. **2.322.** $V=\frac{3\sqrt3\pi^2\mu_{01}^2}{2\alpha^3}$.

2.323. $D_C\sqrt{\alpha_C^2-\frac{\mu_{01}}{\tilde r_0^2}}tg\sqrt{\alpha^2-\frac{\mu_{01}}{\tilde r_0^2}}l=D_R\sqrt{\frac{1}{L_R^2}+\frac{\mu_{01}}{\tilde r_0^2}}cth\sqrt{\frac{1}{L_R^2}+\frac{\mu_{01}}{\tilde r_0^2}}(\tilde h-l)$,

где D_C и L_R те же, что в ответе к задаче 2.41.

2.324. $r_k=\frac{\mu_{01}}{\sqrt\lambda}$, где λ — корень уравнения (2.79).

2.325. $r_k=\frac{\mu_{01}}{\sqrt\lambda}$, где λ — корень уравнения (2.81).

2.326. $r_k=\sqrt{\frac{D}{\beta}}\mu_{01}$. **2.327.** $\tau=\left(\frac{r_0}{a\mu_{01}}\right)^2$, $a^2=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$.

2.328. $R_{nm}(r,\varphi,z,t)=A_{nm}J_n\left(\frac{\gamma_{nm}r}{r_0}\right)\cos(n\varphi+\delta_n)\,ch\frac{\gamma_{nm}(z+h_0)}{r_0}\cos(\omega_{nm}t+\beta_{nm})$,

$\omega_{nm}^2=\frac{g\gamma_{nm}}{r_0}th\frac{\gamma_{nm}h_0}{r_0}$, $\gamma_{nm}>0$ — нуль функции $J_n'(\gamma)=0$, $n\in\mathbf{N}_0$, $m\in\mathbf{N}$.
Указание. См.задачу 1.231 п.1. **2.329.** $\omega_1=\frac{2}{l}\sqrt{gh_0}\,\mu_{01}$, $\omega_2=\frac{2}{l}\sqrt{gh_0}\,\mu_{11}$.
Указание. См. задачу 1.235.

2.330. 1) $\zeta(x,t)=A\frac{J_0(kx)}{J_0(kl)}\cos\omega t$, $k=\frac{\omega}{\sqrt{gh_0}}$;

2) $\zeta(x,t)=A\frac{J_0(2\sqrt{kx})}{J_0(2\sqrt{kl})}\cos\omega t$, $k=\omega\sqrt{\frac{l}{gh_0}}$;

3) $\zeta(x,t)A\sqrt{\frac{l}{x}}\frac{J_1(2\sqrt{kx})}{J_1(2\sqrt{kl})}\cos\omega t$, $k=\omega\sqrt{\frac{l}{gh_0}}$.

Указание. См. задачу 1.236. **2.331.** $\omega_{0TM}=\frac{c}{r_0}\mu_{01}\approx\frac{2.41\,c}{r_0}$; $\omega_{0TE}=\frac{c}{r_0}\mu_{11}\approx\frac{1.84\,c}{r_0}$.
Указание. См. задачу 2.51.

2.332. $\psi_{ns}(r,\varphi)=\frac{1}{r_0\sqrt\pi J_{n+1}(\mu_{ns})}J_n\left(\frac{\mu_{ns}r}{r_0}\right)e^{in\varphi}$, $E_{ns}=\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\mu_{ns}^2$, $n\in\mathbf{Z}$, $s\in\mathbf{N}$. Указание. Для вычисления нормы собственной функции применить формулу

$$\int_0^l J_\nu^2\left(\frac{\mu x}{l}\right) x\,dx = \frac{l^2}{2}\left\{[(J'(\mu)]^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)\right\} \quad \nu > -1, \qquad (2.99)$$

которая получается тем же способом, что и соотношение (2.44), полученное в примере 2.14.

2.333. $u(r,t) = \frac{2I}{\pi a r_1 \rho_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_{0n} r_1}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}^2 J_1^2(\mu_{0n})} \sin\frac{\mu_{0n} a}{r_0} t.$

2.334. $u(r,t) = \frac{2p_0 r_0 r_1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_{0n} r_0}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)\cos\frac{\mu_{0n} a}{r_0} t}{\mu_{0n}^3 J_1^2(\mu_{0n})}.$

2.335. $u(r,\varphi,t) = 2r_0 V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\cos\frac{\mu_n a t}{r_0}}{\mu_n(\mu^2-1)J_0(\mu)}\cos\varphi,$ $\mu_n > 0$ — корень уравнения $J_1'(\mu) = 0$. **2.336.** $u(x,t) = \frac{2I}{a\rho_0 S_0}\left(\frac{at}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_{1n}(1-\frac{x}{l}))}{\mu_{1n} J_0(\mu_{1n})}\sin\frac{\mu_{1n} a}{l} t\right).$

2.337. $u(x,t) = \frac{m}{m+m_0} V_0 t + \frac{2plV_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu\left(1-\frac{x}{l}\right)\right)}{(\mu^2+p^2+2p)\mu J_0(\mu)}\sin\frac{\mu_n a}{l} t,$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu J_0(\mu) + pJ_1(\mu) = 0$, $p = \frac{2m_0}{m}$, $m_0 = \frac{\rho_0 S_0 l}{2}$.

2.338. $u(x,t) = \frac{4F_0}{g\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_{0n}\sqrt{1-\frac{x_0}{l}}) J_0(\mu_{0n}\sqrt{1-\frac{x}{l}})}{\mu_{0n}^2 J_1^2(\mu_{0n})}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\mu_{0n} t\right).$

2.339. $u(x,t) = 8u_0\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_{0n}\sqrt{1-\frac{x}{l}}\right)}{\mu_{0n}^3 J_1(\mu_{0n})}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\mu_{0n} t\right).$

2.340. $u(x,t) = \frac{2I}{\rho_0}\sqrt{\frac{\nu+1}{gl}}\frac{1}{\xi_0^\nu \xi^\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\mu_{\nu n}\xi_0) J_\nu(\mu_{\nu n}\xi)}{\mu_{\nu n} J_{\nu-1}^2(\mu_{\nu n})}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l(\nu+1)}}\mu_{\nu n} t\right),$

$\xi = \sqrt{1-\frac{x}{l}}$. **2.341.** $u(r,t) = \frac{F_0}{\pi T_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r_1}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}^2 J_1^2(\mu_{0n})}\left(1-\cos\frac{\mu_{0n} a}{r_0} t\right).$

2.342. Если $\omega \neq \omega_n = \frac{\mu_{0n} a}{r_0}$, то

$u(r,t) = \frac{\omega F_0}{\pi a r_0 \rho_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r_1}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n} J_1^2(\mu_{0n})}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2}.$

Если $\omega = \omega_{n_0}$, то

$$u(r,t) = \frac{\omega F_0}{\pi a r_0 \rho_0}\left[\frac{a J_0\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{2r_0\omega^2 J_1^2\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)} t\sin\omega t + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r_1}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n} J_1^2(\mu_{0n})}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2}\right].$$

2.343. $u(r,t) = \frac{F_0}{\pi T_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}^2 J_1^2(\mu_{0n})}\times$

$$\times\left[1-\cos\frac{\mu_{0n} a}{r_0} t - \left(1-\cos\frac{\mu_{0n} a}{r_0}(t-t_0)\right)\eta(t-t_0)\right].$$

2.344. Если $\omega \neq \omega_n = \frac{\mu_{0n} a}{r_0}$, то

$u(r,t) = \frac{F_0}{\pi a r_0 \rho_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n} J_1^2(\mu_{0n})}\frac{\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}.$

Если $\omega = \omega_{n_0}$, то $u(r,t) = \frac{F_0}{\pi a r_0 \rho_0}\left[\frac{a J_0(\frac{\omega r}{a})}{2r_0\omega^2 J_1^2(\frac{\omega r_0}{a})}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) + \right.$

$$\left. + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{r_0}\right)}{\mu_{0n} J_1^2(\mu_{0n})}\frac{\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}\right].$$

2.345. $u(x,t)=\frac{p_0 l}{g\rho_0}\left(\frac{x}{l}-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_{0n}\sqrt{1-\frac{x}{l}}\right)}{\mu_{0n}^3 J_1(\mu_{0n})}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\mu_{0n}t\right)\right)$.

2.346. $u(r,t)=2a^2\left[\int_0^t\alpha(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{J_0(\mu_{1n})}\int_0^t\alpha(\tau)\cos\frac{\mu_{1n}a}{r_0}(t-\tau)\,d\tau\right]$.

2.347. Потенциал скоростей

$u(r,\varphi,t)=2aV_0\sin\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{(\mu_n^2-1)J_1(\mu_n)}\int_0^t\alpha(\tau)\sin\frac{\mu_n a}{r_0}(t-\tau)\,d\tau$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения $J_1'(\mu)=0$.

2.348. $u(r,z,t)=\frac{a^2V_0}{2l}\Big[\int_0^t\alpha(\tau)(t-\tau)d\tau-16\sum_{m=0,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\cos\frac{m\pi}{l}z}{(1+\delta_{m0})\mu_{1n}^2\omega_{mn}J_0(\mu_{1n})}\times$

$\times\int_0^t\alpha(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)d\tau\Big],\ \ \omega_{mn}=a\sqrt{\left(\frac{\mu_{1n}}{r_0}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}$.

2.349. $u(x,t)=\frac{F_0t^2}{\rho_0 lS_0}+\frac{F_0 l}{2ES_0}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{2x}{l}+\frac{1}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_{1n}^2\left(1-\frac{x}{l}\right)\right)}{\mu_{1n}^2J_0(\mu_{1n})}\cos\frac{\mu_{1n}a}{l}t\right)$.

2.350. 1) $u(r,t)=\frac{Q_0}{\pi k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}^2J_1^2(\mu_{0n})}e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2t}$;

2) $u(r,t)=\frac{Q_0}{\pi k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{(\mu_n^2+p^2)J_0^2(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2t}$,

$\mu_n>0$ — корень уравнения

$$pJ_0(\mu)-\mu J_1(\mu)=0,\ \ p=r_0h. \tag{2.100}$$

2.351. $u(r,t)=\frac{I}{\pi a r_0\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)\sin\frac{\mu_n a}{r_0}t}{(\mu_n^2+p^2)J_0^2(\mu_n)}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.100). **2.352.** $u(r,z,t)=2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}J_1(\mu_{0n})}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}\right)t}\sin\frac{\pi z}{l}$.

2.353. $u(r,\varphi,t)=-2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}J_0(\mu_{1n})}e^{-\left(\frac{\mu_{1n}a}{r_0}\right)^2t}\sin\varphi$. **2.354.** $u(r,\varphi,t)=$

$=-4u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n^2-4)J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2(\mu_n^2-1)J_0(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2t}\sin\varphi$, $\mu_n>0$ — нуль функции $J_1'(\mu)$.

2.355. $u(r,\varphi,t)=2(p+2)u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2t}}{(\mu_n^2+p^2-4)J_2(\mu_n)}\cos2\varphi$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu J_2'(\mu)+pJ_2(\mu)=0$, $p=r_0h$.

2.356. $u(r,\varphi,t)=-16u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}^3J_0(\mu_{1n})}\cos\frac{\mu_{1n}at}{r_0}\sin\varphi$.

2.357. $u(r,\varphi,t)=\frac{4Ir_1}{\pi\rho a r_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2m+1}\left(\frac{\mu_{mn}r_1}{r_0}\right)J_{2m+1}\left(\frac{\mu_{mn}r}{r_0}\right)\sin(2m+1)\varphi\cos\frac{\mu_{mn}at}{r_0}}{\mu_{mn}J_{2m+2}^2(\mu_{mn})}$,

где $\mu_{mn}>0$ — нуль функции $J_{2m+1}(\mu)$.

2.358. $u(r,t)=\frac{2p}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p\int_0^{r_0}u_0(r)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)r\,dr+r_0^2u_0(r_0)J_0(\mu_n)}{(\mu_n^2+p^2+2p)J_0^2(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)e^{-\frac{\mu_n a}{r_0}t}$,

$p=\frac{2\pi r_0^2\rho_0 C}{C_0}$, $0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\ldots$ — корни уравнения $\mu J_0(\mu)+pJ_1(\mu)=0$.

2.359. Если $\alpha \neq \left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2$, то

$$u(r,t) = \frac{Q_0a^2}{k\alpha}\left(\frac{J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}r_0\right)} - 1\right)e^{-\alpha t} - \frac{2Q_0}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right)J_1(\mu_{0n})}.$$

Если $\alpha = \left(\frac{\mu_{0n_0}a}{r_0}\right)^2$, то

$$u(r,t) = \frac{Q_0a^2}{kr_0\alpha J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)}\left[\frac{a}{\sqrt{\alpha}}(1+2\alpha t)J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\right) + rJ_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\right)\right]e^{-\alpha t} +$$

$$+\frac{Q_0a^2}{kr_0\alpha J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)}r_0J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)e^{-\alpha t} - \frac{2Q_0}{k}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right)J_1(\mu_{0n})}.$$

Другая форма ответа:

$$u(r,t) = \frac{2Q_0}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right)J_1(\mu_{0n})}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}\right).$$

2.360. $u(r,t) = u_0\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}J_1(\mu_{0n})}e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}\right)$.

2.361. $v(r,t) = \omega r_0\left[\frac{r}{r_0} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}J_0(\mu_{1n})}e^{-\left(\frac{\mu_{1n}}{r_0}\right)^2\nu t}\right]$, $\quad v(r,\infty) = \omega r_0$, т.е. жидкость вращается как твердое тело. Указание. См. задачу 1.245.

2.362. $u(r,t) = u_0\left[1 - 2p\sum_{n=1}^{\infty}h\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{(\mu_n^2+p^2)J_0(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}\right]$,
$\mu_n > 0$ — корень уравнения (2.100)

2.363. $u(r,t) = \frac{Ar_0^2}{4a^2}\left(\frac{4a^2t}{r_0^2} + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{p+2}{p} + 8p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2(p^2+\mu_n^2)J_0(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}\right)$,
$\mu_n > 0$ — корень уравнения (2.100).

2.364. $u(r,t) = 2pu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)e^{-D\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n^2(p^2+\mu_n^2)J_0(\mu_n)} -$

$$-\frac{2hu_1D}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2(p^2+\mu_n^2)J_0(\mu_n)}\frac{e^{-D\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t} - e^{-\alpha t}}{D\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 - \alpha^2},$$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения (2.100).

2.365. $u(r,t) = \frac{2r_0f_0}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r_1}{r_0}\right)J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}^2J_0^2(\mu_{1n})}\left(1 - \cos\frac{\mu_{1n}a}{r_0}t\right)\cos\varphi$.

2.366. $u(r,t) = u_0\left[\frac{r}{r_0} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}J_0(\mu_{1n})}e^{-\left(\frac{\mu_{1n}a}{r_0}\right)^2 t}\right]\sin\varphi$.

2.367. $u(r,\varphi,t) = -\frac{q_0r_0}{D}\left[\frac{r}{r_0} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-D\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n(\mu_n^2-1)J_0(\mu_n)}\right]\cos\varphi$,

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $J_1'(\mu) = 0$.

2.368. $u(r,\varphi,t) = pu_0 \left[\frac{1}{p+2}\frac{r^2}{r_0^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{(\mu_n^2+p^2-4)J_2(\mu_n)} \right] \cos 2\varphi,$

$\mu_n > 0$ — корень уравнения $\mu J_2'(\mu) + pJ_2(\mu) = 0, \;\; p = r_0 h.$

2.369. $u(r,\varphi,t) = \frac{2q_0 r_0}{k}\left(\frac{r}{2r_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{(\mu_n^2-1)J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t} \right) \sin\varphi\,,$

$\mu_n > 0$ —нуль функции $J_1'(\mu)$.

2.370. $u(r,\varphi,t) = 2hr_0 A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{(p^2+\mu_n^2-1)J_1(\mu_n)} \left(t - \frac{1-e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2} \right) \cos\varphi\,,$

$\mu_n > 0$ — нуль функции $J_1'(\mu)$.

2.371. $u(r,z,t) = u_0 \left[\frac{I_0\left(\frac{\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{\pi r_0}{l}\right)} - \frac{2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{0n} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\left(\frac{\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}\right) J_1(\mu_{0n})} e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t} \right] \sin\frac{\pi z}{l}\,.$

2.372. $u(r,z,t) = \frac{8u_0}{r_0^2} \sum_{n=1,m=0}^{\infty} \frac{\mu_{0n} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right) \sin\frac{(2m+1)\pi}{l} z}{(2m+1)\alpha_{nm} J_1(\mu_{0n})} \left(1 - e^{-a^2\alpha_{nm}t}\right)\,,$

$\alpha_{nm} = \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{l}\right)^2.$

2.373. $u(r,z,t) = \frac{2a^2 u_0}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{0n} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{J_1(\mu_{0n})} \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{-a^2\lambda_n t}}{a^2\lambda_n - \alpha} \cdot \cos\frac{\pi z}{l}\,,$

$\lambda_n = \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$ Другая форма ответа:

$u(r,z,t) = u_0 \left[\frac{I_0\left(\frac{\beta r}{r_0}\right)}{I_0(\beta)} e^{-\alpha t} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{0n} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right) e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r}\right)^2 t}}{(\beta^2+\mu_{0n}^2)J_1(\mu_{0n})} \right] \cos\frac{\pi z}{l}, \;\; \beta = \frac{\pi r_0}{l}.$

2.374. $u(r,\varphi,z) = -2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right) sh\frac{\mu_{1n}z}{r_0}}{\mu_{1n} J_0(\mu_{1n}) sh\frac{\mu_{1n}l}{r_0}} \cos\varphi\,.$

2.375. $u(r,z) = C - \frac{I}{\pi\sigma r_0} \left[\frac{z}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right) sh\frac{\mu_{1n}z}{r_0}}{\mu_{1n} J_0^2(\mu_{1n}) ch\frac{\mu_{1n}l}{r_0}} \right].$

2.376. $u(r,z,t) = \frac{4q}{kl} \sum_{n=1,m=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right) \cos\frac{\pi m}{l} z \, e^{-a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2}+\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}\right)t}}{\mu_{0n}\left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2}+\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}\right) J_1(\mu_{0n})(1+\delta_{0m})}.$

2.377. $u(r,z) = 2pu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) sh\frac{\mu_n z}{r_0}}{(\mu_n^2+p^2) J_0(\mu_n) sh\frac{\mu_n l}{r_0}}$, $\mu_n > 0$ — корень (2.100).

2.378. $u(r,z) = \frac{Q_0}{4k}(r_0^2 - r^2) + \frac{2q_0 r_0}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right) ch\frac{\mu_{0n}z}{r_0}}{\mu_{0n}^2 J_1(\mu_{0n}) ch\frac{\mu_{0n}l}{r_0}}.$

2.379. $u(r,z) = \frac{2Q_0}{\pi k r_1} \left[\frac{r_1 z}{2r_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r_1\right) J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right) sh\frac{\mu_{1n}z}{r_0}}{\mu_{1n}^2 J_0^2(\mu_{1n}) ch\frac{\mu_{1n}l}{r_0}} \right].$

2.380. $u(r,\varphi,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\sin n\varphi+$

$$+2\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{a_nJ_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_{nm}a}{r_0}\right)^2t}}{\mu_{nm}J_{n-1}(\mu_{nm})}\sin n\varphi\,,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

2.381. $u(r,\varphi,t)=\frac{8pu_0}{\pi}\sum\limits_{n=0,m=1}^{\infty}\frac{J_{2n+1}\left(\frac{\gamma_{nm}}{r_0}r\right)\left(1-e^{-\left(\frac{\gamma_{nm}a}{r_0}\right)^2t}\right)}{(2n+1)(p^2+\gamma_{nm}^2-(2n+1)^2)J_{2n+1}(\gamma_{nm})}\sin(2n+1)\varphi,$

$\gamma_{nm}>0$ — корень уравнения $\gamma J'_{2n+1}(\gamma)+pJ_{2n+1}(\gamma)=0,\ \ p=hr_0.$

2.382. $u(r,\varphi,t)=u_0\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\nu}\left(\frac{\mu_{\nu n}}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_{\nu n}a}{r_0}\right)^2t}}{\mu_{\nu n}J_{\nu+1}(\mu_{\nu n})}\right]\cos\nu\varphi,\ \ \nu=\frac{\pi}{\alpha}.$

2.383. 1) $u(r,t)=\frac{gr_0^2}{4a^2}\left[1-\frac{r^2}{r_0^2}-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{\mu_{0n}^3J_1(\mu_{0n})}\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\right]$; 2) $u(r,t)=\frac{gt^2}{2}$;

3) $u(r,t)=\frac{g}{4a^2}\left[(1+\frac{2}{p})r_0^2-r^2\right]-\frac{2pgr_0^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma}{r_0}\right)\cos\frac{a\gamma t}{r_0}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2+p^2)J_{\nu}(\gamma_n)}$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma J_1(\gamma)=pJ_0(\gamma),\ p=hr_0.$

2.384. $u(r,t)=f(r)-\frac{2p_0r_0r_1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{0n}r_1}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^3J_1^2(\mu_{0n})},$

$f(r)=\frac{p_0}{4T}\begin{cases}r_1^2-r^2+2r_1^2\ln\frac{r_0}{r_1}, & 0\le r\le r_1,\\ 2r_1^2\ln\frac{r_1}{r}, & r_1\le r\le r_0.\end{cases}$

2.385. $u(r,t)=\frac{Ar^2}{r_0}+\frac{a^2At^2}{r_0}-\frac{Ar_0}{2}-4Ar_0\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r)e^{-\left(\frac{a\mu_{1n}}{r_0}\right)^2t}}{\mu_{1n}^2J_0(\mu_{1n})}.$

2.386. 1) $u(r,t)=\frac{A}{36a^2}(r_0^6-r^6)-\frac{2Ar_0^6}{a^2}\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(\mu_{0n}^2-8)^2J_0(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r)\cos\frac{a\mu_{0n}t}{r_0}}{\mu_{0n}^7J_1(\mu_{0n})}$;

2) $u(r,t)=\frac{Ar^2}{12a^2}\left(r_0^4-\frac{r^4}{3}\right)+\frac{Ar_0^4t^2}{4}-\frac{5Ar_0^6}{144a^2}-\frac{8Ar_0^6}{a^2}\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(\mu_{1n}^2-8)J_0(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r)\cos\frac{a\mu_{1n}t}{r_0}}{\mu_{1n}^6J_0(\mu_{1n})}$;

3) $u(r,t)=\frac{A}{36a^2}\left(1+\frac{6}{p}(r_0^6-r^6)\right)-\frac{2Ar_0^6}{a^2}\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\left((p+4)\gamma_n^4-16(p+2)\gamma_n^2+64p\right)J_0(\frac{\gamma_n}{r_0}r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_0}}{\gamma_n^6(p^2+\gamma_n^2)J_0(\gamma_n)}$,

$\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma J_1(\gamma)=pJ_0(\gamma),\ p=r_0h.$

2.387. 1) $u(r,t)=\frac{A}{a^2\beta^2}\left(\frac{r^{\nu}}{r_0^{\nu}}J_{\nu}(\beta r_0)-J_{\nu}(\beta r)\right)-$

$-\frac{2AJ_{\nu}(\beta r_0)}{a^2}\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{J_{\nu}(\frac{\mu_{\nu n}}{r_0}r)\cos\frac{a\mu_{\nu n}t}{r_0}}{\mu_{\nu n}\left(\frac{\mu_{\nu n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_{\nu+1}(\mu_{\nu n})}$ при условии $\beta\ne\frac{\mu_n^2}{r_0^2}$, если $\beta=\frac{\mu_m^2}{r_0^2}$, то

$u(r,t)=\frac{Ar_0^2}{a^2\mu_m^2}(1-\cos\frac{a\mu_{\nu m}t}{r_0})J_{\nu}(\frac{\mu_{\nu m}}{r_0}r)$;

2) $u(r,t)=\frac{A}{a^2\beta^2}\left(J_{\nu}(\beta r_0)-\frac{\beta r^{\nu}J'_{\nu}(\beta r_0)}{\nu r_0^{\nu-1}}\right)-\frac{2A\beta r_0J'_{\nu}(\beta r_0)}{a^2}\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{J_{\nu}(\frac{\gamma_n}{r_0}r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_0}}{(\gamma_n^2-\nu^2)\left(\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_{\nu}(\gamma_n)}$

при $\beta\ne\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}$, $\gamma_n>0$ — нуль $J'_{\nu}(\gamma)$, если $\beta=\frac{\gamma_m^2}{r_0^2}$, то

$$u(r,t)=\frac{Ar_0^2}{a^2\gamma_m^2}(1-\cos\frac{a\gamma_mt}{r_0})J_{\nu}(\frac{\gamma_m}{r_0}r)$$

3) $u(r,t)=\frac{A}{a^2\beta^2}\big(J_\nu(\beta r)-\frac{\beta r_0 J_\nu'(\beta r_0)+p\,J_\nu(\beta r_0)}{(p+\nu)r_0^\nu}r^\nu\big)-\frac{2A}{a^2}(\beta r_0 J_\nu'(\beta r_0)+p\,J_\nu(\beta r_0))\times$
$\times\sum_1^\infty \frac{J_\nu(\frac{\gamma_n}{r_0}r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_0}}{(\gamma_n^2-\nu^2)\big(\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}-\beta^2\big)J_\nu(\gamma_n)}$, при $\beta\neq\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}$, где $\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma\,J_\nu'(\gamma)+p\,J_\nu(\gamma)=0$, $p=hr_0$, $u(r,t)=\frac{Ar_0^2}{a^2\gamma_m^2}(1-\cos\frac{a\gamma_m t}{r_0})J_\nu(\frac{\gamma_m}{r_0}r)$ при $\beta=\frac{\gamma_m^2}{r_0^2}$.

2.388. $u(r,t)=\frac{A}{a^2\beta^2}\big(\frac{\beta I_1(\beta r_0)}{2r_0}r^2-I_0(\beta r)\big)+\frac{AI_1(\beta r_0)}{\beta r_0}t^2-\frac{2AI_1(\beta r_0)}{a^2\beta^3 r_0}\big(1+\frac{\beta^2 r_0^2}{8}\big)+$
$+\frac{2\beta r_0 AI_1(\beta r_0)}{a^2}\sum_1^\infty\frac{J_0(\frac{\mu_{1n}}{r_0}r)\cos\frac{a\mu_{1n}t}{r_0}}{\mu_{1n}^2\big(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}+\beta^2\big)J_0(\mu_{1n})}$, если $\beta=0$, то $u(r,t)=\frac{At^2}{2}$.

2.389. 1) $u(r,t)=\frac{Q_0}{4k}(r_0^2-r^2)-\frac{2Q_0r_0^2}{k}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)e^{-\left(\frac{a\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}^3J_1(\mu_{0n})}$; 2) $u(r,t)=\frac{Q_0t}{C\rho}$;

3) $u(r,t)=\frac{Q_0}{4k}\Big[(1+\frac{2}{p})r_0^2-r^2\Big]-\frac{2pr_0^2Q_0}{k}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\gamma}{r_0}\big)e^{-\left(\frac{a\gamma_n}{r_0}\right)^2 t}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2+p^2)J_\nu(\gamma_n)}$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma J_1(\gamma)=pJ_0(\gamma)$, $p=hr_0$.

2.390. 1) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2}(r_0^2-r^2)t-\frac{2Ar_0^3}{a^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^4J_1(\mu_{0n})}$;

2) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2}(r_0^2-r^2)t^2-\frac{A}{32a^4}(r_0^2-r^2)(3r_0^2-r^2)+\frac{4Ar_0^4}{a^4}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^5J_1(\mu_{0n})}$;

3) $u(r,t)=\frac{A}{16a^2}(r_0^4-r^4)t-\frac{2Ar_0^5}{a^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{(\mu_{0n}^2-4)J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^6J_1(\mu_{0n})}$;

4) $u(r,t)=\frac{A}{16a^2}(r_0^4-r^4)t^2-\frac{A}{288a^4}(r_0^2-r^2)(8r_0^4-r_0^2r^2-r^4)+$
$+\frac{4Ar_0^6}{a^4}\sum_{n=1}^\infty\frac{(\mu_{0n}^2-4)J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^7J_1(\mu_{0n})}$;

5) $u(r,t)=\frac{A}{a^2}\Big(1-\frac{I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big)}{I_0\big(\frac{\alpha r_0}{a}\big)}\Big)e^{-\alpha t}+\frac{2A}{a^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\big(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0n}}\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}-\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\big)}{\mu_{0n}\big(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\big)J_1(\mu_{0n})}$;

6) $u(r,t)=\frac{A}{a^2}\Big(\frac{4a^2}{a^4}+r^2-\frac{(4a^2+\alpha^2r_0^2)I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big)}{\alpha^2I_0\big(\frac{\alpha r_0}{a}\big)}\Big)e^{-\alpha t}-$
$+\frac{2Ar_0^2}{a^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{(\mu_{0n}^2-4)J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\big(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0n}}\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}-\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\big)}{\mu_{0n}^3\big(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\big)J_1(\mu_{0n})}$;

7) если $\beta\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$, то

$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(J_0(\beta r_0)-J_0(\beta r)\big)t-\frac{2r_0AJ_0(\beta r_0)}{a^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^2\big(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\beta^2\big)J_1(\mu_{0n})}$,

если $\beta=\frac{\mu_{0m}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{Ar_0^3}{a^3\mu_{0n}^3}\big(\frac{a\mu_{0n}t}{r_0}-\sin\frac{a\mu_{0n}t}{r_0}\big)J_0\big(\frac{\mu_{0m}r}{r_0}\big)$;

8) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(I_0(\beta r)-I_0(\beta r_0)\big)-\frac{2r_0AI_0(\beta r_0)}{a^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\big(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\big)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^2\big(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\beta^2\big)J_1(\mu_{0n})}$;

9) если $\beta\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2+\alpha^2}\Big(J_0(\beta r)-\frac{J_0(\beta r_0)}{I_0\big(\frac{\alpha r_0}{a}\big)}I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big)\Big)e^{-\alpha t}+$

$$+\frac{2AJ_0(\beta r_0)}{a^2r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{0n}J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0n}}\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}-\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_1(\mu_{0n})},\quad \text{если } \beta=\frac{\mu_{0m}}{r_0},$$

то $u(r,t)=\frac{A}{a^2\left(\frac{\mu_{0m}}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)}\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0m}}\sin\frac{a\mu_{0m}t}{r_0}-\cos\frac{a\mu_{0m}t}{r_0}+e^{-\alpha t}\right)J_0\left(\frac{\mu_{0m}r}{r_0}\right)$;

10) если $\beta\neq\frac{\alpha}{a}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\alpha^2-\beta^2a^2}\left(I_0(\beta r)-\frac{I_0(\beta r_0)}{I_0\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}I_0\left(\frac{\alpha r}{a}\right)\right)e^{-\alpha t}-$

$$-\frac{2AI_0(\beta r_0)}{a^2r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{0n}J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0n}}\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}-\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\beta^2\right)J_1(\mu_{0n})},$$

если $\beta=\frac{\alpha}{a}$, то $u(r,t)=\frac{A}{2\alpha aI_0\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}\left(r_0I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)I_0\left(\frac{\alpha r}{a}\right)-rI_1\left(\frac{\alpha r}{a}\right)I_0\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)\right)e^{-\alpha t}-$

$$-\frac{2AI_0\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}{a^2r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{0n}J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{0n}}\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}-\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)^2J_1(\mu_{0n})};$$

11) если $\beta\neq\frac{\omega}{a}$, $\beta\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$, $\omega\neq\omega_n$, где $\omega_n=\frac{a\mu_{0n}}{r_0}$, то

$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2-\omega^2}\left(J_0(\beta r)-\frac{J_0(\beta r_0)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right)\sin\omega t-$

$$-\frac{2\omega AJ_0(\beta r_0)}{a^3r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_1(\mu_{0n})},\quad \text{если } \beta\neq\frac{\omega}{a}=\frac{\mu_{0m}}{r_0},\text{то}$$

$$u(r,t)=\frac{AJ_0(\beta r_0)}{a^2\left(\beta^2-\frac{\mu_{0m}^2}{r_0^2}\right)}\left(\frac{2\mu_{0m}J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)}{r_0^2(\beta^2-\frac{\mu_{0m}^2}{r_0^2})J_1(\mu_{0m})}+\frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta r_0)}-\frac{rJ_1\left(\frac{\mu_{0m}r}{r_0}\right)}{r_0J_1(\mu_{0m})}\right)\sin\frac{\mu_{0m}at}{r_0}+$$

$$+\frac{AaJ_0(\beta r_0)J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)t\cos\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{a^2\left(\beta^2-\frac{\mu_{0m}^2}{r_0^2}\right)r_0J_1(\mu_{0m})}-\frac{2\mu_{0m}AJ_0(\beta r_0)}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{(\mu_{0n}^2-\mu_{0m}^2)\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_1(\mu_{0n})},$$

если $\beta=\frac{\omega}{a}\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$,

то $u(r,t)=\frac{A}{2\omega aJ_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\left(r_0J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)-rJ_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\right)\sin\omega t-$

$$-\frac{2\omega AJ_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{a^3r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)^2J_1(\mu_{0n})},\qquad \text{если } \beta=\frac{\mu_{0m}}{r_0}\neq\frac{\omega}{a},\text{то}$$

$u(r,t)=\frac{A}{\omega_m(\omega_m^2-\omega^2)}(\omega_m\sin\omega t-\omega\sin\omega_mt)$, если $\omega=\omega_m=\beta a$, то

$u(r,t)=\frac{A}{2\omega_m^2}(\sin\omega_mt-\omega_mt\sin\omega_mt)J_0\left(\frac{\mu_{0m}r}{r0}\right)$;

12) если $\omega\neq\frac{a\mu_{0n}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2+\omega^2}\left(I_0(\beta r)-\frac{I_0(\beta r_0)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right)\sin\omega t-$

$$-\frac{2\omega AI_0(\beta r_0)}{a^3r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{r_0^2}\right)\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}+\beta^2\right)J_1(\mu_{0n})}.$$

2.391. Если $\omega\neq\frac{a\mu_{0n}}{r_)}$, то $u(r,t)=\frac{p_0}{\rho\omega^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}-1\right)\sin\omega t-$

$$-\frac{2p_0\omega r_0}{\rho a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{0n}at}{r_0}}{\mu_{0n}^2\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)J_1(\mu_{0n})},\quad \text{если } \omega=\frac{a\mu_{0m}}{r_0a},\text{ то } u(r,t)=$$

$\frac{p_0 r_0^2}{\rho a^2 \mu_{0m}^2}\Big(\frac{2J_0\left(\frac{\mu_{0m} r}{r0}\right)}{\mu_{0m} J_1(\mu_{0m})} - 1 + \frac{r J_1\left(\frac{\mu_{0n} r}{r0}\right)}{J_1(\mu_{0m})}\Big)\sin\frac{a\mu_{0m} t}{r_0} - \frac{p_0 r_0 J_0\left(\frac{\mu_{0m} r}{r_0}\right) t\cos\frac{a\mu_{0m} t}{r_0}}{\rho a \mu_{0m}^2 J_1(\mu_{0m})} -$
$- \frac{2p_0\mu_{0m} r_0^2}{\rho a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu n} r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{0n} a t}{r_0}}{\mu_{0n}^2\left(\frac{\mu_{0n}^2}{r_0^2} - \frac{omega a^2}{a^2}\right)J_1(\mu_{0n})}.$

2.392. 1) $u(r,t) = A\int_0^t h(t-\tau)\,d\tau$; 2) $u(r,t) = \frac{A}{8a^2}\big(r_0^2 r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r_0^4}{3}\big)t + \frac{Ar_0^2 t^3}{6} -$
$- \frac{4Ar_0^5}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)\cos\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}}{\mu_{1n}^5 J_0(\mu_{1n})}$; 3) $u(r,t) = \frac{Ar_0^2 t^4}{24} + \frac{A}{8a^2}\big(r_0^2 r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r_0^4}{3}\big)t^2 +$
$+ \frac{A}{16a^4}\big(\frac{7r_0^6}{72} - \frac{r_0^4 r^2}{3} - \frac{r_0^2 r^4}{4} - \frac{r^6}{18}\big) + \frac{8Ar_0^6}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)\cos\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}}{\mu_{1n}^6 J_0(\mu_{1n})}$;
4) $u(r,t) = \frac{A}{\alpha^2}\Big(\frac{4a^2}{\alpha^2} + r^2 - \frac{(2ar_0 I_0\left(\frac{\alpha r}{a}\right)}{\alpha I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}\Big)e^{-\alpha t} +$
$+ \frac{4Ar_0^2}{a^2}\big(1 - \frac{\alpha^2 r_0^2}{8a^2}\big)(\alpha t - 1) + \frac{4Ar_0^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{1n}}\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0} - \cos\frac{\mu 1 n a t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)}{\mu_{1n}^2\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} + \frac{\alpha^2}{a^2}\right)J_0(\mu_{1n})}$;
5) если $0\neq\beta\neq\frac{\mu_{1n}}{r_0}$, то $u(r,t) = \frac{2A\beta r_0^2 J_1(\beta r_0)}{a^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}}{\mu_{1n}^3\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} - \beta^2\right)J_0(\mu_{1n})} + \frac{AJ_1(\beta r_0)}{3\beta r_0}t^3 +$
$+ \frac{A}{\beta^2 a^2}\big((J_0(\beta r) + \frac{\beta J_1(\beta r_0)}{2r_0}r^2 - \frac{2J_1(\beta r_0)}{\beta r_0}\big(1 + \frac{\beta^2 r_0^2}{8}\big)\big)t$, если $\beta = \frac{\mu_{1m}}{r_0}$, то $u(r,t) = \frac{Ar_0^3}{a^3\mu_{1m}^3}\big(\frac{r_0 t}{a\mu_{1m}} - \sin\frac{a\mu_{1m} t}{r_0}\big)J_0\big(\frac{\mu_{1m} r}{r_0}\big)$, если $\beta = 0$, то $u(r,t) = \frac{At^3}{6}$;
6) если $\beta \neq 0$, то $u(r,t) = \frac{AI_1(\beta r_0)}{3\beta r_0}t^3 - \frac{2A\beta r_0^2 I_1(\beta r_0)}{a^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}}{\mu_{1n}^3\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} + \beta^2\right)J_0(\mu_{1n})} +$
$+ \frac{A}{\beta^2 a^2}\big(\frac{\beta I_1(\beta r_0)}{2r_0}r^2 - I_0(\beta r) + \frac{2I_1(\beta r_0)}{\beta r_0}\big(1 - \frac{\beta^2 r_0^2}{8}\big)\big)t$, если $\beta = 0$, то $u(r,t) = \frac{At^3}{6}$;
7) если $\beta \neq \frac{\mu_{1n}}{r_0}$, то $u(r,t) = \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2 a^2}\Big(J_0(\beta r) + \frac{\beta a J_1(\beta r_0)}{\alpha I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big)\Big)e^{-\alpha t} +$
$+ \frac{2AJ_1(\beta r_0)}{\alpha^2\beta r_0}(1 + \alpha t) - \frac{2A\beta J_1(\beta r_0)}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{1n}}\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0} - \cos\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} + \frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} - \beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}$,
если $\beta = \frac{\mu_{1m}}{r_0}$, то $u(r,t) = \frac{A}{\alpha^2 + \frac{a^2\mu_{1n}^2}{r_0^2}}\big(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{1m}}\sin\frac{a\mu_{1m} t}{r_0} - \cos\frac{a\mu_{1m} t}{r_0} + e^{-\alpha t}\big)J_0\big(\frac{\mu_{1m} r}{r_0}\big)$;
8) если $\beta \neq \frac{\alpha}{a}$, то $u(r,t) = \frac{A}{\alpha^2 - \beta^2 a^2}\Big(I_0(\beta r) - \frac{\beta a I_1(\beta r_0)}{\alpha I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big)\Big)e^{-\alpha t} +$
$+ \frac{2AI_1(\beta r_0)}{\alpha^2\beta r_0}(1 + \alpha t) + \frac{2A\beta J_1(\beta r_0)}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{1n}}\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0} - \cos\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)}{\left(\frac{\alpha r_0}{a}\frac{mu_{1n}^2}{r_0^2} + \frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} + \beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}$,
если $\beta = \frac{\alpha}{a}$, то $u(r,t) = \frac{A}{2\alpha a}\Big(\frac{r_0 I_0\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}{I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}I_0\big(\frac{\alpha r}{a}\big) - rI_1\big(\frac{\alpha r_0}{a}\big)\Big)e^{-\alpha t} +$
$+ \frac{2AaI_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}{\alpha^3 r_0}(1 + \alpha t) + \frac{2AI_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha r_0}{a\mu_{1n}}\sin\frac{\mu_{1n} a t}{r_0} - \cos\frac{\mu_{1n} a t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_{1n} r}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2} + \frac{\alpha^2}{a^2}\right)^2 J_0(\mu_{1n})}$;
9) если $\beta\neq\frac{\omega}{a}$, $\beta\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$, $\omega\neq\omega_n$, где $\omega_n = \frac{a\mu_{0n}}{r_0}$, то

$u(r,t)=\frac{2AJ_1(\beta r_0)}{\beta\omega r_0}t+\frac{AJ_1(\beta r_0)}{\beta^2a^2-\omega^2}\Big(\frac{J_0(\beta r)}{J_1(\beta r_0)}-\frac{\beta aJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\Big)\sin\omega t+\frac{2\beta\omega AJ_1(\beta r_0)}{a^3}\times$

$\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}}{\mu_{1n}\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}$, если $\beta\neq\frac{\omega}{a}=\frac{\mu_{1m}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{A}{a^2\left(\beta^2-\frac{\mu_{1m}^2}{r_0^2}\right)}\times$

$\times\Big(J_0(\beta r)+\frac{\beta r_0J_1(\beta r_0)(3\mu_{1m}^2-\beta^2r_0^2)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)}{\mu_{1m}(\mu_{1m}^2-\beta^2r_0^2)J_0(\mu_{1m}}+\frac{\beta rJ_1(\beta r_0)J_1\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)}{\mu_{1m}J_0(\mu_{1m})}\Big)\sin\frac{a\mu_{1m}t}{r_0}+$

$+\frac{2AJ_1(\beta r_0)}{\beta a\mu_{1m}}t+\frac{2\beta\mu_{1m}r_0AJ_1(\beta r_0)}{a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}}{\mu_{1m}(\mu_{1n}^2-\mu_{1m}^2)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}+$

$+\frac{\beta AJ_1(\beta r_0)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)t\cos\frac{a\mu_{1m}t}{r_0}}{a\mu_{1m}\left(\frac{\mu_{1m}^2}{r_0^2}-\beta^2\right)J_0(\mu_{1m})}$, если $\beta=\frac{\omega}{a}\neq\frac{\mu_{0n}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{2aAJ_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{\omega^2r_0}t-$

$-\frac{A}{2\omega aJ_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\big(r_0J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)-rJ_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\big)\sin\omega t+\frac{2\omega^2AJ_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{a^4}\times$

$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}}{\mu_{1n}\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)^2J_0(\mu_{1n})}$, если $\beta=\frac{\mu_{0m}}{r_0}\neq\frac{\omega}{a}$,то $u(r,t)=\frac{A}{\omega_m(\omega_m^2-\omega^2)}\times$

$\times(\omega_m\sin\omega t-\omega\sin\omega_mt)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r0}\right)$, если $\omega=\omega_m=\beta a$, то

$u(r,t)=\frac{A}{2\omega_m^2}(\omega_mt\cos\omega_mt-\sin\omega_mt)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r0}\right)$, если $\beta=0$, то

$u(r,t)=\frac{A}{\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)$; 10) если $\omega\neq\frac{a\mu_{1n}}{r_0}$, то

$u(r,t)=\frac{2AI_1(\beta r_0)}{\beta\omega r_0}t-\frac{AI_1(\beta r_0)}{\beta^2a^2-\omega^2}\Big(\frac{I_0(\beta r)}{I_1(\beta r_0)}-\frac{\beta aJ_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\Big)\sin\omega t-\frac{2\beta\omega AI_1(\beta r_0)}{a^3}\times$

$\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r0}\right)\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}}{\mu_{1n}\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}+\beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}$, если $\omega=\frac{a\mu_{1m}}{r_0}$, то $u(r,t)=\frac{A}{a^2\left(\beta^2+\frac{\mu_{1m}^2}{r_0^2}\right)}\times$

$\times\Big(\frac{\beta r_0I_1(\beta r_0)(3\mu_{1m}^2+\beta^2r_0^2)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)}{\mu_{1m}^2(\mu_{1m}^2+\beta^2r_0^2)J_0(\mu_{1m}}+\frac{\beta rI_1(\beta r_0)J_1\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)}{\mu_{1m}J_0(\mu_{1m})}-I_0(\beta r)\Big)\sin\frac{a\mu_{1m}t}{r_0}+$

$+\frac{2AI_1(\beta r_0)}{\beta a\mu_{1m}}t-\frac{2\beta\mu_{1m}r_0AI_1(\beta r_0)}{a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}}{\mu_{1m}(\mu_{1n}^2-\mu_{1m}^2)\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}+\beta^2\right)J_0(\mu_{1n})}-$

$-\frac{\beta AI_1(\beta r_0)J_0\left(\frac{\mu_{1m}r}{r_0}\right)t\cos\frac{a\mu_{1m}t}{r_0}}{a\mu_{1m}\left(\frac{\mu_{1m}^2}{r_0^2}+\beta^2\right)J_0(\mu_{1m})}$, если $\beta=0$, то $u(r,t)=\frac{A}{\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)$.

2.393. Здесь $\gamma_n>0$ – корень уравнения $\gamma J_1(\gamma)=pJ_0(\gamma)$, $p=hr_0$;

1) $u(r,t)=\frac{Ar_0}{4pa^2}((p+2)r_0^2-r^2)t-\frac{2Apr_0^3}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_nr}{r_0}\right)\sin\frac{\gamma_nat}{r_0}}{\gamma_n^3(\gamma_n^2+p^2)J_0(\gamma_n)}$;

2) $u(r,t)=\frac{Ar_0}{4pa^2}((1+\frac{2}{p})r_0^2-r^2)t^2+\frac{Ar_0}{8pa^4}((1+\frac{2}{p})r_0^2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r_0^4}{p}(3+\frac{4}{p}+\frac{3p}{4})+$

$+\frac{4Apr_0^4}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_nr}{r_0}\right)\cos\frac{\gamma_nat}{r_0}}{\gamma_n^4(\gamma_n^2+p^2)J_0(\gamma_n)}$; 3) $u(r,t)=\frac{A}{16a^2}((1+\frac{4}{p})r_0^4-r^4)t-$

$-\frac{2Ar_0^5}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma_n^2(p+2)-4p)J_0\left(\frac{\gamma_nr}{r_0}\right)\sin\frac{\gamma_nat}{r_0}}{\gamma_n^5(\gamma_n^2+p^2)J_0(\gamma_n)}$; 4) $u(r,t)=\frac{A}{16a^2}\big((1+\frac{4}{p})r_0^4-r^4\big)t^2-$

$\frac{A}{8a^4}\left(\frac{r^6}{16}-(1+\frac{4}{p})r_0^4+\left(\frac{4}{9}+\frac{8}{3p}+\frac{4}{p^2}\right)r_0^6\right)+\frac{4Ar_0^6}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((p+2)\gamma_n^2-4)J_0\left(\frac{\gamma_n r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\gamma_n}{r_0}\right)^2 t}}{\gamma_n^7(\gamma_n^2+p^2)J_0(\gamma_n)}$;
5) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_0}$, то $u(r,t)=$
$=\frac{A}{\beta^2a^2}(J_0(\beta r)-J_0(\beta r_0)+\frac{\beta r_0}{p}J_1(\beta r_0))t-\frac{2Ar_0^3(\beta r_0J_1(\beta r_0)-pJ_0(\beta r_0)}{a^3}\times$
$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{r_0}\right)\sin\frac{\gamma_n at}{r_0}}{\gamma_n(\gamma_n^2+p^2)(\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}-\beta^2)J_0(\gamma_n)}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_0}$, то
$u(r,t)=\frac{Ar_0^3}{a^3\gamma_m^3}\left(\frac{a\gamma_m t}{r_0}-\sin\frac{a\gamma_m t}{r_0}\right)$; 6) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}(I_0(\beta r)-I_0(\beta r_0)+$
$+\frac{\beta r_0}{p}I_1(\beta r_0))t+\frac{2Ar_0^3(\beta r_0I_1(\beta r_0)+pI_0(\beta r_0)}{a^3}\times\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{r_0}\right)\sin\frac{\gamma_n at}{r_0}}{\gamma_n(\gamma_n^2+p^2)(\frac{\gamma_n^2}{r_0^2}+\beta^2)J_0(\gamma_n)}$.

2.394. $u(r,\varphi,t)=Br\left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{3r_0^2-r^2}{4}\right)\sin\varphi-\frac{4Br_0^3}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\gamma_n r}{r_0}\right)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_0}}{\gamma_n^3(\gamma_n^2-1)J_0(\gamma_n)}\sin\varphi$,
$\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_1'(\gamma)=0$.

2.395. $u(r,\varphi,t)=A\Big[\frac{I_1\left(\frac{\alpha r}{a}\right)}{I_1\left(\frac{\alpha r_0}{a}\right)}e^{-\alpha t}+$
$+\frac{2}{r_0^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)\left(\mu_{1n}\cos\frac{\mu_{1n}at}{r_0}-\frac{\alpha r_0}{a}\sin\frac{\mu_{1n}at}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_{1n}^2}{r_0^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)J_0(\mu_{1n})}\Big]\cos\varphi$.

2.396. $u(r,\varphi,t)=A\left(rt-\frac{2r_0^2}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\sin\frac{\mu_n at}{r_0}}{\mu_n^2(\mu_n^2-1)J_0(\mu_n)}\right)\sin\varphi$, где μ_n — положительный корень уравнения $J_1'(\mu)=0$.

2.397. 1) $u(r,t)=A\left(t-\frac{r_0^2-r^2}{4a^2}\right)+\frac{2Ar_0^2}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{\mu_{0n}a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}^3J_1(\mu_{0n})}$;
2) $u(r,t)=At^2-\frac{A}{2a^2}(r_0^2-r^2)t+\frac{A}{32a^4}(r_0^2-r^2)(3r_0^2-r^2)-\frac{4Ar_0^4}{a^4}\times$
$\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{0n}^5J_1(\mu_{0n})}$; 3) $u(r,t)=A\frac{bei\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}ber\frac{\sqrt{\omega}r}{a}+ber\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}bei\frac{\sqrt{\omega}r}{a}}{ber^2\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}+bei^2\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}}\sin\omega t+$
$+A\frac{ber\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}bei\frac{\sqrt{\omega}r}{a}-bei\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}ber\frac{\sqrt{\omega}r}{a}}{ber^2\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}+bei^2\frac{\sqrt{\omega}r_0}{a}}\cos\omega t+\frac{2A\omega}{a^2r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{0n}J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r0}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 t}}{\left(\frac{\mu_{0n}^4}{r_0^4}+\frac{\omega^2}{a^4}\right)J_1(\mu_{0n})}$.

2.398. 1) $u(r,t)=\frac{Aa^2t^2}{r_0}+\frac{A}{2}\left(\frac{r^2}{r_0}-\frac{r_0}{2}\right)t+\frac{A}{16a^2}\left(\frac{r^4}{2r_0}-\frac{r_0r^2}{2}+\frac{r_0^3}{3}\right)+$
$+\frac{2Ar_0^3}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{1n}^4J_0(\mu_{1n})}$; 2) $u(r,t)=\frac{A}{32a^4}\left(\frac{r^6}{18r_0}-\frac{r_0r^4}{4}+\frac{r_0^3r^2}{3}-\frac{25r_0^5}{252}\right)+$
$+\frac{A}{8a^2}\left(\frac{r^3}{2r_0}-r_0r^2+\frac{r_0^3}{3}\right)t+\frac{A}{2}\left(\frac{r^2}{r_0}+\frac{r_0}{2}\right)t^2+\frac{2Aa^2t^3}{3r_0}+\frac{4Ar_0^5}{a^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{1n}r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_{0n}}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_{1n}^6J_0(\mu_{1n})}$.

2.399. $u(r,t)=\frac{Ar_0t^2}{p}-\frac{Ar_0}{2pa^2}\left((1+\frac{2}{p})r_0^2-r^2\right)t+$

$+\frac{Ar_0}{4pa^4}\left(\frac{r^4}{8}-(1+\frac{2}{p})\frac{r_0^2r^2}{2}+(\frac{3}{8}+\frac{3}{2p}+\frac{2}{p^2})r_0^4\right)-\frac{4Ar_0^5}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\gamma_n}{r_0}\right)^2 t}}{\gamma_n^5(\gamma_n^2+p^2)J_0(\gamma_n)}$,
где $\gamma_n>0$ — корень уравнения $\gamma J_1(\gamma)=J_0(\gamma)$;

2.400. $u(r,\varphi,z)=u_0\frac{I_1\left(\frac{\pi r}{l}\right)}{I_1\left(\frac{\pi r_0}{l}\right)}\sin\frac{2\pi z}{l}\cos\varphi$.

2.401. $u(r,\varphi,z)=\frac{u_0}{2}\left[\frac{r}{r_0}+\frac{I_1\left(\frac{2\pi r}{l}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi r_0}{l}\right)}\cos\frac{2\pi z}{l}\right]\sin\varphi$.

2.402. $u(r,\varphi,z)=\frac{q_0r_0}{2D}\left[\frac{r^2}{2r_0^2}+\frac{l}{\pi r_0}\frac{I_2\left(\frac{\pi r}{l}\right)}{I_2'\left(\frac{\pi r_0}{l}\right)}\cos\frac{\pi z}{l}\right]\cos2\varphi$.

2.403. $u(r,z)=\frac{8u_0}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2l}\right)\cos\frac{(2n+1)z}{2l}}{(2n+1)^2I_0\left(\frac{(2n+1)\pi r_0}{2l}\right)}$.

2.404. $u(r,z)=u_0\frac{z}{l}+\frac{8q_0l}{k\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nI_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2l}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}}{(2n+1)^2I_1\left(\frac{(2n+1)\pi r_0}{2l}\right)}$.

2.405. $u(r,\varphi,z)=\left[\frac{u_1+u_2}{2r_0}r+\frac{2(u_2-u_1)}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{I_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}}{(2n+1)I_1\left(\frac{(2n+1)\pi r_0}{2l}\right)}\right]\sin\varphi$.

2.406. $u(r,z)=2(p+1)u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+p^2}I_0\left(\frac{\mu_n r}{l}\right)\sin\frac{\mu_n z}{l}}{\mu_n(\mu_n^2+p^2+p)I_0\left(\frac{\mu_n r_0}{l}\right)}$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,ctg\,\mu=-p$, $p=hl$.

2.407. $u(r,\varphi,z)=u_0\frac{I_1\left(\frac{\pi r}{l}\right)}{I_1\left(\frac{\pi r_0}{l}\right)}\cos\frac{\pi z}{l}\cos\varphi+\frac{2q_0r_0}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{r_0}\right)ch\frac{\mu_{0n}(l-z)}{r_0}}{\mu_{0n}^2J_1(\mu_{0n})sh\frac{\mu_{0n}l}{r_0}}$.

2.408. $u(r,z)=\frac{4pu_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)\sin\frac{\alpha_n z}{l}}{(2n+1)\left[pI_0\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)+\alpha_nI_1\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)\right]}$, $\alpha_n=(2n+1)\pi$, $p=hl$.

2.409. $u(r,\varphi,z)=\frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nK_1\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)\cos\frac{\alpha_n z}{l}}{(2n+1)K_1\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)}\cos\varphi$, $\alpha_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}$.

2.410. $u(r,z)=\frac{8lq_0}{k\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nK_0\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)\cos\frac{\alpha_n z}{l}}{(2n+1)^2K_1\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)}$, $\alpha_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}$.

2.411. $u(r,\varphi,z)=\frac{u_0}{4}\left\{1+\frac{r_0^2}{r^2}\cos2\varphi+\left[\frac{K_0\left(\frac{2\pi r}{l}\right)}{K_0\left(\frac{2\pi r_0}{l}\right)}+\frac{K_2\left(\frac{2\pi r}{l}\right)}{K_2\left(\frac{2\pi r_0}{l}\right)}\cos2\varphi\right]\cos\frac{2\pi z}{l}\right\}$.

2.412. $u(r,z)=2pu_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nK_0\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)\cos\frac{\alpha_n z}{l}}{\alpha_n\left[pK_0\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)+\alpha_nK_1\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)\right]}$, $\alpha_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}$, $p=hl$.

2.413. $u(r,\varphi,z)=\frac{4lq_0}{k\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{K_0\left(\frac{\alpha_n r_1}{l}\right)I_0\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)-I_0\left(\frac{\alpha_n r_1}{l}\right)K_0\left(\frac{\alpha_n r}{l}\right)}{K_0\left(\frac{\alpha_n r_1}{l}\right)I_1\left(\frac{\alpha_n r_2}{l}\right)+I_0\left(\frac{\alpha_n r_1}{l}\right)K_1\left(\frac{\alpha_n r_2}{l}\right)}\frac{\sin\frac{\alpha_n z}{l}}{(2n+1)^2}$,
где $\alpha_n=(2n+1)\pi$. **2.416.** Решение. Волновая функция стационарного состояния с наименьшей энергией не зависит от φ и является собственной функцией задачи на собственные значения

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{d\psi}{dr}+k^2\psi=0,\quad 0<r<r_0,\qquad \tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{d\psi}{dr}-(k_0^2-k^2)\psi=0,\quad r_0<r,$$
$$\psi(r_0-0)=\psi(r_0+0),\qquad \psi'(r_0-0)=\psi'(r_0+0),$$
$$|\psi(0)|<\infty,\quad \int_0^\infty\psi^2 r\,dr<\infty,\quad k^2=\tfrac{2mE}{\hbar^2},\ \ k_0^2=\tfrac{2mU_0}{\hbar^2},\ \ k_0^2>k^2.$$

Отсюда следует, что

$$\psi(r)=\begin{cases} AJ_0(kr), & 0\le r<r_0,\\ BK_0\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,r\right), & r_0<r.\end{cases}$$

Граничные условия выполняются, если

$$\tfrac{\mu J_1(\mu)}{J_0(\mu)}=\tfrac{\sqrt{\mu_0^2-\mu^2}\,K_1\left(\sqrt{\mu_0^2-\mu^2}\right)}{K_0\left(\sqrt{\mu_0^2-\mu^2}\right)},\quad \mu=kr_0,\ \ \mu_0=k_0r_0.$$

Левая часть уравнения — монотонно возрастающая функция от нуля до бесконечности на промежутке $(0\,;\mu_{01})$, что следует из положительности производной

$$\tfrac{d}{d\mu}\tfrac{\mu J_1(\mu)}{J_0(\mu)}=\mu\tfrac{J_0^2(\mu)+J_1^2(\mu)}{J_0^2(\mu)}>0,$$

а правая часть — непрерывная неотрицательная функция, так как при вещественных значениях ν функция Макдональда $K_\nu(x)$ не имеет нулей и сохраняет знак плюс. Таким образом, при любом $\mu_0>0$ уравнение имеет хотя бы один корень.

2.417. Поле электрического типа: $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,\mathcal{E}_z)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,0)$,

$$\mathcal{E}_r=AJ_\nu'(\tfrac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\sin\tfrac{\pi nz}{l},\qquad \mathcal{H}_r=\tfrac{\omega_{\nu sn}mlr_0A}{c\mu_{\nu s}\pi nr}J_\nu(\tfrac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\cos\tfrac{\pi nz}{l},$$
$$\mathcal{E}_\varphi=\tfrac{ir_0mA}{\mu_{\nu s}r}J_\nu(\tfrac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\sin\tfrac{\pi nz}{l},\qquad \mathcal{H}_\varphi=\tfrac{i\omega_{\nu sn}}{c\pi n}J_\nu'(\tfrac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\cos\tfrac{\pi nz}{l},$$
$$\mathcal{E}_z=-\tfrac{\mu_{\nu s}lA}{\pi nr_0}J_\nu(\tfrac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\cos\tfrac{\pi nz}{l},\quad \mathcal{H}_z=0;$$

$\omega_{\nu sn}=c\sqrt{\left(\frac{\mu_{\nu s}}{r_0}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}$, $\mu_{\nu s}>0$ — нуль функции $J_\nu(\mu)$, $\nu=|m|$, $m\in\mathbf{Z}$, $s\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}_0$.

Поле магнитного типа: $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,0)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,\mathcal{H}_z)$,

$$\mathcal{E}_r=\tfrac{\omega_{\nu sn}mlr_0B}{c\gamma_{\nu s}\pi nr}J_\nu(\tfrac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\sin\tfrac{\pi nz}{l},\qquad \mathcal{H}_r=BJ_\nu'(\tfrac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\cos\tfrac{\pi nz}{l},$$
$$\mathcal{E}_\varphi=\tfrac{i\omega_{\nu sn}lB}{c\pi n}J_\nu'(\tfrac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\sin\tfrac{\pi nz}{l},\qquad \mathcal{H}_\varphi=\tfrac{ir_0mB}{\gamma_{\nu s}r}J_\nu(\tfrac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\cos\tfrac{\pi nz}{l},$$
$$\mathcal{E}_z=0,\qquad \mathcal{H}_z=\tfrac{\gamma_{\nu s}lB}{\pi nr_0}J_\nu(\tfrac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\,e^{im\varphi}\sin\tfrac{\pi nz}{l};$$

$\omega_{\nu sn}=c\sqrt{\left(\frac{\gamma_{\nu s}}{r_0}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}$, $\mu_{ms}>0$ — нуль функции $J_\nu'(\mu)$, $\nu=|m|$, $m\in\mathbf{Z}$, $s,n\in\mathbf{N}$, J_m' — производная по всему аргументу. Указание. См. задачу 1.375.

2.418. Поле электрического типа: $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,\mathcal{E}_z)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,0)$,

$\mathcal{E}_r = AJ'_\nu(\frac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\,\sin\nu\varphi\,\sin\frac{\pi nz}{l}$, $\quad \mathcal{H}_r = -\frac{i\omega_{\nu sn}mlr_0A}{c\alpha\mu_{\nu s}\pi nr}J_\nu(\frac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\cos\nu\varphi\,\cos\frac{\pi nz}{l}$,
$\mathcal{E}_\varphi = \frac{\nu r_0A}{\mu_{\nu s}r}J_\nu(\frac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\cos\nu\varphi\,\sin\frac{\pi nz}{l}$, $\quad \mathcal{H}_\varphi = \frac{i\omega_{\nu sn}lA}{c\pi n}J'_\nu(\frac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\sin\nu\varphi\,\cos\frac{\pi nz}{l}$,
$\mathcal{E}_z = -\frac{\mu_{\nu s}lA}{\pi nr_0}J_\nu(\frac{\mu_{\nu s}r}{r_0})\sin\nu\varphi\,\cos\frac{\pi nz}{l}$, $\quad \mathcal{H}_z = 0$;

$\omega_{\nu sn} = c\sqrt{\left(\frac{\mu_{\nu s}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}$, $\quad \mu_{\nu s} > 0$ — нуль функции $J_\nu(\mu)$, $\quad \nu = \frac{\pi n}{\alpha}$,
$m, s \in \mathbf{N_0}$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

Поле магнитного типа: $\mathbf{E} = e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\,\mathcal{E}_\varphi,\,0)$, $\quad \mathbf{H} = e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_z)$,
$\mathcal{E}_r = \frac{i\omega_{\gamma sn}mlr_0B}{c\gamma_{\nu s}\pi nr}J_\nu(\frac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\sin\nu\varphi\,\sin\frac{\pi nz}{l}$, $\quad \mathcal{H}_r = BJ'_\nu(\frac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\cos\nu\varphi\,\cos\frac{\pi nz}{l}$,
$\mathcal{E}_\varphi = \frac{i\omega_{\gamma sn}lB}{c\pi n}J'_\nu(\frac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\cos\nu\varphi\,\sin\frac{\pi nz}{l}$, $\quad \mathcal{H}_\varphi = -\frac{\nu r_0B}{\gamma_{\nu s}r}J_\nu(\frac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\sin\nu\varphi\,\cos\frac{\pi nz}{l}$,
$\mathcal{E}_z = 0$, $\quad \mathcal{H}_z = \frac{\gamma_{\nu s}lB}{\pi nr_0}J_\nu(\frac{\gamma_{\nu s}r}{r_0})\cos\nu\varphi\sin\frac{\pi nz}{l}$;

$\omega_{\nu sn} = c\sqrt{\left(\frac{\gamma_{\nu s}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}$, $\quad \gamma_{\nu s} > 0$ — нуль функции $J'_\nu(\gamma)$, $\quad \nu = \frac{\pi m}{\alpha}$,
$m \in \mathbf{N}_0$, $\quad s, n \in \mathbf{N}$. J'_m — производная по всему аргументу. Указание. См. задачу 1.376. **2.419.** TM_{0S}-моды:

$$\mathcal{E}_z(r) = A\cdot\begin{cases}\frac{J_0\left(\frac{qr}{r_0}\right)}{J_0(q)}, & 0 \le r < r_0, \quad q = r_0\sqrt{k^2n_1^2 - B^2},\\ \frac{K_0\left(\frac{pr}{r_0}\right)}{K_0(p)}, & r_0 \le r, \qquad p = r_0\sqrt{\beta^2 - k^2n_2^2}.\end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\frac{qJ_0(q)}{n_1^2J_1(q)} + \frac{pK_0(p)}{n_2^2K_1(p)} = 0$.

TE_{0S}-моды:

$$\mathcal{H}_z = B\cdot\begin{cases}\frac{J_0\left(\frac{qr}{r_0}\right)}{J_0(q)}, & 0 \le r < r_0,\\ \frac{K_0\left(\frac{pr}{r_0}\right)}{K_0(p)}, & r_0 < r.\end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\frac{qJ_0(q)}{J_1(q)} + \frac{pK_0(p)}{K_1(p)} = 0$. Остальные компоненты поля определяются формулами, приведенными в ответе к задаче 1.383. Частоты отсечки для мод обоего типа: $\omega_{0j} = \frac{c\mu_{0j}}{r_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$, $j \in \mathbf{N}$.

2.420. $\mathbf{E} = \mathcal{E}e^{i(\beta z + m\varphi - \omega t)}$, $\quad \mathbf{H} = \mathcal{H}e^{i(\beta z + m\varphi - \omega t)}$, $\quad m = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$,

$$\mathcal{E}_z(r) = A\cdot\begin{cases}\frac{J_m\left(\frac{qr}{r_0}\right)}{J_m(q)}, & 0 \le r < r_0,\\ \frac{K_m\left(\frac{pr}{r_0}\right)}{K_m(p)}, & r_0 \le r,\end{cases} \qquad \mathcal{H}_z(r) = B\mathcal{E}_z(r),$$

$$q = r_0\sqrt{k^2n_1^2 - \beta^2}, \quad p = r_0\sqrt{\beta^2 - k^2n_2^2}, \quad s = kr_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{2.101}$$

Остальные компоненты поля определяются формулами (1.194). Существуют моды двух типов. Характеристическое уравнение

$$\frac{J_{m+1}(q)}{qJ_m(q)} + \frac{K_{m+1}(p)}{pK_m(p)} = 0, \quad m \in \mathbf{N}$$

описывает так называемые EH-моды; для них $B = in_1\frac{m}{|m|}A$, частоты

отсечки определяются уравнением $J_m(s) = 0$, $s > 0$. Характеристическое уравнение

$$\frac{J_{m-1}(q)}{qJ_m(q)} - \frac{K_{m-1}(p)}{pK_m(p)} = 0, \quad m \in \mathbf{N},$$

описывает HE-моды, для которых $B{=}-in_1\frac{m}{|m|}A$, а уравнения $J_1(s){=}0$, $J_{m-2}(s){=}0$, $s > 0$, $m = 2, 4, 5, \ldots$ определяют частоты отсечки.

Указание. Компоненты $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$ являются решениями задач (1.193). Требование непрерывности компонент $\mathcal{E}_z$ $\mathcal{E}_\varphi$, $\mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_\varphi$ при $r = r_0$ приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений. Система имеет нетривиальное решение при условии

$$\left(\frac{J'_m(q)}{qJ_m(q)} + \frac{K'_m(p)}{pK_m(p)}\right)^2 = \left(\frac{\beta ms^2}{kn_1p^2q^2}\right)^2,$$

которое представляет собой характеристическое уравнение. Оно распадается на два уравнения; каждое из них с помощью рекуррентных формул для цилиндрических функций преобразуется к виду, приведенному в ответе. При $B = kn_2$ характеристические уравнения определяют частоты отсечки.

2.421. Указание. Частота отсечки моды с азимутальным числом m=0 определяется уравнением $J_0(s) = 0$ (задача 2.419). Для мод с азимутальным числом $m \neq 0$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{J'_m(q)}{qJ_m(q)} + \frac{K'_m(p)}{pK_m(p)}\right)\left(\frac{n_1^2J'_m(q)}{qJ_m(q)} + \frac{n_2^2K'_m(p)}{pK_m(p)}\right) = \left(\frac{m\beta s^2}{kp^2q^2}\right)^2,$$

откуда вытекают уравнения $J_1(s){=}0$, $s \geq 0$ и $J_{m-2}(s){=}-\frac{\Delta}{1-\Delta}J_m(s)$, $s{>}0$ для определения частот отсечки мод; q, p, s имеют вид (2.101).

2.422. Четные TE-моды: $\mathcal{E}_y(x) = AJ_\nu\left(a_1e^{-\frac{|x|}{2l}}\right)$,

четные TM-моды: $\mathcal{H}_y(x) = \frac{B}{n(x)}J_\nu\left(a_2e^{-\frac{|x|}{2l}}\right)$,

$\nu = 2l\sqrt{\beta^2 - k^2n_1^2}$, $a_1 = 2kln_1\sqrt{2\Delta}$, $a_2 = 2\sqrt{\Delta\,(1 + 2k^2l^2n_1^2)}$.

Характеристические уравнения: $\beta^2 = k^2n_1^2 + \frac{\nu_{ij}^2}{4l^2}$, $j \in \mathbf{N}$, $\nu_{ij} > 0$ — корни уравнения $J'_\nu(a_i) = 0$, $i = 1, 2$.

Нечетные TE-моды: $\mathcal{E}_y(x) = AJ_\nu\left(a_1e^{-\frac{|x|}{2l}}\right)\,sign\,x$;

нечетные TM-моды: $\mathcal{H}_y(x) = \frac{B}{n(x)}J_\nu\left(a_2\,e^{-\frac{|x|}{2l}}\right)\,sign\,x$.

Характеристические уравнения: $\beta^2 = k^2n_1^2 + \frac{\nu_{ij}^2}{4l^2}$, $j \in \mathbf{N}$, $\nu_{ij} > 0$ — корень уравнения $J_\nu(a_i) = 0$, $i = 1, 2$.

Частоты отсечки для TE-мод: $\omega_{0j}^{(\alpha)}{=}\frac{c}{2n_1l\sqrt{2\Delta}}\mu_{\alpha j}$, $\alpha{=}0, 1$, $j \in \mathbf{N}$;

частоты отсечки для TM-мод: $\omega_{0j}^{(\alpha)}=\frac{c}{2n_1 l\sqrt{2\Delta}}\sqrt{\mu_{\alpha j}^2-4\Delta}$, $\alpha=0,1$, $j\in\mathbf{N}$; $\alpha=1$ относится к четным модам, $\alpha=0$ — к нечетным.

Остальные компоненты поля определяются формулами, приведенными в ответе к задаче1.382. **2.423.** См. ответ к задаче 2.422. для нечетных мод.

2.424. $j(r,t)=j_0(r)\,e^{i\omega t}$,
$j_0(r)=\frac{pI\sqrt{-i}}{\pi\sqrt{2}r_0}\cdot\frac{J_0(pr\sqrt{-2i})}{J_1(pr_0\sqrt{-2i}}\frac{pI\sqrt{-i}}{\pi\sqrt{2}r_0}\cdot\frac{ber_0(p\sqrt{2}r)+i\,bei_0(p\sqrt{2}r)}{ber_1(p\sqrt{2}r_0)+i\,bei_1(p\sqrt{2}r_0)}$,
$\left|\frac{j_0(r)}{j_0(r_0)}\right|\approx\begin{cases}1+\left(\frac{pr}{2}\right)^4, & pr_0\ll 1,\\ e^{-p(r_0-r)}, & pr_0\gg 1,\end{cases}\qquad w=\frac{I^2}{2r_0c}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}}$.

2.425. $H=H_0\,\mathbf{Re}\left(\frac{ber_0(p\sqrt{2}r)+i\,bei_0(p\sqrt{2}r)}{ber_0(p\sqrt{2}r_0)+i\,bei_0(p\sqrt{2}r_0)}e^{i\omega t}\right)$,
$A_j=\frac{pcH_0}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\frac{ber_1^2(p\sqrt{2}r)+bei_1^2(p\sqrt{2}r)}{ber_0^2(p\sqrt{2}r_0)+bei_0^2(p\sqrt{2}r_0)}}$, $\quad w=\pi\sigma\left(\frac{\mu\omega r_0^2H_0}{4c}\right)^2$.

2.426. $\mathbf{H}(\mathbf{r},\varphi,\mathbf{t})=\mathcal{H}(r,\varphi)\,e^{i\omega t}$,
$\mathcal{H}_r(r,\varphi)=\frac{2H_0J_1(kr)}{krJ_0(kr_0)}\cos\varphi$, $\mathcal{H}_\varphi(r,\varphi)-\frac{2H_0J_1'(kr)}{J_0(kr_0)}\cos\varphi$, $\mathcal{H}_z(r,\varphi)=0$.

Указание. Решения уравнений для $A(r,\varphi)$ и $u(r,\varphi)$ (см. ответ к задаче 1.391.) имеют форму рядов:

$$A(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(kr)(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),\quad r<r_0,$$
$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi),\quad r_0<r.$$

Из условия при $r\to\infty$ следует, что не равны нулю лишь коэффициенты a_0, c_0, b_1, c_1. Коэффициенты b_1 и c_1 определяются из требования непрерывности функции $\mathbf{H}(r,\varphi)$ при $r=r_0$.

2.427. $Y_0(\alpha r_0)J_0(\alpha r_1)-Y_0(\alpha r_1)J_0(\alpha r_0)=0$. **2.428.** $\frac{Y_0(\alpha\tilde r_1)}{J_0(\alpha\tilde r_1)}=\frac{Y_0(\alpha r_0)+\varepsilon\alpha Y_1(\alpha r_0)}{J_0(\alpha r_0)+\varepsilon\alpha J_1(\alpha r_0)}$.

2.429. $\frac{D_BI_0\left(\frac{r_0}{L_B}\right)}{L_BI_1\left(\frac{r_0}{L_B}\right)}=\alpha_CD_C\frac{J_0(\alpha_C\tilde r_1)Y_1(\alpha_Cr_0)-Y_0(\alpha_C\tilde r_1)J_1(\alpha_Cr_0)}{Y_0(\alpha_C\tilde r_1)J_0(\alpha_Cr_0)-J_0(\alpha_C\tilde r_1)Y_0(\alpha_Cr_0)}$,
$L_B=\sqrt{\frac{D_B}{L_B^C}}$, $D_B=\frac{1}{3\Sigma_s^B}$, выражение для α_C дано в ответе к задаче 2.41.

2.430. $\alpha_CD_C\frac{J_1(\alpha_Cr_0)}{J_0(\alpha_Cr_0)}=\frac{D_R}{L_R}\frac{K_0\left(\frac{r_1}{L_R}\right)I_1\left(\frac{r_0}{L_R}\right)+I_0\left(\frac{r_1}{L_R}\right)K_1\left(\frac{r_0}{L_R}\right)}{I_0\left(\frac{r_1}{L_R}\right)K_0\left(\frac{r_0}{L_R}\right)-K_0\left(\frac{r_1}{L_R}\right)I_0\left(\frac{r_0}{L_R}\right)}$,
α_C и L_R те же, что в ответе к задаче 2.41.

2.431. $\frac{Y_0(\mu r_1)}{J_0(\mu r_1)}=\frac{Y_0(\mu r_0)+\varepsilon\mu Y_1(\mu r_0)}{J_0(\mu r_0)+\varepsilon\mu J_1(\mu r_0)}$, $\mu^2=\alpha^2-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

2.432. $\mu_BD_B\frac{I_1(\mu_Br_0)}{I_0(\mu_Br_0)}=\mu_CD_C\frac{J_0(\mu_C\tilde r_1)Y_1(\mu_Cr_0)-Y_0(\mu_C\tilde r_1)J_1(\mu_Cr_0)}{Y_0(\mu_C\tilde r_1)J_0(\mu_Cr_0)-J_0(\mu_C\tilde r_1)Y_0(\mu_Cr_0)}$,
где $\mu_C^2=\alpha_C^2-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$, $\mu_B^2=\frac{1}{L_B^2}+\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

2.433. $\mu_CD_C\frac{J_1(\mu_Cr_0)}{J_0(\mu_Cr_0)}=\mu_RD_R\frac{K_0(\mu_Rr_1)I_1(\mu_Rr_0)+I_1(\mu_Rr_1)K_1(\mu_Rr_0)}{I_0(\mu_Rr_1)K_0(\mu_Rr_0)-K_0(\mu_Rr_1)I_0(\mu_Rr_0)}$,

где $\mu_C^2=\alpha_C^2-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$, $\mu_R^2=\frac{1}{L_R^2}+\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

2.434. $F_k=\frac{JE}{4l_0^2}\mu_1^2$, $J=\frac{4l_1l_2^3}{3}$ — момент инерции основания $x=l_0$, $\mu_1>0$ — наименьший корень уравнения

$$\begin{aligned}&1)\ J_0(\mu)Y_1(\alpha\mu)-Y_0(\mu)J_1(\alpha\mu)=0,\\&2)\ J_1(\beta\mu)Y_2(\mu)-Y_1(\beta\mu)J_2(\mu)=0,\end{aligned}\qquad(2.102)$$

$\alpha=\sqrt{1-\frac{l}{l_0}}$, $\beta=\sqrt{\frac{l_0}{l_0-l}}$. Указание. Требуется найти наименьшее собственное значение задачи

$$x^pu''+\lambda u=0,\quad l_0-l<x<l_0,\quad \lambda=\frac{Fl_0^p}{JE},$$
$$u(l_0-l)=u'(l_0)=0,$$

где 1) p=1; 2) p=3. Дифференциальное уравнение — частный случай (2.98).

2.435. Собственные частоты $\omega_{mn}=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\frac{\gamma_{mn}}{r_2}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения $J_m(\alpha\mu)Y_m(\mu)-J_m(\mu)Y_m(\mu\alpha)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$, амплитуды собственных колебаний $v_{mn}(r,\varphi)=[A_{mn}J_m(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2})+B_{mn}Y_m(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2})]\cos(m\varphi+\delta_m)$, где $m,n\in\mathbf{N}$.

2.436. Собственные частоты $\omega_{mn}=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\frac{\gamma_{mn}}{r_2}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения $J_{\nu(m)}(\alpha\mu)Y_{\nu(m)}(\mu)-J_{\nu(m)}(\mu)Y_{\nu(m)}(\mu\alpha)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$, $\nu=\frac{\pi m}{\varphi_0}$, амплитуды собственных колебаний

$$v_{mn}(r,\varphi)=[A_{mn}J_{\nu(m)}(\tfrac{\gamma_{mn}r}{r_2})+B_{mn}Y_{\nu(m)}(\tfrac{\gamma_{mn}r}{r_2})]\sin\tfrac{\pi m\varphi}{\varphi_0},\ m\in\mathbf{N}.$$

2.437. $\omega_{mn}=\sqrt{\frac{g\gamma_{mn}}{2}}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения

$$J_m'(\gamma)Y_m'(\alpha\gamma)-J_m'(\alpha\gamma)Y_m(\gamma)=0,\quad \alpha=\frac{r_1}{r_2},\qquad(2.103)$$

$m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$. Указание. См. задачу 1.231.

2.438. 1) $\zeta(x,t)=A\frac{Y_1(kd_1)J_0\left(k(d_1+\frac{d_2-d_1}{l}x)\right)-J_1(kd_1)Y_0\left(k(d_1+\frac{d_2-d_1}{l}x)\right)}{Y_1(kd_1)J_0(kd_2)-J_1(kd_1)Y_0(kd_2)}\cos\omega t$,
$k^2=\frac{\omega^2l^2}{gh(d_2-d_1)^2}$;

2) $\zeta(x,t)=A\frac{Y_1(2k\sqrt{h_1})J_0(2k\xi)-J_1(2k\sqrt{h_1})Y_0(2k\xi)}{Y_1(2k\sqrt{h_1})J_0(2k\sqrt{h_2})-J_1(2k\sqrt{h_1})Y_0(2k\sqrt{h_2})}\cos\omega t$,
$k^2=\frac{\omega^2l^2}{gh_0(h_2-h_1)^2}$, $\xi=\sqrt{h_1+\frac{h_2-h_1}{l}x}$.

Указание. См.задачу 1.236. **2.439.** $\omega_n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_0g}{Ml}}\mu_n$, $M=m+m_0$, $m_0=\rho_0l$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$J_0(\mu)Y_2(\alpha\mu)-Y_0(\mu)J_2(\alpha\mu)=0,\quad \alpha=\sqrt{\frac{m}{M}}.\qquad(2.104)$$

2.440. $\Psi_{mn}(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}R_{mn}(r)\,e^{i\left(m\varphi-\frac{E_{mn}}{\hbar}t\right)}$, $E_{mn}=\frac{\hbar^2}{2Mr_2^2}\gamma_{mn}^2$,
$R_{mn}(r)=c_{mn}\left[Y_m(\gamma_{mn})J_m\left(\frac{\gamma_{mn}}{r_2}r\right)-J_m(\gamma_{mn})Y_m\left(\frac{\gamma_{mn}}{r_2}r\right)\right]$,

$c_{mn}^2=\frac{\gamma_{mn}^2 J_m^2(\alpha\gamma_{mn})}{2r_2^2(J_m^2(\alpha\gamma_{mn})-J_m^2(\gamma_{mn}))}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения

$$J_m(\alpha\gamma)Y_m(\gamma)-Y_m(\alpha\gamma)J_m(\gamma)=0,\quad \alpha=\frac{r_1}{r_2}. \tag{2.105}$$

2.441. $\mathbf{E}(r,\varphi,z,t)=e^{i(\beta z-\omega t)}\mathcal{E}(r,\varphi)$, $\mathbf{H}(r,\varphi,z,t)=e^{i(\beta z-\omega t)}\mathcal{H}(r,\varphi)$;
TEM-волна: $\mathcal{E}=(\frac{A}{r},0,0)$, $\mathcal{H}=(0,\frac{A}{r},0)$, $\beta=\omega c$;
TE-волна: $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,0)$, $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,\mathcal{H}_z)$,
$\mathcal{H}_z=A_{mn}\left[Y_m'(\gamma_{mn})J_m\left(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2}\right)-J_m'(\gamma_{mn})Y_m\left(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2}\right)\right]e^{im\varphi}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения (2.103), $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, остальные компоненты определяются формулами (1.189); TM-волна: $\mathcal{E}(\mathcal{E}_r,\mathcal{E}_\varphi,\mathcal{E}_z)$, $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_r,\mathcal{H}_\varphi,0)$,
$\mathcal{E}_z=B_{mn}\left[Y_m(\gamma_{mn})J_m\left(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2}\right)-J_m(\gamma_{mn})Y_m\left(\frac{\gamma_{mn}r}{r_2}\right)\right]e^{im\varphi}$, $\gamma_{mn}>0$ — корень уравнения (2.105), $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, остальные компоненты определяются формулами (1.187).

2.442. $v(r,t)=\omega r_1\left(\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2-r_1^2}\cdot\frac{r_1}{r}-\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)J_1(\alpha\mu_n)R_n(r)}{J_1^2(\alpha\mu_n)-J_1^2(\mu_n)}e^{-\frac{\nu\mu_n^2}{r_2^2}t}\right)$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.49), функция $R_n(r)$ определена формулой (2.50). Указание. См.задачу 2.420.

2.443. $u(r,t)=\frac{\pi p_0 r_2^2}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\mu_n)R_n(r)}{\mu_n^2(J_0(\alpha\mu_n)+J_0(\mu_n))}\cos\frac{a\mu_n}{r_0}t$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$Y_0(\mu)J_0(\alpha\mu)-J_0(\mu)Y_0(\alpha\mu)=0,\quad \alpha=\frac{r_1}{r_2}, \tag{2.106}$$

$$R_n(r)=Y_0(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_2}r\right)-J_0(\mu_n)Y_0\left(\frac{\mu_n}{r_2}r\right). \tag{2.107}$$

2.444. $u(r,t)=\frac{g}{4a^2}\left[r_2^2-r^2-(r_2^2-r_1^2)\frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}-4\pi r_2^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\mu_n)R_n(r)\cos\frac{a\mu_n}{r_2}t}{\mu_n^2(J_0(\alpha\mu_n)+J_0(\mu_n))}\right]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.106), $R_n(r)$ имеет вид (**??**).

2.445. $Q=-\frac{2\pi kH(P_0-P_1)}{\mu\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1+2\ln\frac{r_2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2(\gamma_n)}{J_0^2(\gamma_n)-J_0^2(\alpha\gamma_n)}e^{-\left(\frac{a\gamma_n}{r_2}\right)^2 t}\right]$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения (2.106).

2.446. $u(x,t)=\frac{l_0F_0}{ES_0}\left[\alpha\ln\frac{l_0}{l_0-x}+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)J_1(\alpha\mu_n)X_n(x)\cos\frac{a\mu_n}{l}t}{\mu_n\left(J_1^2(\alpha\mu_n)-J_0^2(\mu_n)\right)}\right]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.102), в котором $\alpha=1-\frac{l}{l_0}$,

$$X_n(x)=Y_0(\mu_n)J_0\left(\mu_n\left(1-\tfrac{x}{l_0}\right)\right)-J_0(\mu_n)J_0\left(\mu_n\left(1-\tfrac{x}{l_0}\right)\right).$$

2.447. $u(x,t)=\frac{I}{m+m_0}t-\frac{I}{\rho S_0 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\alpha\mu_n)X_n(x)}{J_1^2(\alpha\mu_n)-J_1^2(\mu_n)}\sin\frac{a\mu_n}{l_0}t$, m_0 — масса стержня, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.49), в котором $\alpha=1-\frac{l}{l_0}$,

$$X_n(x)=Y_1(\mu_n)J_0\left(\mu_n\left(1-\tfrac{x}{l_0}\right)\right)-J_1(\mu_n)Y_0\left(\mu_n\left(1-\tfrac{x}{l_0}\right)\right).$$

2.448. $u(x,t)=2\pi v_0\sqrt{\frac{Ml}{m_0g}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)J_2(\mu_n\alpha)X_n(x)}{\mu_n\left(J_0^2(\mu_n)-J_2^2(\mu_n\alpha)\right)}\sin\omega_n t$,
$\omega_n=\frac{\mu_n}{2}\sqrt{\frac{m_0g}{Ml}}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.104),

$$X_n(x)=Y_0(\mu_n)J_0\left(\mu_n\sqrt{1-\frac{m_0x}{Ml}}\right)-J_0(\mu_n)Y_0\left(\mu_n\sqrt{1-\frac{m_0x}{Ml}}\right). \qquad (2.108)$$

2.449. $u(x,t)=\frac{4\pi MF_0}{mg\rho_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)J_2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)X_n(x)}{\mu_n^2\left[J_0^2(\mu_n)-J_2^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right]}\cos\omega_n t$, $\omega_n=\frac{\mu_n}{2}\sqrt{\frac{m_0g}{Ml}}$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения (2.104), собственные функции $X_n(x)$ имеют вид (2.108). **2.450.** $u(x,t)=\frac{4\pi Mu_0}{m_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)X_n(x)}{\mu_n^2\left[J_0^2(\mu_n)-J_2^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right]}\cos\omega_n t$,
где $\omega_n=\frac{\mu_n}{2}\sqrt{\frac{m_0g}{Ml}}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.104), собственные функции $X_n(x)$ имеют вид (2.108).

2.451. $u(x,t)=\frac{F_0}{\rho_0 g}\left[4\pi\frac{M}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)J_2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)X_n(x)\cos\omega_n t}{\mu_n^2\left[J_0^2(\mu_n)-J_2^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right]}-\ln\left(1-\frac{mx}{Ml}\right)\right]$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения (2.104), $X_n(x)$ имеют вид (2.108).

2.452. $u(r,t)=\pi u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)J_0(\alpha\mu_n)R_n(r)}{J_1^2(\mu_n)-J_0^2(\alpha\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_2}\right)^2 t}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$Y_1(\mu)J_0(\alpha\mu)-J_1(\mu)Y_0(\alpha\mu)=0,\quad \alpha=\frac{r_1}{r_2}, \qquad (2.109)$$

$$R_n(r)=Y_1(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_2}r\right)-J_1(\mu_n)Y_0\left(\frac{\mu_n}{r_2}r\right). \qquad (2.110)$$

2.453. $u(r,t)=\frac{q_0r_1}{k}\left[\ln\frac{r_2}{r}+\frac{\pi r_2}{r_1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\mu_n)J_0(\mu_n)R_n(r)}{\mu_n(J_1^2(\alpha\mu_n)-J_0^2(\mu_n))}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_2}\right)^2 t}\right]$,
$R_n(r))$ имеет вид (2.107), $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.102), где $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$.

2.454. $P^2(r,t)=P_1^2-\pi(P_0^2-P_1^2)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)R_n(r)}{J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n)}e^{-\left(\frac{a\gamma_n}{r_2}\right)^2 t}$, $R_n(r)$ имеет вид (2.110), $\gamma_n>0$ — корень уравнения (2.109).

2.455. $u(r,z)=\pi hr_2u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\mu_n)R_n(r)}{J_0(\alpha\mu_n)+J_0(\mu_n)}\cdot\frac{e^{-\frac{\mu_n}{r_2}z}}{\mu_n+hr_2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.106), $R_n(r)$ определяется формулой (**??**).

2.456. $u(r,z)=\frac{\pi r_2q_0}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\alpha\mu_n)R_n(r)}{\mu_n\left(J_1^2(\alpha\mu_n)-J_0^2(\mu_n)\right)}e^{-\frac{\mu_n}{r_2}z}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.102), $R_n(r)$ определяется формулой (2.107).

2.457. $u(r,z)=\pi u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)J_0(\alpha\mu_n)R_n(r)}{J_1^2(\mu_n)-J_0^2(\alpha\mu_n)}\cdot\frac{sh\frac{\mu_n}{r_2}z}{sh\frac{\mu_n}{r_2}l}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.109), в котором $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$, $R_n(r)$ имеет вид (2.110).

2.458. $u(r,z)=u_0\left[\frac{r_0^2-r_1^2}{r_2^2-r_1^2}-\frac{\pi^2r_0}{2r_2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_nJ_1^2(\alpha\mu_n)R_n'(r_0)R_n(r)}{J_1^2(\alpha\mu_n)-J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{ch\frac{\mu_n}{r_2}(l-z)}{ch\frac{\mu_n}{r_2}l}\right]$,

$\mu_n > 0$ — корень уравнения (2.88), $R_n(r)$ имеет вид (2.110), $R_n'(r)$ — производная по всему аргументу.

2.459. $u(r,t) = \frac{r_0^2 F_0}{2\pi D} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)}{\mu_n^4 I_0^2(\mu_n) J_0^2(\mu_n)} R_n(r) \cos \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{a\mu_n^2}{r_0^2}$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения

$$J_0(\mu) I_1(\mu) + J_1(\mu) I_0(\mu) = 0, \tag{2.111}$$

$$R_n(r) = I_0(\mu_n) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) - J_0(\mu_n) I_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right), \tag{2.112}$$

Решение. Постановка задачи (см. задачу 1.99.):

$$u_{tt} + a^2 \Delta^2 u = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; 0 < t,$$
$$u(r_0, t) = u_r(r_0, t) = 0,$$
$$|u(r,t)| < \infty, \;\; u(r,0) = u_0(r), \;\; u_t(r,0) = 0,$$

где $u_0(r)$ — решение стационарной задачи

$$\Delta^2 u_0 - \tfrac{F_0}{D} \tfrac{\delta(r)}{2\pi r} = 0, \quad 0 < r < r_0,$$
$$|u_0| < \infty, \;\; u_0(r_0) = u_0'(r_0) = 0.$$

Согласно методу разделения переменных решение u(r,t)=R(r)T(t), для функции $T(t)$ получается уравнение $T'' + a^2 \lambda T = 0$, а для функции $R(r)$ — задача на собственные значения

$$\Delta^2 R - \lambda R = 0, \quad 0 < r < r_0, \tag{2.113}$$

$$|R| < \infty, \;\; R(r_0) = R'(r_0) = 0. \tag{2.114}$$

Эрмитовость оператора $\mathcal{L} = \Delta^2$ следует из его положительности. Доказательство последнего свойства основано на 2-ой формуле Грина

$$\int\limits_S \left[R\,\Delta^2 R - (\Delta R)^2\right] ds = \int\limits_\Gamma \left(R \tfrac{d\Delta R}{dr} - \Delta R \tfrac{dR}{dr}\right) dl,$$

где S — круг радиуса r_0, Γ — граница круга, откуда

$$\int\limits_0^{r_0} R\,\Delta^2 R\, r\, dr = \int\limits_0^{r_0} (\Delta R)^2\, r\, dr \geq 0.$$

Функции $J_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r)$, $Y_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r)$, $I_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r)$, $K_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r)$ представляют собой фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения (2.113). Это становится очевидным, если уравнению придать форму $(\Delta + \sqrt{\lambda})(\Delta - \sqrt{\lambda}) R = 0$. Таким образом,

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r) + C_2 I_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r) + C_3 Y_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r) + C_4 K_0(\sqrt[4]{\lambda}\, r).$$

Граничные условия выполняются, если $C_3 = C_4 = 0$,

$$\begin{cases} C_1 J_0(\sqrt[4]{\lambda} r_0) + C_2 I_0(\sqrt[4]{\lambda} r_0) = 0 \\ C_1 J_1(\sqrt[4]{\lambda} r_0) - C_2 I_1(\sqrt[4]{\lambda} r_0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^4$, где μ_n — корень уравнения (2.111), а собственные функции $R_n(r)$ имеют вид (2.112). Для вычисления нормы собственных функций пригоден способ, изложенный в примере 2.1. Пусть $R(r)$ — какое-нибудь решение уравнения (2.113), тогда

$$\Delta^2 R - \lambda R = 0,$$
$$\Delta^2 R_n - \lambda_n R_n = 0,$$

откуда

$$\int\limits_S (R_n \Delta^2 R - R\,\Delta^2 R_n)ds = (\lambda - \lambda_n) \int\limits_S R\,R_n ds.$$

По второй формуле Грина

$$\int\limits_S (R_n\,\Delta^2 R - \Delta R_n\,\Delta R + \Delta R\,\Delta R_n - R\,\Delta^2 R_n)ds =$$
$$= \int\limits_\Gamma \left(R_n \tfrac{d\Delta R}{dr} - \Delta R \tfrac{dR_n}{dr} - R\tfrac{d\Delta R_n}{dr} + \Delta R_n \tfrac{dR}{dr}\right) dl.$$

Следовательно,

$$\int\limits_S R\,R_n ds = \tfrac{2\pi r_0 \left(\Delta R_n \frac{dR}{dr} - R\frac{d\Delta R_n}{dr}\right)|_{r=r_0}}{\lambda - \lambda_n}.$$

Так как $R = R(\sqrt[4]{\lambda}\, r)$, то при $\lambda \to \lambda_n$

$$\| R_n \|^2 = \int\limits_0^{r_0} R_n^2 r\,dr = r_0 \left(\Delta R_n \tfrac{d}{dr}\left(\tfrac{r}{4\lambda_n}\tfrac{dR_n}{dr}\right) - \tfrac{r}{4\lambda}\tfrac{dR_n}{dr}\tfrac{d\Delta R_n}{dr}\right)\Big|_{r=r_0} =$$
$$= \tfrac{r_0^2}{4\lambda_n}\Delta R_n = \tfrac{d^2 R_n}{dr^2}\Big|_{r=r_0}.$$

Если учесть, что

$$\Delta R_n|_{r=r_0} = \left(\tfrac{d^2 R}{dr^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{dR}{dr}\right)\Big|_{r=r_0} = \tfrac{d^2 R}{dr^2}\Big|_{r=r_0},$$

то выражение для квадрата нормы приобретает вид

$$\| R_n \|^2 \tfrac{r_0^2}{4\lambda_n}(\Delta R_n(r_0))^2 =$$
$$= \tfrac{r_0^2}{4\lambda_n}\left[\Delta\left(I_0(\mu_n)J_0\left(\tfrac{\mu_n}{r_0}r\right) - J_0(\mu_n)I_0\left(\tfrac{\mu_n}{r_0}r\right)\right)\right]^2\Big|_{r=r_0} =$$
$$= \tfrac{r_0^2}{4\lambda_n}\left[-\tfrac{\mu_n^2}{r_0^2}\left(I_0(\mu_n)J_0\left(\tfrac{\mu_n}{r_0}r\right) + J_0(\mu_n)I_0\left(\tfrac{\mu_n}{r_0}r\right)\right)\right]^2\Big|_{r=r_0} = r_0^2 I_0^2(\mu_n)J_0^2(\mu_n).$$

Решение задачи имеет форму ряда

$$u(r,t) = \textstyle\sum_{n=1}^\infty A_n R_n(r)\cos\omega_n t, \qquad \omega_n = \tfrac{a\mu_n^2}{r_0^2}.$$

При $t = 0$

$$u_0(r) = \textstyle\sum_{n=1}^\infty A_n R_n(r),$$

где $A_n = \frac{1}{\|R_n\|^2}(u_0,\, R_n)$.

В силу эрмитовости оператора $\mathcal{L} = \Delta^2$

$$(u_0,\, R_n) = \tfrac{1}{\lambda_n}(u_0,\, \Delta^2 R_n) = \tfrac{1}{\lambda_n}(\Delta^2 u_0,\, R_n) = \tfrac{F_0 R_n(0)}{2\pi D\lambda_n} = \tfrac{r_0^4 F_0}{2\pi D}\tfrac{I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)}{\mu_n^4}.$$

2.460. $u(r,t) = \frac{aI}{2\pi D}\sum_{n=1}^\infty \frac{I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)}{\mu_n^2 I_0^2(\mu_n) J_0^2(\mu_n)} R_n(r)\sin\frac{a\mu_n^2}{r_0}t$, $\mu_n > 0$ — корень

уравнения (2.111), $R_n(r)$ имеет вид (2.112).

2.461. $u(r,t)=\frac{r_0^2F_0}{16\pi D}\Big[1-\frac{r^2}{r_0^2}+\frac{r^2}{r_0^2}\ln\frac{r^2}{r_0^2}-8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{I_0(\mu_n)-J_0(\mu_n)}{\mu_n^4I_0^2(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}R_n(r)\cos\frac{a\mu_n^2}{r_0}t\Big]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.111), $R_n(r)$ имеет вид (2.112).

2.462. $u(r,t)=\frac{2gr_0^4}{\pi a^2}\Big[\frac{1}{128}\Big(1-\frac{r^2}{r_0^2}\Big)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\cos\frac{a\mu_n^2}{r_0^2}t}{\mu_n^5I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}\Big]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.111), $R_n(r)$ имеет вид (2.112).

2.463. $u(r,t)=\frac{F_0}{\rho h\omega^2}\Big[\frac{I_1(kr_0)J_0(kr)+J_1(kr_0)I_0(kr)}{I_1(kr_0)J_0(kr_0)+J_1(kr_0)I_0(kr_0)}-1\Big]\sin\omega t-$
$-\frac{2\omega r_0^2F_0}{\rho ha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\sin\omega_nt}{\mu_n^5(\omega_n^2-\omega^2)I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$,

где $k=\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, $\omega_n=\frac{a\mu_n^2}{r_0^2}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.111), $R_n(r)$ имеет вид (2.112), величина a определена в задаче 1.99.

2.464. $u(r,t)=A\frac{I_1(kr_0)J_0(kr)+J_1(kr_0)I_0(kr)}{I_1(kr_0)J_0(kr_0)+J_1(kr_0)I_0(kr_0)}\sin\omega t-$
$-\frac{2a\omega A}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\sin\omega_nt}{\mu_n(\omega_n^2-\omega^2)I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$. Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.465. $u(r,t)=\frac{A}{k}\frac{J_0(kr_0)I_0(kr)-I_0(kr_0)J_0(kr)}{J_0(kr_0)I_1(kr_0)+I_0(kr_0)J_1(kr_0)}\sin\omega t-$
$-\frac{2a\omega A}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(r)\sin\omega_nt}{\mu_n^2(\omega_n^2-\omega^2)I_0(\mu_n)J_0(\mu_n)}$. Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.466. Здесь $R_n(r)=Y_0(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_nr}{r_2})-J_0(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_nr}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_0(\gamma)Y_0(\alpha\gamma)-Y_0(\gamma)J_0(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) Если $\beta\ne\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=$
$\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(J_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-J_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-J_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\big)-$
$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)J_0(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$, то

$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\big(J_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})\ln\frac{r_1}{r_2}-J_0(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}-J_0(\gamma_m)\ln\frac{r_1}{r}\big)-$
$-\frac{\pi Ar_2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)J_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\cos\frac{a\gamma_mt}{r_2}}{2\gamma_ma^2(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$
$-\frac{\pi Ar_2^2}{a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\ne m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)J_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$;

2) если $\beta\ne\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(Y_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-Y_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-Y_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\big)-$
$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)Y_0(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\big(Y_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})\ln\frac{r_1}{r_2}-Y_0(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}-Y_0(\gamma_m)\ln\frac{r_1}{r}\big)-$
$-\frac{\pi Ar_2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)Y_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)Y_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\cos\frac{a\gamma_mt}{r_2}}{2\gamma_ma^2(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$
$-\frac{\pi Ar_2^2}{a^2}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\ne m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)Y_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$;

3) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(I_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+I_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-I_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\big)-$
$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)I_0(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(K_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+K_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-K_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\big)-$
$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)K_0(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

5) Если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то
$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(J_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-J_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-J_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\big)t-$
$-\frac{\pi Ar_2^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)J_0(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\big(J_0(\tfrac{\gamma_m r}{r_2})\ln\tfrac{r_1}{r_2}-J_0(\alpha\gamma_m)\ln\tfrac{r}{r_2}-J_0(\gamma_m)\ln\tfrac{r_1}{r}\big)t-$$
$$-\frac{\pi Ar_2^2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)J_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\sin\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m^2a^3(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$
$$-\frac{\pi Ar_2^3}{a^3}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)J_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_m(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

6) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(Y_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-Y_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-Y_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\big)t-$
$-\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)Y_0(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\big(Y_0(\tfrac{\gamma_m r}{r_2})\ln\tfrac{r_1}{r_2}-Y_0(\alpha\gamma_m)\ln\tfrac{r}{r_2}-Y_0(\gamma_m)\ln\tfrac{r_1}{r}\big)t-$$
$$-\frac{\pi Ar_2^2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)Y_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)Y_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\sin\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m^2a^3(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$
$$-\frac{\pi Ar_2^3}{a^3}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)Y_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

7) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(I_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+I_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-I_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)I_0(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

8) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\big(K_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+K_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-K_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)K_0(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}.$$

2.467. Здесь $R_n(r)=Y_0(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_0(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_0(\gamma)Y_1(\alpha\gamma)-Y_(\gamma)J_1(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) Если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то
$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(J_0(\beta r)-J_0(\beta r_2)+\beta r_1J_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\big)+$
$+\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2J_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,
то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2}\big(J_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-J_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_mJ_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\big)-$

$$-\frac{\pi A r_2^2 J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)J_0(\alpha\gamma_m)+J_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$
$$+\frac{\pi A r_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\gamma_m J_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m)R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

2) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(Y_0(\beta r)-Y_0(\beta r_2)+\beta r_1Y_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\big)+$

$+\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2Y_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,

то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2}\big(Y_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-Y_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_mY_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\big)-$
$$-\frac{\pi Ar_2^2J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)Y_0(\alpha\gamma_m)+Y_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$
$$+\frac{\pi Ar_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\gamma_mY_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

3) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(\beta r_1I_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-I_0(\beta r)+I_0(\beta r_2)\big)-$
$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2I_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(\beta r_1K_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-K_0(\beta r)+K_0(\beta r_2)\big)-$
$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2K_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

5) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(J_0(\beta r)-J_0(\beta r_2)+\beta r_1J_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\big)t+$

$+\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2J_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,

то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2}\big(J_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-J_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_mJ_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2^3J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)J_0(\alpha\gamma_m+J_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\sin\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m^2a^3(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$
$$+\frac{\pi Ar_2^3}{a^3}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{\gamma_mJ_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

6) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(Y_0(\beta r)-Y_0(\beta r_2)+\beta r_1Y_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\big)t+$

$+\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2Y_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,

то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2}\big(Y_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-Y_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_mY_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2^3J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)Y_0(\alpha\gamma_m)+Y_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\sin\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m^2a^3(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$
$$+\frac{\pi Ar_2^3}{a^3}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\gamma_mY_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

7) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(\beta r_1I_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-I_0(\beta r)+I_0(\beta r_2)\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2I_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

8) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\big(\beta r_1K_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-K_0(\beta r)+K_0(\beta r_2)\big)t-$
$$-\frac{\pi Ar_2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2K_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_nJ_1(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}.$$

2.468. Здесь $R_n(r)=Y_1(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_nr}{r_2})-J_1(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_nr}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_1(\gamma)Y_1(\alpha\gamma)-Y_1(\gamma)J_1(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) $u(r,t)=\int_0^t h(t-\tau)\tau\,d\tau$;

2) если $\beta\ne\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(\frac{J_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))\big)+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2J_1(\beta r_1)-r_1J_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\Big)+$$
$$+\frac{A(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)+\frac{A(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)J_1(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))},\quad\text{если }\beta=\frac{\gamma_m}{r_2},$$
то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_ma^2}\big(\frac{r_2}{\gamma_m}J_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})+2(r_2J_1(\gamma_m)-r_1J_1(\alpha\gamma_m))\big)+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2J_1(\alpha\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m))}{\gamma_ma^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\Big)+$$
$$+\frac{Ar_2(r_2J_1(\gamma_m)-r_1J_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_ma^2)(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)+\frac{Ar_2((r_2J_1(\gamma_m))-r_1J_1(\alpha\gamma_m)t^2}{\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{\pi Ar_2J_1(\alpha\gamma_m)(r_2J_1(\alpha\gamma_m)J_1'(\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m)J_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_mt}{r_2}}{\gamma_ma^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$
$$-\frac{2\pi A\gamma_mr_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\ne m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)J_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

3) если $\beta\ne\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(\frac{Y_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))\big)+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\beta r_1)-r_1Y_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\Big)+$$
$$+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)Y_1(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))},\quad\text{если }\beta=\frac{\gamma_m}{r_2},$$
то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_ma^2}\big(\frac{r_2}{\gamma_m}Y_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})+2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m))\big)+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\alpha\gamma_m)-r_1Y_1(\gamma_m))}{\gamma_ma^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\Big)+$$
$$+\frac{Ar_2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_ma^2)(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)+\frac{Ar_2((r_2Y_1(\gamma_m))-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)t^2}{\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{\pi Ar_2J_1(\alpha\gamma_m)(r_2J_1(\alpha\gamma_m)Y_1'(\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m)Y_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_mt}{r_2}}{\gamma_ma^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$
$$-\frac{2\pi A\gamma_mr_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\ne m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)Y_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2I_1(\beta r_2)-2r_1I_1(\beta r_1)-\frac{I_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2I_1(\beta r_1)-r_1I_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$
$+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$
$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)I_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)I_1(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}$;

5) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2K_1(\beta r_2)-2r_1K_1(\beta r_1)-\frac{K_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2K_1(\beta r_1)-r_1K_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$
$+\frac{A(r_2k_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{A(r_2K_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$
$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)K_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)K_1(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}$;

6) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(\frac{J_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))\big)t+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2J_1(\beta r_1)-r_1J_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)t+$
$+\frac{A(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)t+\frac{A(r_2J_1(\beta r_2)-r_1J_1(\beta r_1))t^3}{3\beta(r_2^2-r_1^2)}-$
$-\frac{2\pi A\beta r_2^2}{a^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)J_1(\beta r_1))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,
то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_ma^2}\big(\frac{r_2}{\gamma_m}J_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})+2(r_2J_1(\gamma_m)-r_1J_1(\alpha\gamma_m)\big)t+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2J_1(\alpha\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m))}{\gamma_ma^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)t+$
$+\frac{Ar_2(r_2J_1(\gamma_m)-r_1J_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_ma^2)(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)t+\frac{Ar_2((r_2J_1(\gamma_m))-r_1J_1(\alpha\gamma_m)t^3}{3\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$
$-\frac{\pi Ar_2^2J_1(\alpha\gamma_m)(r_2J_1(\alpha\gamma_m)J_1'(\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m)J_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\sin\frac{a\gamma_mt}{r_2}}{\gamma_m^2a^3(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$
$-\frac{2\pi A\gamma_mr_2^3}{a^3}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)J_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\cos\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}$;

7) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(\frac{Y_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))\big)t+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\beta r_1)-r_1Y_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)t+$
$+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)t+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))t^3}{3\beta(r_2^2-r_1^2)}-$
$-\frac{2\pi A\beta r_2^2}{a^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)Y_1(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_nt}{r_2}}{\gamma_n^2\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}$, если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$,
то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_ma^2}\big(\frac{r_2}{\gamma_m}Y_0(\frac{\gamma_mr}{r_2})+2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)\big)t+$
$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\alpha\gamma_m)-r_1Y_1(\gamma_m))}{\gamma_ma^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)t+$
$+\frac{Ar_2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_ma^2)(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)t+\frac{Ar_2((r_2Y_1(\gamma_m))-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)t^3}{3\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$

$$-\frac{\pi A r_2^2 J_1(\alpha\gamma_m)(r_2 J_1(\alpha\gamma_m)Y_1'(\gamma_m)-r_1 J_1(\gamma_m)Y_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\sin\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{\gamma_m^2 a^3(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$
$$-\frac{2\pi A\gamma_m r_2^3}{a^3}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)Y_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

8) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2I_1(\beta r_2)-2r_1I_1(\beta r_1)-\frac{I_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)t+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2I_1(\beta r_1)-r_1I_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{2}\Big)t+$$
$$+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)t+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))t^3}{3\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{2\pi A\beta r_2^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)I_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)I_1(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\Big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

9) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2K_1(\beta r_2)-2r_1K_1(\beta r_1)-\frac{K_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)t+$
$$+\frac{Ar_1r_2(r_2K_1(\beta r_1)-r_1K_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{2}\Big)t+$$
$$+\frac{A(r_2k_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\Big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\Big)t+\frac{A(r_2K_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))t^3}{3\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$
$$-\frac{2\pi A\beta r_2^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)K_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)K_1(\beta r_1))R_n(r)\sin\frac{a\gamma_n t}{r_2}}{\gamma_n^2\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\Big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}.$$

2.469. 1) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\Big(\frac{r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_1^2-r_2^2)r^{-\nu}+(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^{\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)-$
$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+2}}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\alpha\gamma_n)(J_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\cos\frac{\gamma_n\alpha t}{r_2}}{\gamma_n^2(J_\nu^2(\alpha\gamma_n)-J_\nu^2(\gamma_n))};$$

2) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\Big(\frac{r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_1^2-r_2^2)r^{-\nu}+(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^{\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)t-$
$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+3}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\alpha\gamma_n)(J_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\sin\frac{\gamma_n\alpha t}{r_2}}{\gamma_n^3(J_\nu^2(\alpha\gamma_n)-J_\nu^2(\gamma_n))},$$ где собственные функции $R_n(r)=Y_\nu(\gamma_n)J_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_\nu(\gamma_n)Y_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, γ_n — положительный корень уравнения $J_\nu(\gamma)Y_\nu(\alpha\gamma)-Y_\nu(\gamma)J_\nu(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$.

2.470. 1) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\Big(\frac{r_2^{2\nu+2}+\frac{\nu+2}{\nu}r_1^{2\nu+2})r^{\nu}+r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_2^2-\frac{\nu+2}{\nu}r_1^2)r^{-\nu}}{r_1^{2\nu}+r_2^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)-$
$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+1}}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu'(\alpha\gamma_n)\Big(J_\nu'(\alpha\gamma_n)-\frac{\nu\alpha^{\nu-1}}{\gamma_\nu}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\cos\frac{\gamma_n at}{r_2}}{\gamma_n^2\Big(J_\nu'^2(\alpha\gamma_n)-(1-\frac{\nu^2}{\alpha\gamma_n^2})J_\nu^2(\gamma_n)\Big)};$$

2) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\Big(\frac{r_2^{2\nu+2}+\frac{\nu+2}{\nu}r_1^{2\nu+2}\Big)r^{\nu}+r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_2^2-\frac{\nu+2}{\nu}r_1^2)r^{-\nu}}{r_1^{2\nu}+r_2^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)t-$
$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+2}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu'(\alpha\gamma_n)(J_\nu'(\alpha\gamma_n)-\frac{\nu\alpha^{\nu-1}}{\gamma_n}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\sin\frac{\gamma_n at}{r_2}}{\gamma_n^3(J_\nu^2(\alpha\gamma_n)-(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2\gamma_n^2})J_\nu^2(\gamma_n))},$$ где собственные функции $R_n(r)=Y_\nu(\gamma_n)J_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_\nu(\gamma_n)Y_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, γ_n — положительный корень уравнения $J_\nu(\gamma)Y_\nu'(\alpha\gamma)-Y_\nu(\gamma)J_\nu'(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$.

2.471. 1) $u(r,t)=\frac{A(\nu+2)}{4a^2\nu(\nu+1)}\Big(\frac{(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^{\nu}+r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_2^2-r_1^2)r^{-\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)-$

$$-\frac{A\pi\nu r_2^{\nu+2}}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J'_\nu(\alpha\gamma_n)(J'_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu-1}J'_\nu(\gamma_n))R_n(r)\cos\frac{\gamma_n\alpha t}{r_2}}{\gamma_n^3\left[(1-\frac{\nu^2}{\gamma_n^2})J'^2_\nu(\alpha\gamma_n)-(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2\gamma_n^2})J'^2_\nu(\gamma_n)\right]};$$

2) $u(r,t)=\frac{A(\nu+2)}{4a^2\nu(\nu+1)}\Big(\frac{(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^\nu+r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_2^2-r_1^2)r^{-\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\Big)t-$

$$-\frac{A\pi\nu r_2^{\nu+3}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J'_\nu(\alpha\gamma_n)(J'_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu-1}J'_\nu(\gamma_n))R_n(r)\sin\frac{\gamma_n\alpha t}{r_2}}{\gamma_n^4\left[(1-\frac{\nu^2}{\gamma_n^2})J'^2_\nu(\alpha\gamma_n)-(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2\gamma_n^2})J'^2_\nu(\gamma_n)\right]},$$

где собственные функции $R_n(r)=Y'_\nu(\gamma_n)J_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J'_\nu(\gamma_n)Y_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, γ_n — положительный корень уравнения $J'_\nu(\gamma)Y'_\nu(\alpha\gamma)-Y'_\nu(\gamma)J'_\nu(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$.

2.472. Здесь $R_n(r)=Y_0(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_0(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_0(\gamma)Y_0(\alpha\gamma)-Y_0(\gamma)J_0(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) Если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\Big(J_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-J_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-J_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\Big)-$$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)J_0(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\Big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))},$$

если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\Big(J_0(\tfrac{\gamma_m r}{r_2})\ln\tfrac{r_1}{r_2}-J_0(\alpha\gamma_m)\ln\tfrac{r}{r_2}-J_0(\gamma_m)\ln\tfrac{r_1}{r}\Big)-$$

$$-\frac{\pi Ar_2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)J_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_m t}{r_2})^2t}}{2\gamma_m a^2(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$

$$-\frac{\pi Ar_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)J_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

2) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\Big(Y_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}-Y_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-Y_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}\Big)-$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)Y_0(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\Big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))},$$

если $\beta=\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2a^2\ln\alpha}\Big(Y_0(\tfrac{\gamma_m r}{r_2})\ln\tfrac{r_1}{r_2}-Y_0(\alpha\gamma_m)\ln\tfrac{r}{r_2}-Y_0(\gamma_m)\ln\tfrac{r_1}{r}\Big)-$$

$$-\frac{\pi Ar_2J_0(\alpha\gamma_m)(J_0(\alpha\gamma_m)Y_1(\gamma_m)r_2-J_0(\gamma_m)Y_1(\alpha\gamma_m)r_1)R_m(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_m t}{r_2})^2t}}{2\gamma_m a^2(J_0^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$

$$-\frac{\pi Ar_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m)-J_0(\gamma_n)Y_0(\alpha\gamma_m))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

3) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\Big(I_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+I_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-I_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\Big)-$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)I_0(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\Big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2\ln\alpha}\Big(K_0(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}+K_0(\beta r_2)\ln\frac{r_1}{r}-K_0(\beta r)\ln\frac{r_1}{r_2}\Big)-$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha\gamma_n)(J_0(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2)-J_0(\gamma_n)K_0(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2t}}{\Big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\Big)(J_0^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))},$$

2.473. Здесь $R_n(r)=Y_0(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_0(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_0(\gamma)Y_1(\alpha\gamma)-Y_(\gamma)J_1(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) Если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то

$$u(r,t)=\frac{A}{\beta^2a^2}\Big(J_0(\beta r)-J_0(\beta r_2)+\beta r_1J_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\Big)+$$

$$+\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2 J_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)J_0(\beta r_2))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\left(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\right)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))},\ \text{если}\ \beta=\frac{\gamma_m}{r_2},$$

то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2 a^2}\left(J_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-J_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_m J_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\right)-$

$$-\frac{\pi A r_2^2 J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)J_0(\alpha\gamma_m)+J_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_m t}{r_2})^2 t}}{2\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$

$$+\frac{\pi A r_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\gamma_m J_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)J_0(\gamma_m)R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

2) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2 a^2}\left(Y_0(\beta r)-Y_0(\beta r_2)+\beta r_1 Y_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}\right)+$

$$+\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2 Y_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)-\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\beta r_2))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\left(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\right)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))},$$

если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{Ar_2^2}{\gamma_m^2 a^2}\left(Y_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})-Y_0(\gamma_m)+\alpha\gamma_m Y_1(\alpha\gamma_m)\ln\frac{r}{r_2}\right)-$

$$-\frac{\pi A r_2^2 J_1(\alpha\gamma_m)(\alpha J_0(\gamma_m)Y_0(\alpha\gamma_m)+Y_1(\gamma_m)J_1(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{2\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}+$$

$$+\frac{\pi A r_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\gamma_m Y_1(\alpha\gamma_m)J_0(\gamma_n)-\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)Y_0(\gamma_m))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

3) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2 a^2}\left(\beta r_1 I_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-I_0(\beta r)+I_0(\beta r_2)\right)-$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2 I_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)I_0(\beta r_2))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\left(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\right)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta^2 a^2}\left(\beta r_1 K_1(\beta r_1)\ln\frac{r}{r_2}-K_0(\beta r)+K_0(\beta r_2)\right)-$

$$-\frac{\pi A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(\beta r_2 K_1(\beta r_1)J_0(\gamma_n)+\gamma_n J_1(\alpha\gamma_n)K_0(\beta r_2))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\left(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\right)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_0^2(\gamma_n))}.$$

2.474. Здесь $R_n(r)=Y_1(\gamma_n)J_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})-J_1(\gamma_n)Y_0(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, $\gamma_n>0$ — корень уравнения $J_1(\gamma)Y_1(\alpha\gamma)-Y_1(\gamma)J_1(\alpha\gamma)=0$, $\alpha=\frac{r_1}{r_2}$. 1) $u(r,t)=\int_0^t h(t-\tau)\tau\,d\tau$;

2) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\left(\frac{J_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2 J_1(\beta r_2)-r_1 J_1(\beta r_1))\right)+$

$$+\frac{Ar_1 r_2(r_2 J_1(\beta r_1)-r_1 J_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\left(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{A(r_2 J_1(\beta r_2)-r_1 J_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\left(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\right)+\frac{A(r_2 J_1(\beta r_2)-r_1 J_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)J_1(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\left(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\right)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))},\ \text{если}\ \beta=\frac{\gamma_m}{r_2},$$

то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_m a^2}\left(\frac{r_2}{\gamma_m}J_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})+2(r_2 J_1(\gamma_m)-r_1 J_1(\alpha\gamma_m))\right)+$

$$+\frac{Ar_1 r_2(r_2 J_1(\alpha\gamma_m)-r_1 J_1(\gamma_m))}{\gamma_m a^2(r_2^2-r_1^2)}\left(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{Ar_2(r_2 J_1(\gamma_m)-r_1 J_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_m a^2)(r_2^2-r_1^2)}\left(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\right)+\frac{Ar_2((r_2 J_1(\gamma_m))-r_1 J_1(\alpha\gamma_m)t^2}{\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{\pi A r_2 J_1(\alpha\gamma_m)(r_2 J_1(\alpha\gamma_m)J_1'(\gamma_m)-r_1 J_1(\gamma_m)J_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\cos\frac{a\gamma_m t}{r_2}}{\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$

$$-\frac{2\pi A\gamma_m r_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)J_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)J_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

3) если $\beta\neq\frac{\gamma_n}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(\frac{Y_0(\beta r)}{\beta}+2(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))\big)+$

$$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\beta r_1)-r_1Y_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$$

$$+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{A(r_2Y_1(\beta r_2)-r_1Y_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)Y_1(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}-\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))},$$

если $\beta=\frac{\gamma_m}{r_2}$, то $u(r,t)=\frac{Ar_2}{\gamma_m a^2}\big(\frac{r_2}{\gamma_m}Y_0(\frac{\gamma_m r}{r_2})+2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)\big)+$

$$+\frac{Ar_1r_2(r_2Y_1(\alpha\gamma_m)-r_1Y_1(\gamma_m))}{\gamma_m a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$$

$$+\frac{Ar_2(r_2Y_1(\gamma_m)-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)}{2\gamma_m a^2)(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{Ar_2((r_2Y_1(\gamma_m))-r_1Y_1(\alpha\gamma_m)t^2}{\gamma_m(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{\pi Ar_2J_1(\alpha\gamma_m)(r_2J_1(\alpha\gamma_m)Y_1'(\gamma_m)-r_1J_1(\gamma_m)Y_1'(\alpha\gamma_m))R_m(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_m t}{r_2})^2 t}}{\gamma_m a^2(J_1^2(\alpha\gamma_m)-J_0^2(\gamma_m))}-$$

$$-\frac{2\pi A\gamma_m r_2^2}{a^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)Y_1(\gamma_m)-J_1(\gamma_n)Y_1(\alpha\gamma_m))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n(\gamma_n^2-\gamma_m^2)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

4) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2I_1(\beta r_2)-2r_1I_1(\beta r_1)-\frac{I_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)+$

$$+\frac{Ar_1r_2(r_2I_1(\beta r_1)-r_1I_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$$

$$+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{A(r_2I_1(\beta r_2)-r_1I_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)I_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)I_1(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))};$$

5) $u(r,t)=\frac{A}{\beta a^2}\big(2r_2K_1(\beta r_2)-2r_1K_1(\beta r_1)-\frac{K_0(\beta r)}{\beta}\big)\big)+$

$$+\frac{Ar_1r_2(r_2K_1(\beta r_1)-r_1K_1(\beta r_2))}{\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(\frac{r_2^2\ln\frac{r}{r_2}-r_1^2\ln\frac{r}{r_2}}{r_2^2-r_1^2}+\frac12\big)+$$

$$+\frac{A(r_2k_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))}{2\beta a^2(r_2^2-r_1^2)}\big(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\big)+\frac{A(r_2K_1(\beta r_2)-r_1K_1(\beta r_1))t^2}{\beta(r_2^2-r_1^2)}-$$

$$-\frac{2\pi A\beta r_2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha\gamma_n)(J_1(\alpha\gamma_n)K_1(\beta r_2)-J_1(\gamma_n)K_1(\beta r_1))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n\big(\frac{\gamma_n^2}{r_2^2}+\beta^2\big)(J_1^2(\alpha\gamma_n)-J_1^2(\gamma_n))}.$$

2.475. 1) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\big(\frac{r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_1^2-r_2^2)r^{-\nu}+(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^{\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\big)-$

$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+2}}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\alpha\gamma_n)(J_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\,e^{-(\frac{a\gamma_n t}{r_2})^2 t}}{\gamma_n^2(J_\nu^2(\alpha\gamma_n)-J_\nu^2(\gamma_n))};$$

2) $u(r,t)=\frac{A}{4a^2(\nu+1)}\big(\frac{r_1^{2\nu}r_2^{2\nu}(r_1^2-r_2^2)r^{-\nu}+(r_2^{2\nu+2}-r_1^{2\nu+2})r^{\nu}}{r_2^{2\nu}-r_1^{2\nu}}-r^{\nu+2}\big)t-$

$$-\frac{A\pi r_2^{\nu+3}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\alpha\gamma_n)(J_\nu(\alpha\gamma_n)-\alpha^{\nu}J_\nu(\gamma_n))R_n(r)\sin\frac{\gamma_n\alpha t}{r_2}}{\gamma_n^3(J_\nu^2(\alpha\gamma_n)-J_\nu^2(\gamma_n))},$$ где собственные функ-

ции $R_n(r) = Y_\nu(\gamma_n)J_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2}) - J_\nu(\gamma_n)Y_\nu(\frac{\gamma_n r}{r_2})$, γ_n — положительный корень уравнения $J_\nu(\gamma)Y_\nu(\alpha\gamma) - Y_\nu(\gamma)J_\nu(\alpha\gamma) = 0$, $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$.

2.476. $u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)^2 t}{64a^2} - \frac{2Ar_0^6}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\sin\omega_n t}{\mu_n^9 I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.477. $u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)^2(r^2-7r_0^2)t}{576a^2} - \frac{4Ar_0^8}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)\sin\omega_n t}{\mu_n^{10} I_0(\mu_n)J_0(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.478. $u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)^2(r^4-6r_0^2r^2+29r_0^4)t}{2304a^2} - \frac{128Ar_0^{10}}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\sin\omega_n t}{\mu_n^{13} I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.479. $u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)^2}{64a^2}\Big[\frac{(r^4-6r_0^2r^2+23r_0^4)t^2}{64a^2} + 1\Big] + \frac{4Ar_0^8}{a^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\cos\omega_n t}{\mu_n^{11} I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.480. $u(r,t) = At - \frac{2Ar_0^2}{q}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n)R_n(r)\sin\omega_n t}{\mu_n^5 I_0(\mu_n)J_0^2(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.481. $u(r,t) = \frac{A(r_0^2-r^2)t}{2r_0} - \frac{2Ar_0^3}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)\sin\omega_n t}{\mu_n^6 I_0(\mu_n)J_0(\mu_n)}$.
Обозначения те же, что в задаче 2.463.

2.482. $u(r,\theta) = \frac{u_0}{5}\left[8\left(\frac{r_0}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) - 3\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta)\right]$.

2.483. $\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$. **2.484.** $u(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi P}{3} r\cos\theta, & 0 \le r \le r_0, \\ \frac{4\pi P r_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{r^2}, & r_0 < r. \end{cases}$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, & 0 \le r \le r_0, \\ \frac{4\pi P r_0^3}{3r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta), & r_0 < r. \end{cases}$

2.485. $\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon+2}$, $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} r_0^3 \mathbf{E_0}$.

2.486. $\mathbf{H} = \frac{9\mu\mathbf{H}_0}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2(\mu-1)^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$, $\mathbf{M} = \frac{(2\mu+1)(\mu-1)(r_2^3-r_1^3)\mathbf{H}_0}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2(\mu-1)^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$.

2.487. $P(\theta) = P_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{8}(9\cos\theta^2 - 5)$.

2.488. $P(\theta) = P_0 + \frac{\rho_0 V(t)^2}{8}(9\cos\theta^2 - 5) + \frac{\rho_0 r_0}{2}\frac{dV(t)}{dt}\cos\theta$.

2.489. $\mathbf{V} = \nabla u$, $u(r,\theta) = -\frac{V_0 r_0^3}{2r^2}\cos\theta$, $\mathbf{V}|_S = -\frac{V_0 r_0^3}{2r^3}\mathbf{e}_g$. Указание. Методом продолжений получить внешнюю краевую задачу для шара.

2.490. $\omega_1 = \frac{1}{l}\sqrt{2gh_0}$, $\omega_2 \frac{1}{l}\sqrt{6gh}$. Указание. См.задачу 1.235.

2.491. $u(r,\theta) = \frac{Ar}{5}\left[3P_1(\cos\theta) + \frac{2r^2}{3r_0^2}P_3(\cos\theta)\right]$.

2.492. Если $A_2 = 3\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_1$, то $u(r,\theta) = C - \frac{Ar_1^2}{r} + \frac{Ar_1^2 r_2^2 r^2}{r_2^5 - r_1^5}\left(1 + \frac{r_1^5}{3r^5}\right)P_2(\cos\theta)$.

2.493. $u(r,\theta) = \frac{A}{5}\Big[1 + \frac{20hr^2}{7(2+hr_0)r_0}P_2(\cos\theta) + \frac{8hr^4}{7(4+hr_0)r_0^3}P_4(\cos\theta)\Big]$.

2.494. $u(r,\theta)=\frac{A}{9}\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right)P_2(\cos\theta)$.

2.495. $u(r,\theta)=\frac{A_2r_2^2}{r_1+hr_2(r_2-r_1)}\left(1-\frac{r_1}{r}\right)+$
$+\frac{A_1r_1^2r}{(2-hr_2)r_1^3+(1+hr_2)r_2^3}\left[2-hr_2+(1+hr_2)\frac{r_2^3}{r^3}\right]P_2(\cos\theta)$.

2.496. $u(r,\theta)=2q\ln\frac{r_0}{r}+q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n(2n+1)}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}\right]P_{2n}(\cos\theta)$.

2.497. $u(r,\theta)=\frac{Q_0}{12\pi k}\left\{1-\frac{r^2}{r_0^2}-6\frac{r^2}{r_0^2}\ln\frac{r}{r_0}\cdot P_2(\cos\theta)+\right.$
$\left.+3\frac{r^2}{r_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n+1}{(n-1)(2n+3)}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n-2}\right]P_{2n}(\cos\theta)\right\}$.

2.498. $u(r,\theta)=\frac{Q_0}{4\pi k}\left[\left(r_1^2+r^2-2r_1r\cos\theta\right)^{-\frac12}-\left(r^2+\frac{r_0^4}{r_1^2}-2\frac{r_0^2r}{r_1}\cos\theta\right)^{-\frac12}\right]$.
Указание. Решение представить в виде $u(r,\theta)=v(r,\theta)+\frac{Q_0}{4\pi k\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}}$ и применить разложение для производящей функции.

2.499. $\sigma(\theta)=\frac{Q_0+Q}{4\pi r_0^2}-\frac{Q}{4\pi r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}P_n(\cos\theta)=$
$=\frac{Q_0+Q}{4\pi r_0^2}-\frac{Q}{4\pi r_0}\frac{r_0^2-r_1^2}{(r_0^2+r_1^2-2r_0r_1\cos\theta)^{\frac32}}$, $\mathbf{p}=-Q\mathbf{r}_1$, $\mathbf{F}=Q^2\frac{r_0\mathbf{r}_1}{(r_0^2-r_1^2)^2}$.

2.500. $u(r,\theta)=\frac{Q_0}{4\pi\rho_0 r_0}\left[\ln\frac{r(1+\cos\theta)}{r_{MP_1}-\frac{r_0^2}{r_1}+r\cos\theta}-\frac{r_0}{r_{MP}}-\frac{r_0^2}{r_1r_{MP_1}}\right]$,
где $r_{MP}=(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta)^{\frac12}$, $r_{MP_1}=\left(r^2+\left(\frac{r_0^2}{r_1}\right)^2-2\frac{r_0^2r}{r_1}\cos\theta\right)^{\frac12}$.

2.501. $Q'=\frac{r_0}{r_1^2}p$, $\mathbf{p}'=2\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3\mathbf{p}$, $\mathbf{F}=-2p\frac{r_0r_1(r_0^2+2r_1^2)}{(r_1^2-r_0^2)^4}\cdot\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$,
$\sigma(\theta)=\frac{p}{4\pi r_1^3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}P_n(\cos\theta)=\frac{p}{4\pi r_0}\frac{r_1(r_1^2-5r_0^2)+r_0(r_1^2+3r_0^2)\cos\theta}{(r_1^2+r_0^2-2r_1r_0\cos\theta)^{\frac52}}$.

2.502. $\mathbf{F}=-\frac{Q^2}{r_1^2}(\varepsilon-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{2n+1}\frac{n(n+1)}{n(\varepsilon+1)+1}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$.

2.503. $\mathbf{F}=\frac{M^2}{r_0^4}(\mu-1)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n-3}\frac{n^2(n^2-1)}{n(\mu+1)+\mu}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$.

2.504. $u(r,\theta)=2\pi Q\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}P_{2n}(0)P_{2n}(\cos\theta), & r<r_0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(0)P_{2n}(\cos\theta), & r_0<r.\end{cases}$
Решение. Потенциал $u(r,\theta)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\Delta u=-\frac{4\pi q}{r_0}\delta(r-r_0)\cdot\frac{\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta},\\ |u|_{r=0}<\infty,\quad \lim_{r\to\infty}u=0.\end{gathered}\tag{2.115}$$

Как и в примере 2.12.,
$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r)P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ — собственная функция однородной задачи (см.пример 2.18.), а $u_n(r)$ — решение задачи

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{du_n}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}u_n=-\frac{2\pi q(2n+1)P_n(0)}{r_0}\delta(r-r_0), \tag{2.116}$$

$$|u_n(0)|<\infty,\quad u_n(\infty)=0. \tag{2.117}$$

Решение уравнения (2.116) при условиях (2.117) запишется в виде

$$u_n(r)=\begin{cases} A_nr^n, & r<r_0,\\ B_nr^{-(n+1)}, & r_0<r.\end{cases}$$

Так как $[u_n]_{r_0}=0$, $[u_n']_{r_0}=-2\pi q(2n+1)P_n(0)$, (см.(10.15)), то коэффициенты $B_n=A_nr_0^{2n+1}=2\pi qr_0^{n+1}P_n(0)$. Остается учесть, что $P_{2n+1}(0)=0$.

2.505. $u(x,t)=\frac{2u_0}{5}\left[P_1\left(\frac{x}{l}\right)\cos\omega t-P_3\left(\frac{x}{l}\right)\cos\sqrt{6}\omega t\right]$. Указание. Продолжить начальные данные на промежуток $(-l,l)$ нечетным образом.

2.506. $u(x,t)=\frac{v_0}{2\omega}\left[-3P_1\left(\frac{x}{l}\right)\sin\omega t+\frac{5}{\sqrt{6}}P_3\left(\frac{x}{l}\right)\sin\sqrt{6}\omega t\right]$.

2.507. $u(r,\theta)=u_0-\frac{q_0r_0}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{(2n+1)^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}P_{2n+2}(0)P_{2n+1}(\cos\theta)$.

2.508. $u(r,\theta)=u_0+p(u_0-u_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1+p)}P_{2n+2}(0)P_{2n+1}(\cos\theta)$,

$p=hr_0$. **2.509.** $u(r,\theta)=u_0-\frac{q_0r}{k}\cos\theta-\frac{q_0r_0}{2k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}}{(n+1)(2n-1)}P_{2n}(0)P_{2n}(\cos\theta)$.

2.510. $u(r,\theta)=u_0-\frac{q_0r_0}{k}\left[\frac{r}{r_0}\cos\theta+\frac{p+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}\frac{(4n+1)P_{2n}(0)P_{2n}(\cos\theta)}{(n+1)(2n-1)(n+p)}\right]$,

$p=hr_0$. **2.511.** $u(r,\theta)=u_0+\frac{u_1-u_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{n+1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}P_{2n}(0)P_{2n+1}(\cos\theta)$.

2.512. $u(r,\theta)=C-\frac{I}{2\pi\sigma r}+\frac{I}{4\pi\sigma r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta)$, $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u$.

2.513. $u(r,\theta)=\frac{J}{2\pi\sigma r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2n+1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$, $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u$.

2.514. $u(r,\theta)=\frac{q}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}\right)}{(n+1)(2n+1)}P_{2n+1}(\cos\theta)$.

2.515. 1) $u(r,\theta)=u_0+\frac{Q_0}{4\pi k}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n-1}\right)}{(2n+1)(n+1)}P_{2n+1}(\cos\theta)$;

2) $u(r,\theta)=u_0+\frac{Q_0}{2\pi k}\cdot\frac{r}{r_0}\left[\ln\frac{r}{r_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+3)\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}\right)}{n(2n+3)}P_{2n+1}(\cos\theta)\right]$.

2.516. $u(r,\theta)=u_0-\frac{Q_0r^2}{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n-1}\right)}{(4n^2-1)(n+2)}P_{2n+2}(0)P_{2n+1}(\cos\theta)$.

2.517. 1) $u(r,\theta)=\frac{1}{\sin^2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k(2\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos\theta)}{P'_{\nu_k}(\cos\alpha)\left.\frac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_k}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_k}$;

2) $u(r,\theta)=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k(2\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos\theta)}{P_{\nu_k}(\cos\alpha)\left.\frac{\partial P'_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_k}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_k}$,

$C_k = \int\limits_0^{\alpha} f(\theta) P_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$, $\nu_k > 0$ — корень уравнения 1) $P'_\nu(\cos\alpha) = 0$, 2) $P_\nu(\cos\alpha) = 0$, где $P_\nu(x)$ — функция Лежандра первого рода, $P'_\nu(x)$ — производная по x.

2.518. 1) $u(r,\theta) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(2\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos\theta)}{P'_{\nu_k}(\cos\alpha)\left.\frac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_k}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu_k+1}$;

2) $u(r,\theta) = -\frac{1}{\sin^2\alpha}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos\theta)}{P_{\nu_k}(\cos\alpha)\left.\frac{\partial P'_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_k}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu_k+1}$,

$\nu_k > 0$ — корень уравнения 1) $P'_\nu(\cos\alpha) = 0$, 2) $P_\nu(\cos\alpha) = 0$, остальные обозначения даны в ответе к предыдущей задаче.

2.519. $u(\mathbf{r}) = \frac{D}{2r^3}P_2(\cos\theta)$. **2.520.** $\mathbf{H} = -\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}$, $\mathbf{B} = \frac{8\pi\mathbf{M}}{3}$

2.521. $u(r,\theta) = \begin{cases} \frac{8\pi\omega M}{9c}(r^2 - r_0^2) - \frac{4\pi\omega M}{9c}r^2(3\cos^2\theta - 1), & r < r_0, \\ -\frac{4\pi\omega r_0^5 M}{9cr^3}(3\cos^2\theta - 1), & r_0 < r; \end{cases}$

$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$, $D_{xy} = D_{yz} = D_{zx} = 0$, $D_{zz} = -\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}\omega r_0^2\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — полный магнитный момент шара. **2.522.** $\sigma(\theta) = \frac{\omega r_0 V}{3c}(3 - 5\cos^2\theta)$.

2.523. 1) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{u_0}{5}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 Y_3^1(\theta,\varphi) - 3\frac{r}{r_0}Y_1^1(\theta,\varphi)\right]$;

2) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{4u_0}{7}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 Y_2^{-1}(\theta,\varphi) - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 Y_4^{-1}(\theta,\varphi)\right]$;

3) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{2v_0}{5}\left[2\frac{r}{r_0}Y_1^{-1}(\theta,\varphi) - \frac{1}{9}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 Y_3^{-1}(\theta,\varphi)\right] + C$;

4) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{v_0}{14}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 Y_2^1(\theta,\varphi) + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 Y_4^1(\theta,\varphi)\right] + C$;

5) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{2v_0}{21}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 Y_2^2(\theta,\varphi) + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 Y_4^2(\theta,\varphi)\right] + C$;

6) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{u_0 h r_0}{2+hr_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \sin^2\theta\, \sin 2\varphi$;

7) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{4u_0}{7}\left[\frac{5}{3}\frac{hr_0}{2+hr_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 Y_2^1(\theta,\varphi) + \frac{1}{5}\frac{hr_0}{4+hr_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 Y_4^1(\theta,\varphi)\right]$;

8) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{8}r_0^3\left(\frac{r^4}{r_0^4} - \frac{r^3}{r_0 3}\right)\sin^3\theta\cos 3\varphi +$
$+ v_0 r_0\left(\frac{r}{r_0}Y_1^1(\theta,\varphi) - \frac{r^2}{6r_0^2}Y_2^2(\theta,\varphi)\right) + C$;

9) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{4}\,r\,(r - r_0)\sin\theta\sin\varphi + u_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 \sin^4\theta\sin 4\varphi$;

10) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{10}\,r\,(r^2 - r_0^2)\cos\theta + u_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \sin 2\theta\sin\varphi$;

11) $u(r,\theta,\varphi) = \frac{Ar_0^5}{28}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^5 - \frac{r}{r_0}\right]\sin\theta\cos\varphi +$
$+ u_0\left[\frac{r}{r_0}Y_1^1(\theta,\varphi) + \frac{1}{6}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 Y_2^2(\theta,\varphi)\right]$;

12) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{7}\,r^3\ln\frac{r}{r_0}\sin^3\theta\cos3\varphi+u_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\cos\theta\sin^3\theta\sin3\varphi$;

13) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{5}\,r^2\ln\frac{r}{r_0}\sin2\theta\cos\varphi+u_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\sin^4\theta\cos4\varphi$;

14) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{7}\,r^2\left(\frac{r^2}{2}-r_0^2\right)\sin^2\theta\cos2\varphi+\frac{v_0r_0}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\sin2\theta\sin\varphi+C$;

15) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{18}\,r\,(r^3-r_0^3)\sin\theta\cos\varphi+\frac{v_0r_0}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3\sin^3\theta\cos3\varphi+C$;

16) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{2A}{15}\,r^2\left(\ln\frac{r}{r_0}-\frac{1}{2+hr_0}\right)P_2(\cos\theta)+$
$+\frac{A}{18}(r^2-r_0^2)-\frac{Ar_0}{9h}+\frac{u_0hr^3}{(3+hr_0)r_0^2}\sin^3\theta\cos3\varphi$;

17) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{21}\,r^2\left(r^2-\frac{4+hr_0}{2+hr_0}r_0^2\right)P_2(\cos\theta)+$
$+\frac{A}{60}(r^4-r_0^4)-\frac{Ar_0^3}{15h}+\frac{u_0hr}{1+hr_0}\sin\theta\sin\varphi$.

2.524. 1) $u(r\theta,\varphi)=\frac{u_0}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2Y_1^1(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^4Y_3^1(\theta,\varphi)\right]$;

2) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{4u_0}{7}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5Y_4^1(\theta,\varphi)-\frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2^1(\theta,\varphi)\right]$;

3) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{2u_0}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2^2(\theta,\varphi)-\frac{1}{15}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5Y_4^2(\theta,\varphi)\right]$;

4) $u(r,\theta,\varphi)=-\frac{v_0r_0}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2^1(\theta,\varphi)-\frac{8}{25}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5Y_4^1(\theta,\varphi)\right]$;

5) $u(r,\theta,\varphi)=-\frac{v_0r_0}{21}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2{}^{-2}(\theta,\varphi)-\frac{4}{25}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5Y_4^2(\theta,\varphi)\right]$;

6) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{u_0hr_0}{3+hr_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin2\theta\sin\varphi$;

7) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{4u_0r_0}{7}\left[\frac{2}{3}\frac{r_0h}{3+r_0h}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2^1(\theta,\varphi)-\frac{1}{5}\frac{r_0h}{5+r_0h}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5Y_4^1(\theta,\varphi)\right]$;

8) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{2r}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)\sin\theta\sin\varphi$;

9) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{6r}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-1\right]\sin^2\theta\cos2\varphi+u_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin2\theta\sin\theta\sin2\varphi$;

10) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{4r^2}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)\sin^2\theta\cos2\varphi+$
$+\frac{u_0}{3}\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^3Y_2^1(\theta,\varphi)+\frac{1}{5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^4Y_3^2(\theta,\varphi)\right]$;

11) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{r}\ln\frac{r_0}{r}+u_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin2\theta\sin\varphi$;

12) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{3r^2}\ln\frac{r_0}{r}\sin\theta\cos\varphi+u_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin^2\theta\sin2\varphi$;

13) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{3r^2}\ln\frac{r_0}{r}\cos\theta+u_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^4\sin^3\theta\cos3\varphi$;

14) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{2r}\left(\frac{r_0}{2r}-1\right)\cos\theta+\frac{v_0r_0}{5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5\sin^4\theta\cos4\varphi$;

15) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{12r}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3-1\right]\sin^2\theta\cos\theta\sin2\varphi+$
$+\frac{v_0r_0}{5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5\sin^3\theta\cos\theta\cos^3\varphi$;

16) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{3r^2}(\ln\frac{r_0}{r}-\frac{1}{2})\sin\theta\sin\varphi+$
$+\frac{v_0r_0}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin\theta\sin\varphi(\cos\theta-\sin\theta\cos\varphi)$.

2.525. 1) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{u_1r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r}-1\right)+\frac{u_2r_1^2r_2^3}{r_2^5-r^5}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\sin^2\theta\cos2\varphi$;

2) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{r_1r_2}{r_2^3-r_1^3}\left[\left(\left(\frac{r_2}{r}\right)^2-\frac{r}{r_2}\right)u_1r_1\cos\theta+\right.$
$\left.+\left(\frac{r}{r_1}-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right)u_2r_2\sin\theta\sin\varphi\right];$

3) $u(r,\theta,\varphi)=u_1\left[\frac{r_1^2r_2}{r_2^3-r_1^3}\left(\frac{r}{r_2}-\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right)+\right.$
$\left.+\frac{r_1^3r_2^2}{r_2^5-r^5}\left(\left(\frac{r_2}{r}\right)^3-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right)\cos\theta\right]\sin\theta\sin\varphi;$

4) $u(r,\theta,\varphi)=-\frac{u_1}{3}+\frac{4u_1r_1^3r_2^2}{2r_2^5+3r_1^5}\left[\left(\frac{r}{r_2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{r_2}{r}\right)^3\right]P_2(\cos\theta)+$
$+\frac{v_2r_1r_2^3}{2r_1^3+r_2^3}\left[\frac{r}{r_1}-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\sin\theta\sin\varphi;$

5) $u(r,\theta,\varphi)=-\frac{2v_1r_1^2}{3r_2}\left(1-\frac{r_2}{r}\right)-\frac{2v_1r_1^4r_2^2}{3(2r_1^5+3r_2^5)}\left[\left(\frac{r_2}{r}\right)^3-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]P_2(\cos\theta)+$
$+\frac{3u_2r_1^2r_2^3}{2r_1^5+3r_2^5}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\sin2\theta\sin\varphi;$

6) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{v_1r_1^3r_2}{r_2^3-r_1^3}\left[\frac{r}{r_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right]\cos\theta+$
$+\frac{v_2r_1r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\left[\frac{r}{r_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\sin\theta\sin\varphi+C;$

7) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{4}\left[r^2-\frac{(r_1^2+r_2^2)(r_1+r_2)r^3-r_1^3r_2^3}{(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)r^2}\right]\sin\theta\sin\varphi+$
$+\frac{u_1r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r}-1\right)+\frac{u_2r_1^2r_2^3}{r_2^5-r_1^5}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\sin2\theta\sin\varphi;$

8) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{A}{21}\left[r^4-\frac{(4r_1^7+r_2^7)r^5+2r_1^5r_2^5(r_2^2-2r_1^2)}{(2r_1^5+3r_2^5)r^3}\right]P_2(\cos\theta)+$
$+\frac{A}{60}\left(r^4+\frac{4r_1^5}{r}-\frac{4r_1^5+r_2^5}{r_2}\right)+\frac{u_2r_1^3r_2^3}{2r_1^5+3r_2^5}\left(\frac{3r^2}{r_1^2}+2\frac{2r_1^3}{r^3}\right)\sin2\theta\cos\varphi;$

9) $u(r,\theta,\varphi)=A\left(\frac{1}{r}\ln\frac{r_2}{r}-\frac{1}{r_1}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)+$
$+\frac{u_1r_1^3r_2^2}{3r_1^5+2r_2^5}\left(3\frac{r^2}{r_2^2}+\frac{r_2^3}{r^3}\right)\sin2\theta\sin\varphi+\frac{v_2r_1r_2^3}{2r_1^3+r_2^3}\left(\frac{r}{r_1}-\frac{r_1^2}{r^2}\right)\cos\theta;$

10) $u(r,\theta,\varphi)=C+\frac{A}{5}\left[\left(\frac{r_1^5\ln r_1-r_2^5\ln r_2}{r_2^5-r_1^5}-\frac{1}{2}\right)r^2+\frac{2r_1^5r_2^5}{3r^3}\cdot\frac{\ln\frac{r_1}{r_2}}{r_2^5-r_1^5}+r^2\ln r\right]+$
$+\frac{v_1r_1^3r_2}{r_2^3-r_1^3}\left(\frac{r_2^2}{2r^2}+\frac{r}{r_2}\right)\sin\theta\sin\varphi+\frac{v_2r_1^2r_2^2}{2(r_2^5-r_1^5)}\left(\frac{r^2}{r_1^2}+\frac{2r_1^3}{3r^3}\right)\sin^2\theta\cos2\varphi.$

2.526. $E_l=\frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)$, $\psi_{lm}(r,\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|m|)}{(l+|m|)}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$, $l\in\mathbf{N}$, энергетический уровень E_l имеет кратность вырождения $2l+1$. Указание. См. задачу 1.111.

2.527. $\Psi(\theta,\varphi,t)=\frac{\sqrt{14}}{8}\psi_{22}(\theta,\varphi)e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t}+\frac{5\sqrt{2}}{8}\psi_{32}(\theta,\varphi)e^{-\frac{iE_3}{\hbar}t}$, $\psi_{lm}(\theta,\varphi)$ и E_l даны в ответе к задаче 2.526. **2.528.** Внутри сферы $\mathbf{H}=\frac{2\omega Q}{3cr_0}\mathbf{e}_z$ (однородное поле), вне сферы поле $\mathbf{H}=\frac{M}{r^3}(2\cos\theta\cdot\mathbf{e}_r+\sin\theta\cdot\mathbf{e}_\theta)$ (оно эквивалентно полю диполя с магнитным моментом $\mathbf{M}=\frac{Q\omega r_0^2}{3c}\mathbf{e}_z$).

2.529. $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$, $A(r,\theta) = \frac{2\pi\rho\omega\,\sin\theta}{c}\begin{cases} \frac{r_0^2 r}{3} - \frac{r^3}{15}, & 0 \le r \le r_0, \\ \frac{2r_0^5}{15r^2}, & r_0 < r. \end{cases}$

Указание. См. задачу 1.337. **2.530.** $A_\theta = A_r = 0$,

$A_\varphi = \frac{\pi I}{c}\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1}\frac{P^1_{2n+1}(0)P^1_{2n+1}(\cos\theta)}{(n+1)(2n+1)}, & r < r_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+2}\frac{P^1_{2n+1}(0)P^1_{2n+1}(\cos\theta)}{(n+1)(2n+1)}, & r_0 < r\,; \end{cases}$

в предельном случае $A_\varphi = \frac{M}{r^2}\sin\theta$. Указание. Так как поле обладает аксиальной симметрией, то решение уравнения

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{e}_\varphi\tfrac{4\pi I}{cr_0}\delta(r-r_0)\cdot\delta(\theta-\tfrac{\pi}{2})$$

имеет вид $\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = A_\varphi(r,\theta)\,\mathbf{e}_\varphi$. Для $A_\varphi(r,\theta)$ получается задача

$$\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}r^2\tfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \tfrac{1}{r^2\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\tfrac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} - \tfrac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} = -\tfrac{4\pi I}{cr_0}\delta(r-r_0)\cdot\delta(\theta-\tfrac{\pi}{2}),$$
$$|A|_{r=0} < \infty,\ \ \lim_{r\to\infty} A = 0.$$

Собственные функции — присоединенные функции Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$.

2.531. $\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}$, $A_r = A_\theta = 0$,

$A_\varphi(r,\theta) = \frac{\pi\mu I}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+2}\frac{4n+3}{(2n+1)(\mu+1)+\mu}\cdot\frac{P^1_{2n+1}(0)P^1_{2n+1}(\cos\theta)}{(n+1)(2n+1)}$.

2.532. Поле H уменьшается в $k = 1 + \frac{2(\mu-1)}{\mu+2}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3$ раз.

2.533. 1) $r_k = \pi\sqrt{\frac{3D}{\beta}}$; 2) $r_k = \mu\sqrt{\frac{D}{\beta}}$, где $\mu > 0$ — наименьший корень уравнения $\frac{1}{\mu} - ctg\,\mu = \frac{1}{2\sqrt{\beta D}}$. **2.534.** $E_{nk} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\mu^2_{n+\frac12,k}$, $n \in \mathbf{N}_0$, $k \in \mathbf{N}$.

2.535. $U_0 \ge \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2}$. **2.536.** $U_0 > \frac{\hbar^2}{8mr_0}\mu_{01}^2$. Решение. Стационарное состояние частицы с наименьшей энергией описывается сферически симметричной волновой функцией, которая удовлетворяет уравнению

$$-\tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r) + U(r)\psi(r) = E\psi(r),\ \ 0 < r,$$

и условиям $|\psi(0)| < \infty$, $\int_0^\infty \psi^2 r^2 dr = 1$.

Замена переменных $u(r) = r\,\psi(r)$, $\xi = e^{-\frac{r}{2r_0}}$ приводит к задаче

$$u'' + \tfrac{1}{\xi}u' + \left(\alpha^2 - \tfrac{\nu^2}{\xi^2}\right)u = 0,\ \ 0 < \xi < 1,\ \ \alpha^2 = \tfrac{8mU_0}{\hbar^2}r_0^2,\ \ \nu = \tfrac{2r_0}{\hbar}\sqrt{2mE},$$
$$u(1) = 0,\ \ \int_0^1 u^2(\xi)\tfrac{d\xi}{\xi} < \infty.$$

Условию нормировки удовлетворяет $u(\xi) = AJ_\nu(\alpha\xi)$. Так как нули функции $J_\nu(\alpha)$ растут с ростом ν, то при $\alpha \le \mu_{01}$ уравнение $J_\nu(\alpha) = 0$ не имеет корней ни при каком $\nu > 0$.

2.537. $E_{nk} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\mu_{nk}^2$, $\psi_{nkm}(r,\theta,\varphi) = \frac{R_{nk}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)}{\|R_{nk}\|\|Y_n^m\|}$, $n \in \mathbf{N}_0$, $k \in \mathbf{N}$,

$\mu_{nk} > 0$ — корень уравнения $Y_{n+\frac12}(\mu)J_{n+\frac12}(\alpha\mu) - J_{n+\frac12}(\mu)Y_{n+\frac12}(\alpha\mu) = 0$,

$\alpha = \frac{r_1}{r_2}$, $R_{nk}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[Y_{n+\frac12}(\mu_{nk})J_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_2}r\right) - J_{n+\frac12}(\mu_{nk})Y_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_2}r\right)\right]$,

функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ имеют вид (2.58), $\|R_{nk}\|^2=\frac{2r_2^2}{\pi^2\mu_{nk}^2}\left(1-\frac{J^2_{n+\frac12}(\mu_{nk})}{J^2_{n+\frac12}(\alpha\mu_{nk})}\right)$.

2.538. Поле электрического типа: $\mathbf{E}{=}e^{i\omega t}(\mathcal{E}_r,\,\mathcal{E}_\theta,\,\mathcal{E}_\varphi)$, $\mathbf{H}{=}e^{i\omega t}(0,\,\mathcal{H}_\theta,\,\mathcal{H}_\varphi)$, компоненты векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ выражаются через функцию u по формулам (1.183), где

$$u(r,\theta,\varphi)=A\sqrt{r}J_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{ns}r}{r_0}\right)Y_n^m(\theta,\varphi),$$

$\gamma_{ns}>0$ — корень уравнения $2\gamma J'_{n+\frac12}(\gamma)+J_{n+\frac12}(\gamma)=0$, $n\in\mathbf{N}_0$, $s\in\mathbf{N}$, частоты колебаний $\omega_{ns}=c\gamma_{ns}$. Поле магнитного типа: $\mathbf{E}=e^{i\omega t}(0,\,\mathcal{E}_\theta,\,\mathcal{E}_\varphi)$, $\mathbf{H}=e^{i\omega t}(\mathcal{H}_r,\,\mathcal{H}_\theta,\,\mathcal{H}_\varphi)$, компоненты векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ выражаются через функцию u по формулам (1.184), где

$$v(r,\theta,\varphi)=B\sqrt{r}J_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_{n+\frac12,s}\,r}{r_0}\right)Y_n^m(\theta,\varphi),$$

$n\in\mathbf{N}_0$, $s\in\mathbf{N}$, частоты колебаний $\omega_{ns}=c\mu_{n+\frac12,s}$.

2.539. $u(r,\theta,\varphi,t)=u_1\left(1+\frac{2r_0}{\pi r}\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi r}{r_0}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2t}\right)-$

$-\,2u_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{\mu_nJ_{\frac12}(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_na}{r_0}\right)^2t}\sin\theta\sin\varphi$, $\mu_n{>}0$ — нуль функции $J_{\frac32}(\mu)$.

2.540. $u(r,\theta,\varphi,t){=}4u_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_na}{r_0}\right)^2t}}{\mu_n(\mu_n^2-2)J_{\frac12}(\mu_n)}\sin\theta\cos\varphi$, $\mu_n{>}0$ — корень уравнения

$$2\mu J_{\frac12}(\mu)=J_{\frac32}(\mu). \tag{2.118}$$

2.541. $u(r,\theta,t)=w_0\left[rt-\frac{4r_0^2}{a}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)\sin\frac{a\mu_n}{r_0}t}{\mu_n(\mu_n^2-2)J_{\frac12}(\mu_n)}\right]\cos\theta,$

где $\mu_n>0$ — корень уравнения (2.118).

2.542. $u(r,\theta,t)=4v_0r_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^\infty\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{\mu_n(\mu_n^2-2)J_{\frac12}(\mu_n)}\times$

$$\times\left\{1-\cos\tfrac{a\mu_n}{r_0}t-\eta(t-t_0)\left[1-\cos\tfrac{a\mu_n}{r_0}(t-t_0)\right]\right\}\cos\theta,$$

$\mu_n>0$ — корень уравнения (2.118).

2.543. 1) $u(r,\theta,\varphi,t)=2a\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{k=1}^\infty\frac{\gamma_{nk}J_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{nk}}{r_0}r\right)}{\left[\gamma_{nk}^2-n(n+1)\right]J_{n+\frac12}(\gamma_{nk})}\times$

$$\times\int_0^t f(\tau)\sin\tfrac{a\gamma_{nk}}{r_0}(t-\tau)d\tau\,Y_n^m(\theta\varphi);$$

2) $u(r,\theta,t)=\frac{3a^2A_0}{r_0}\cdot\frac{\omega t-\sin\omega t}{\omega^2}+$

$$+2a\sqrt{\tfrac{r_0}{r}}\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{A_n\gamma_{nk}J_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{nk}}{r_0}r\right)P_n(\cos\theta)}{\left[\gamma_{nk}^2-n(n+1)\right]J_{n+\frac12}(\gamma_{nk})}\cdot\frac{\omega\sin\omega_{nk}t-\omega_{nk}\sin\omega t}{\omega^2-\omega_{nk}^2},$$

$\omega_{nk}=\frac{a\gamma_{nk}}{r_0}$, $A_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$.

Если частота ω совпадает с одной из собственных частот, т.е., $\omega=\omega_{n_0k_0}$,

то в слагаемом с номерами n_0, k_0 временной множитель имеет вид $\frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega}$. В п.1, п.2 величина $\gamma_{nk}>0$ — корень уравнения

$$(n+1)J_{n+\frac12}(\gamma)=\gamma\,J_{n-\frac12}(\gamma). \tag{2.119}$$

2.544. $u(r,\theta,t)=2u_0(p+1)\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2t}}{\left[\mu_n^2+(p+1)(p-2)\right]J_{\frac32}(\mu_n)}\cos\theta$,
$p=hr_0$, $\mu_n>0$ — корень уравнения

$$\mu\,J_{\frac12}(\mu)+(p-2)J_{\frac32}(\mu)=0. \tag{2.120}$$

2.545. $u(r,\theta,t)=\frac{4u_0}{3}\left[\frac{r^2}{r_0^2}-\frac14+\frac{r_0}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{n\pi r}{r_0}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2t}+\right.$
$\left.+2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\frac52}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2t}}{\mu_nJ_{\frac32}(\mu_n)}P_2(\cos\theta)\right]$, $\mu_n>0$ — нуль функции $J_{\frac52}(\mu)$.

2.546. $u(r,\theta.t)=\frac{2a^2}{r_0\sqrt{r_0r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_nJ_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{J_{\frac12}}\int_0^t\mu(\tau)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2(t-\tau)}d\tau\cos\theta$,
$\mu_n>0$ — нуль функции $J_{\frac32}(\mu)$.

2.547. $u(r,\theta,\varphi,t)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cdot\left(\frac{r}{r_0}\right)^nP_n^1(\cos\theta)+\right.$
$\left.+2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{f_n\cdot J_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)P_n^1(\cos\theta)}{\mu_{nk}J_{n-\frac12}(\mu_{nk})}e^{-\left(\frac{a\mu_{nk}}{r_0}\right)^2t}\right]\sin\varphi$,
$f_n=\frac{1}{\|P_n^1\|^2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n^1(\cos\theta)\sin\theta d\theta$, $\mu_{nk}>0$ — нуль функции $J_{n+\frac12}(\mu)$.

2.548. $u(r,\theta,\varphi,t)=\frac{q_0r_0}{kn}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n-2n\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{a\mu_k}{r_0}\right)^2t}}{\left[\mu_k^2-n(n+1)\right]J_{n+\frac12}(\mu_k)}\right]Y_n^m(\theta\varphi)$,
$\mu_k>0$ — корень уравнения (2.119).

2.549. $u(r,\theta,\varphi)=\frac{4q_0r_0\cos\theta}{k}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{\mu_n(\mu_n^2-2)J_{\frac12}(\mu_n)}\times$
$\times\left[1-e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2t}-\left(1-e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2(t-t_0)}\right)\eta(t-t_0)\right]$,
$\mu_n>0$ — корень уравнения (2.117).

2.550. $u(r,\theta,\varphi,t)=\frac{r_0}{k}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n}\cdot\left(\frac{r}{r_0}\right)^nP_n^1(\cos\theta)-\right.$
$\left.-2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{f_n\cdot J_{n+\frac12}\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)P_n^1(\cos\theta)}{\left[\mu_{nm}^2-n(n+1)\right]J_{n+\frac12}(\mu_{nm})}e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{r_0}\right)^2t}\right]\cos\varphi$,
$f_n=\frac{1}{\|P_n^1\|^2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n^1(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$, $\mu_{nm}>0$ — корень уравнения (2.119).

2.551. $u(r,\theta,t)=\frac{2a^2hu_0}{\sqrt{r_0r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2J_{\frac32}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)}{\left[\mu_n^2+(p+1)(p-2)\right]J_{\frac32}(\mu_n)}\cdot\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2t}}{\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2-\alpha}\cos\theta$,

$\mu_n > 0$ — корень уравнения (2.120).

2.552. $u(r,\theta,\varphi,t) = \frac{2a^2h}{\sqrt{r_0 r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{nk}^2 J_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{nk}}{r_0}r\right)}{\left([\gamma_{nk}^2+(p+n)(p-n-1)\right]J_{n+\frac12}(\gamma_{nk})} \times$

$$\times \int_0^t \mu(\tau) e^{-\left(\frac{a\gamma_{nk}}{r_0}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\, Y_n^m(\theta\varphi),$$

$\gamma_{nk} > 0$ — корень уравнения $\mu J_{n-\frac12} + (p-n-1)J_{n+\frac12}(\mu) = 0$.

2.553. $u(r,\theta,\varphi,t) = \pi u_0 \sqrt{r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac12}(\alpha\gamma_{nk})\left[J_{n+\frac12}(\alpha\gamma_{nk}) - \alpha^{n+\frac12} J_{n+\frac12}(\gamma_{nk})\right]}{J_{n+\frac12}^2(\alpha\gamma_{nk}) - J_{n+\frac12}^2(\gamma_{nk})} \times$

$$\times R_k(r)\, e^{-\left(\frac{a\gamma_{nk}}{r_0}\right)^2 t} Y_n(\theta\varphi),$$

$R_k(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[Y_{n+\frac12}(\gamma_{nk}) J_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{nk}}{r_0}r\right) - J_{n+\frac12}(\gamma_{nk}) Y_{n+\frac12}\left(\frac{\gamma_{nk}}{r_0}r\right)\right]$, $\gamma_{nk} > 0$ — корень уравнения

$$Y_{n+\frac12}(\mu) J_{n+\frac12}(\alpha\mu) - J_{n+\frac12}(\mu) Y_{n+\frac12}(\alpha\mu) = 0, \quad \alpha = \tfrac{r_1}{r_2}.$$

2.554. $\mathbf{H}(r,\theta,t) = \mathcal{H}(r,\theta)\, e^{i\omega t}$, $\mathcal{H}_r(r,\theta) = \frac{3H_0}{J_{\frac12}(kr_0)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{J_{\frac32}(kr)}{kr} \cos\theta$,

$\mathcal{H}_\theta(r,\theta) = \frac{3H_0}{2J_{\frac12}(kr_0)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(\frac{J_{\frac32}(kr)}{kr} - J_{\frac12}(kr)\right) \sin\theta$, $\mathcal{H}_\varphi(r,\theta) = 0$.

Указание. Решения уравнений для $A(r,\theta)$ и $u(r,\theta)$ (см. ответ к задаче 1.392.) имеют форму рядов:

$$A(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_{n+\frac12}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n^1(\cos\theta), \quad r < r_0,$$
$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta), \quad r_0 < r.$$

Из условия на бесконечности вытекает, что $B_n = C_n = 0$ при $n \geq 2$. Коэффициенты B_1 и C_1 следует выбрать так, чтобы магнитное поле было непрерывным на поверхности шара.

2.555. $I = \frac12 \pi a \rho_0 r_0 A^2 \omega^2$. **2.556.** $I = \frac12 \pi^2 \rho_0 r_0^2 A^2 \omega^3$. **2.557.** $I = \pi a \rho_0 r_0 A^2 \omega^2$.

2.558. $I = \frac{2\pi}{3} \frac{a\rho_0 r_0^6 A^2 \omega^6}{4a^4 + r_0^4 \omega^4}$. **2.559.** $I = 2\pi \frac{a\rho_0 r_0^4 A^2 \omega^4}{a^2 + r_0^2 \omega^2}$.

2.560. $p(r,\varphi) = -P_0\left[\frac{J_1(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_0^{(2)}(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n J_n'(kr_0)}{\left(H_n^{(2)}(kr_0)\right)'} H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi\right]$.

Решение. Давление в газе $P_0\, e^{i(\omega t - kr\cos\varphi)} + p\, e^{i\omega t}$, где p — давление в рассеянной волне. Функция $p(r,\varphi)$ — решение задачи (см.задачу 1.221.):

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad r_0 < r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \tag{2.121}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\left.P_0 \frac{\partial}{\partial r} e^{-ikr\cos\varphi}\right|_{r=r_0}. \tag{2.122}$$

Подстановка $p = R(r)\Phi(\varphi)$ в уравнение (2.121) приводит к задаче на собственные значения

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

решение которой (см. пример 2.8.) $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$, и к урав-

нению Бесселя $R''+\frac{1}{r}R'+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0$. В качестве фундаментальной системы решений последнего уравнения целесообразно взять функции Ганкеля $H_n^{(1)}(kr)$ и $H_n^{(2)}(kr)$, асимптотические представления которых при $r\to\infty$ описывают цилиндрические волны. Условию излучения удовлетворяет функция $H_n^{(2)}(kr)$, поэтому

$$p(r,\varphi)=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\,H_n^{(2)}(kr).$$

Граничное условие (2.122), правая часть которого преобразуется посредством разложения плоской волны, представляет собой равенство двух разложений по собственным функциям $\Phi_n(\varphi)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\,\left(H_n^{(2)}(kr_0)\right)'k=$$
$$-P_0J_0'(kr_0)\,k-2P_0k\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^nJ_n'(kr_0)\cos n\varphi,$$

откуда

$$B_n=0,\quad A_0=-P_0\tfrac{J_1(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)},\quad A_n=-2P_0\tfrac{(-i)^nJ_n'(kr_0)}{\left(H_n^{(2)}(kr_0)\right)'}.$$

На единицу длины цилиндра действует сила

$$\mathbf{F}=\mathbf{k}\textstyle\int_0^{2\pi}\mathbf{Re}\left(P_0e^{i(\omega t-kr\cos\varphi)}+p(r,\varphi)e^{i\omega t}\right)\cos\varphi\,r_0\,d\varphi.$$

2.561. $I(r,\varphi)=\frac{\pi k^3r_0^4P_0^2}{16a\rho_0r}(1-2\cos\varphi)^2$, $\quad I=\frac{3\pi^2k^3r_0^4P_0^2}{8a\rho_0}$.

2.562. 1) $\mathbf{F}(t)=2\pi kr_0^2P_0\sin\omega t\,\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{F}(t)=-2P_0\sqrt{\frac{2\pi r_0}{k}}\sin(\omega t+kr_0-\pi/4)\,\mathbf{k}$.

2.563. $\mathcal{E}_z=-\mathcal{E}_0\left[\frac{J_0(kr_0)}{H_0^{(2)}(kr_0)}H_0^{(2)}(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{J_n(kr_0)}{H_n^{(2)}(kr_0)}H_n^{(2)}(kr)\cos n\varphi\right]$;
$I=\frac{\pi c\mathcal{E}_0^2}{8k\ln^2kr_0}$. **2.564.** Давление в рассеянной волне
$p(r,t)=-P_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n(2n+1)j_n'(kr_0)}{h_n'(kr_0)}h_n(kr)P_n(\cos\theta)$, где
$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}x}J_{n+\frac12}(x)$, $\quad h_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}H^{(2)}_{n+\frac12}(x)$.

2.565. $I(r,\theta)=\frac{k^2r_0^6P_0^2}{18a\rho_0r^2}\left(1-\frac32\cos\theta\right)^2$, $\quad I=\frac{7\pi k^4r_0^6P_0^2}{18a\rho_0}$.

2.566. 1. $\mathbf{F}(t)=\mathbf{k}\,2\pi r_0^3\sin\omega t$; 2. $\mathbf{F}=\mathbf{k}\frac{4\pi P_0r_0}{k^2}\sin\left(\omega t+kr_0-\frac{3\pi}{4}\right)$. Указание. Представить плоскую волну в виде ряда. **2.567.** Диполь с моментом $\mathbf{p}=p\mathbf{e}_z$ расположен в начале сферической системы координат;
$\mathbf{E}(r,\theta,t)=\mathcal{E}(r,\theta)e^{i\omega t}$, $\quad\mathbf{H}(r,\theta,t)=\mathcal{H}(r,\theta)e^{i\omega t}$,
$\mathcal{E}_r=\frac{2p_0}{r_2^2}e^{-ikr}\left(ik+\frac1r\right)\cos\theta$, $\quad\mathcal{E}_\theta=\frac{p_0}{r}\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}-k^2\right)e^{-ikr}\sin\theta$, $\quad\mathcal{E}_\varphi=0$,
$\mathcal{H}_r=\mathcal{H}_\theta=0$, $\quad\mathcal{H}_\varphi=\frac{ikp_0}{r}e^{-ikr}\left(\frac1r+ik\right)\sin\theta$; $\qquad w=\frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3}$.
Указание. Потенциал магнитного поля $Ae^{i\omega t}\mathbf{e}_z$ и скалярный потенциал $ue^{i\omega t}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta A + k^2 A = -\tfrac{4\pi p_0}{c} i\omega\, \delta(\mathbf{r}),$$
$$\Delta u + k^2 u = 4\pi p_0 \delta'_z(\mathbf{r}),$$

и условиям излучения (задача 1.386.) Решения уравнений имеют вид

$$A(\mathbf{r}) = ikp_0 \tfrac{e^{-ikr}}{r}, \qquad u(\mathbf{r}) = \tfrac{p_0}{r}\left(ik + \tfrac{1}{r}\right) e^{-ikr}\cos\theta.$$

Поля определяются формулами $\mathcal{H} = rot\,\mathbf{A}$, $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}_t - \nabla u$ (пример 1.26.), в которых $A_r = A\cos\theta$, $A_\theta = -A\sin\theta$, $A_\varphi = 0$. В волновой зоне

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_\varphi = 0, \qquad \mathcal{E}_\theta = \mathcal{H}_\varphi = -p_0 \tfrac{k^2}{r} e^{-ikr}\sin\theta.$$

Поток энергии

$$S = \tfrac{c}{4\pi}\left|\left[\mathbf{Re}\left(\mathcal{E}e^{i\omega t}\right)\cdot \mathbf{Re}\left(\mathcal{H}e^{i\omega t}\right)\right]\right| = \tfrac{c}{4\pi} p_0^2 \tfrac{k^4}{r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr).$$

Мощность излучения есть результат усреднения потока энергии S по времени и интегрирования по сфере, радиуса которой r.

2.568. Координаты диполя: $x = 0$, $y = 0$, $z = l$;

$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathcal{E}(x,y,z)\, e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathcal{H}(x,y,z)\, e^{i\omega t}$,

$\mathcal{E} = -\frac{i}{k} rot\, rot\mathcal{A}$, $\mathcal{H} = rot\mathcal{A}$ $k = \frac{\omega}{c}$.

1) $\mathcal{A}(x,y,z) = ikp_0\left(\frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} + \frac{e^{-ikr_{MQ}}}{r_{MQ}}\right)\mathbf{e}_z$;

2) $\mathcal{A}(x,y,z) = ikp_0\left(\frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} - \frac{e^{-ikr_{MQ}}}{r_{MQ}}\right)\mathbf{e}_x$;

$\begin{cases} r_{MP} = \sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}, \\ r_{MQ} = \sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}. \end{cases}$

2.569. Диполь с моментом $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ расположен в начале сферической системы координат; $\mathbf{E}(r,\theta,t) = \mathcal{E}(r,\theta)\, e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}(r,\theta,t) = \mathcal{H}(r,\theta)\, e^{i\omega t}$,

$$\mathcal{E} = -\tfrac{i}{k} rot\, rot\mathcal{A},\ \mathcal{H} = rot\mathcal{A},\ \mathcal{A} = \mathbf{e}_\varphi \tfrac{3M_0\sin\theta}{8\pi}\tfrac{d}{dr}\tfrac{e^{-ikr}}{r},\ k = \tfrac{\omega}{c}.$$

2.570. Координаты диполя: $x = 0$, $y = 0$, $z = l$;

$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathcal{E}(x,y,z)\, e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathcal{H}(x,y,z)\, e^{i\omega t}$,

$\mathcal{E} = -\frac{i}{k} rot\, rot\mathcal{A}$, $\mathcal{H} = rot\mathcal{A}$,

1. $\mathcal{A}(x,y,z) = \frac{3M_0}{8\pi}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\Big|_{r=r_{MP}} - \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\Big|_{r=r_{MQ}}\right](-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$;

2. $\mathcal{A}(x,y,z) = \frac{3M_0}{8\pi}\Big[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\Big|_{r=r_{MP}} (y\mathbf{e}_z - (z-l)\mathbf{e}_y) -$
$- \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\Big|_{r=r_{MQ}} (y\mathbf{e}_z - (z+l)\mathbf{e}_y)\Big]$;

$r_{MP} = \sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}$, $r_{MQ} = \sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$.

2.571. $\zeta(r,\varphi,t) = A_{nm} r^m P_n^{(m,0)}(1 - 2\frac{r^2}{r_0^2})\cos(m\varphi + \delta_m)\cos(\omega_{nm} t + \delta_{nm})$,

$\omega_{nm} = \frac{\sqrt{g\,h_0}}{r_0}\sqrt{4n(n+m+1)+2m}$, $4n(n+m+1)+2m \ll 4\pi^2\frac{r_0^2}{h_0^2}$,

$n + m > 0$, $n, m \in \mathbf{N}_0$, Указание. Функция $\zeta(r,\varphi,t)$ удовлетворяет уравнению (1.87) и условию $|\zeta| < \infty$. После подстановки $\zeta = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$ и замены $2r^2 = r_0^2(1-\xi)$ для R(r) получается уравнение типа (2.64).

2.572. $E_n = -\frac{E_0}{2n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, $E_0 = \frac{Ze^2}{r_0}$, $r_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2}$, кратность вырождения n^2, $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}R_{nl}(r)\frac{Y_l^m(\theta\,\varphi)}{\|Y_l^m\|}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm l$, $l \in \mathbf{N}_0$,

функция $R_{nl}(r) = \frac{1}{n\sqrt{r_0}}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)^{l+1} e^{-\frac{r}{nr_0}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)$. Указание. Волновая функция $\psi(r) = \frac{1}{r}R(r)\frac{Y_l^m(\theta\varphi)}{\|Y_l^m\|}$, $R(r)$ — решение задачи, которая в безразмерных переменных $r = r_0\xi$, $E = -E_0\epsilon$ имеет вид

$$R'' + \left(-2\epsilon + \frac{2}{\xi} - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right)R = 0, \quad 0 < \xi,$$
$$R(0) = 0, \quad \int_0^\infty R^2(\xi)d\xi < \infty.$$

2.573. $E_n = \hbar\omega(n+1)$, $\psi_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\frac{e^{ik\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$,

$R_{nk}(r) = r_0\sqrt{\frac{2s!}{(s+|k|)!}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|} e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} L_s^{|k|}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, кратность вырождения уровня $n+1$; $2s+|k| = n$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Указание. Функция $R(r)$ является решением задачи, которая в безразмерных переменных $r=r_0\xi$, $E=E_0\epsilon$, где $E_0 = \hbar\omega$, имеет вид

$$R'' + \frac{1}{\xi}R' + \left(2\epsilon - \frac{k^2}{\xi^2} - \xi^2\right)R = 0, \quad 0 < \xi,$$
$$|R| < \infty, \quad \int_0^\infty R^2\xi d\xi < \infty.$$

Посредством замены $\xi^2 = \eta$ получается уравнение типа (2.64).

2.574. $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$, $\psi_{nlk}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}R_{nl}(r)\frac{Y_l^k(\theta\varphi)}{\|Y_l^k\|}$,

$R_{nl}(r) = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{2s!}{r_0\Gamma(s+l+\frac{3}{2})}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^l e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} L_s^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$,
$2s + l = n$, $n, l \in \mathbf{N}_0$, кратность вырождения уровня $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Указание. Волновая функция $\psi = \frac{1}{r}(r)\frac{Y_l^k(\theta\varphi)}{\|Y_l^k\|}$, $R(r)$ — решение задачи, которая в безразмерных переменных $r=r_0\xi$, $E=-E_0\epsilon$, $E_0=\hbar\omega$, имеет вид

$$R'' + \left(2\epsilon - \xi^2 - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right)R = 0, \quad 0 < \xi,$$
$$R(0) = 0, \quad \int_0^\infty R^2(\xi)d\xi < \infty.$$

Уравнение для R(r) сводится к уравнению вида (2.64) заменой $\xi^2 = \eta$.

2.575. $E_{nl} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta)$, $\omega = \frac{4}{r_0}\sqrt{\frac{U_0}{2m}}$, $\beta = \left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\alpha U_0 r_0^2}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$,

$\psi_{nlk}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}R_{nl}(r)\frac{Y_l^k(\theta\varphi)}{\|Y_l^k\|}$, $R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2n!}{a\Gamma(n+\beta+l)}}\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} L_n^\beta\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$,
$n, l \in \mathbf{N}$. Указание. Компонента R(r) функции $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}R(r)\frac{Y_l^k(\theta\varphi)}{\|Y_l^k\|}$ является решением задачи на собственные значения

$$R'' + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)\hbar^2 + 2m\alpha r_0^2 U_0}{\hbar^2 r^2} - \frac{2mU_0}{\hbar^2 r_0^2}r^2\right)R = 0, \quad 0 < r,$$
$$R(0) = 0, \quad \int_0^\infty R^2 dr = 1.$$

Замена $r=a\sqrt{\xi}$, $E=E_0\epsilon$, где $E_0=\frac{\hbar}{r_0}\sqrt{\frac{U_0}{2m}}$, приводит к уравнению (2.64).

2.576. $E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $\psi_{sk}(r,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\hbar}}e^{i\left(\frac{p_z}{\hbar}z + k\varphi\right)}R_{sk}(r)$,

$R_{sk}(r) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{s!}{(s+|k|)!}}\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^{\frac{|k|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} L_s^{|k|}\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)$, p_z — любое действительное число, $2s+k+|k|=2n$, $n,k\in\mathbf{N}_0$, $\omega=\frac{eB}{mc}$, $a=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$.

Указание. В цилиндрической системе координат с осью 0z, параллельной вектору $\mathbf{B}$, волновая функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi+\tfrac{2m}{\hbar^2}\left(E\psi+\tfrac{eB}{2mc}\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}-\tfrac{e^2B^2r^2}{8mc}\psi\right)=0,\quad e>0.$$

Функция ψ представляет собой произведение

$$\psi(r,\varphi,z)=\tfrac{1}{2\pi\sqrt{\hbar}}e^{i(\frac{p_z}{\hbar}z+k\varphi)}R(r),$$

в котором множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}exp(\frac{i}{\hbar}p_z z)$ нормирован на δ-функцию (см. задачу **??**.), R(r) — решение задачи на собственные значения

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{dR}{dr}+\left(\tfrac{2mE}{\hbar^2}-\tfrac{p_z^2}{\hbar^2}+\tfrac{eB}{\hbar c}k-\tfrac{e^2B^2r^2}{4\hbar^2c^2}-\tfrac{k^2}{r^2}\right)R=0,\quad 0<r,$$
$$|R|<\infty,\quad \int_0^\infty R^2 r dr=1.$$

В результате замены $r^2=2a^2\xi$ получается уравнение вида (2.64).

2.577. $E_n=-\frac{\hbar^2\alpha_n^2}{2ma^2}$, $\alpha_n=-n-\frac{1}{2}+\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}>0$, $\beta^2=\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}$, $n\in\mathbf{N}$, $\psi_n(x)=\frac{C_n}{ch^\alpha\frac{x}{a}}P_n^{(\alpha,\alpha)}(th\tfrac{x}{a})$, $\alpha=\alpha_n$, $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ — полином Якоби. Потенциальная яма имеет конечное число уровней, а при $a^2U_0\le\frac{\hbar^2}{m}$ — только один уровень. Указание. Волновая функция стационарного состояния удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\psi''+\left(-\tfrac{2m}{\hbar^2}|E|+\tfrac{2mU_0}{\hbar^2}\tfrac{1}{ch^2\frac{x}{a}}\right)\psi=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad E<0$$

и условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx$. Замена $\xi=th\frac{x}{a}$ преобразует уравнение к виду (2.64). **2.578.** $E_n=-\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}s_n^2$, $s_n=\frac{b^2-(n+1)^2}{2(n+1)}>0$, $b=\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}r_0$, $n=0,1,2,\ldots,-\left[\frac{1-b}{2}\right]$, при $2mr_0^2U_0<\hbar^2$ нет ни одного уровня; $\psi_n(r)=\frac{1}{r}R_n(r)$, $R_n=C_n(1+\xi)(1-\xi)^{s_n}P_n^{(2s_n,1)}(\xi)$, $\xi=1-2e^{-\frac{r}{r_0}}$. Указание. Волновая функция $\psi(r)=\frac{1}{r}R(r)$, где R(r) — решение задачи на собственные значения

$$R''+\left(-\tfrac{s^2}{r_0^2}+\tfrac{b^2}{r_0^2(e^{\frac{r}{r_0}}-1)}\right)R=0,\quad 0<\xi<\infty,\quad s=\tfrac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}r_0,$$
$$R(0)=0,\quad \int_0^\infty R^2dr=1.$$

Посредством замены $1-2\,exp(-\frac{r}{r_0})=\xi$ получается уравнение типа (2.64).

2.579. $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\psi_n(x)=\left(\frac{1}{\pi 2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2\hbar}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$, $n\in\mathbf{N}$. Указание. Волновые функции — собственные функции задачи

$$\psi''+\left(\tfrac{2mE}{\hbar^2}-\tfrac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)\psi=0,\quad -\infty<x<\infty,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=1,\qquad(2.123)$$

которая в безразмерных переменных $x=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\xi$, $E=\hbar\omega\epsilon$ принимает вид

$$\psi''+(2\epsilon-\xi^2)\psi=0,\ \ -\infty<\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 d\xi.$$

Полученное уравнение принадлежит типу (2.64); ему соответствуют

$\pi(\xi)=-\xi,\ \ \tau(\xi)=-2\xi,\ \ \varphi(\xi)=exp(-\frac{\xi^2}{2}),\ \ \rho(\xi)=exp(-\xi^2),\ \ \lambda=2\epsilon-1.$

2.580. $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2},\ \psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!2^n\pi\alpha}}e^{-\alpha^2(x-x_0)^2}H_n(\alpha(x-x_0))$, $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},\ \ x_0=\frac{e\mathcal{E}}{m\omega^2},\ \ n\in\mathbf{N}_0.$

Указание. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''+\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2-e\mathcal{E}x\right)\psi=E\psi,\ \ -\infty<x<\infty$$

и условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=1$. **2.581.** $|\Psi(x,t)|^2=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2(x-x_0\cos\omega t)^2}$, т.е. волновой пакет колеблется без изменения формы около точки $x=0$ с амплитудой $|x_0|$ и классической частотой ω. Если $|x_0|\ll\frac{1}{\alpha}$, то $\Psi(x,t)\approx\psi_0(x)exp(-\frac{i\omega t}{2})$, т.е. осциллятор находится в основном состоянии. Если $|x_0|\gg\frac{1}{\alpha}$, то энергия осциллятора в наиболее вероятном состоянии равна энергии классического осциллятора $\frac{m\omega x_0^2}{2}$, который колеблется с амплитудой $|x_0|$. Решение. Задача для определения волновой функции

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\Psi,\quad -\infty<x<\infty,\ \ 0<t,$$
$$\Psi(x,0)^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x-x_0)^2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}|\ \Psi\ |^2\,dx=1,\quad A=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}},$$

сводится посредством разделения переменных $\Psi(x,t)=\psi(x,t)T(t)$ к уравнению $T'+\frac{iE}{\hbar}T=0$ и к задаче на собственные значения (2.123). Таким образом, решение приобретает форму ряда по собственным функциям:

$$\Psi(x,t)=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n\psi_n(x)e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}.$$

При t=0

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n\psi_n(x)=\Psi(x,0).$$

Вычисление коэффициентов C_n основано на разложении производящей функции в ряд и ортогональности собственных функций $\psi_n(x)$:

$$C_n=\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,0)\psi_n(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi n!\,2^n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2+\xi\xi_0-\xi_0^2/2}H_n(\xi)\,d\xi=$$
$$=\frac{e^{-\xi_0^2/4}}{\sqrt{\pi n!\,2^n}}\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\xi_0}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)\,d\xi=\frac{\xi_0^n}{\sqrt{n!2^n}}e^{-\xi_0^2/4},\ \ \xi=\alpha x.$$

Следовательно,

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\,exp\left(-\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{i\omega t}{2}\right)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\xi)}{n!}\left(\frac{\xi_0}{2}e^{-i\omega t}\right)^n.$$

Ряд можно просуммировать с помощью разложения для производящей функции, что дает

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\,exp\left(-\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{i\omega t}{2}-\frac{\xi_0^2}{4}e^{-2i\omega t}+\xi\xi_0e^{-i\omega t}\right)\qquad(2.124)$$

Для $|\Psi(x,t)|^2$ получается выражение, данное в ответе. Если $|x_0| \ll \frac{1}{\alpha}$, то $|\xi| \ll 1$ и функция (2.124) становится равной $\psi_0(x)exp(-\frac{i\omega t}{2})$; осциллятор находится в n-м состоянии с вероятностью

$$C_n^2 = \left(\frac{\xi_0^2}{2}\right)^n \frac{e^{-\xi_0^2/2}}{n!}.$$

Если $|x_0| = \frac{1}{\alpha}\xi_0 \gg \frac{1}{\alpha}$, то $n \gg 1$ и наиболее вероятное состояние определяется условием

$$\frac{dC_n^2}{dn} = 0, \quad \text{или} \quad \ln \frac{\xi_0^2}{2}\psi(n+1),$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная $\Gamma-$функции. Поскольку $n \gg 1$, то $\psi(n+1) = \psi(n) + \frac{1}{n} = \ln n + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$, откуда $n_0 = \xi_0^2/2$. Энергия осциллятора в наиболее вероятном состоянии

$$E_{n_0} = \hbar\omega\left(n_0 + \tfrac{1}{2}\right) = \hbar\omega\frac{\xi_0^2}{2} = \tfrac{1}{2}m\omega x_0^2.$$

2.582. $E_n = -U_0 + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{b}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots, -\left[\frac{1-b}{2}\right]$, $\omega = \frac{\kappa}{r_0}\sqrt{\frac{2u_0}{m}}$. Второе слагаемое в выражении для E_n характеризует энергию гармонических колебаний (задача 2.580.), третье учитывает ангармоничность, при этом для всех допустимых n

$$\frac{\hbar\omega}{b}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 < \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

Для низких уровней $(n \ll b)$

$$E_n \approx -U_0 + \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

Этот результат естествен, так как при малых значениях $|r - r_0|$ функция U(r) представляет собой осцилляторный потенциал

$$U(r) \approx -U_0 - \tfrac{m\omega^2}{2}(r-r_0)^2.$$

Решение. Задача на собственные значения для оператора энергии

$$-\tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(r)\psi = E\psi, \quad 0 < r < \infty, \quad E < 0,$$
$$4\pi\textstyle\int_0^\infty \psi^2(r)r^2dr = 1$$

заменой переменных $\psi = \frac{1}{r}R(r)$, $\xi = b\,e^{-\kappa\frac{r-r_0}{r_0}}$, $s = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar\kappa}r_0$, преобразуется к виду

$$\xi^2R'' + \xi R' + \left(-\tfrac{\xi^2}{4} + \tfrac{b\xi}{2} - s^2\right)R = 0, \quad 0 < \xi < \xi_0 \overset{\smile}{,}\kappa, \qquad (2.125)$$
$$u(\xi_0) = 0, \quad \textstyle\int_0^{\xi_0} u^2(\xi)\frac{d\xi}{\xi} < \infty.$$

В данном случае (см. пример 2.22.)

$$\pi = \pm\left(\tfrac{\xi}{2} \pm s\right), \quad \varphi = \xi^{\pm s}e^{\pm\frac{\xi}{2}}, \quad \rho = \xi^{\pm 2s}e^{\pm\xi}, \quad R = \xi^{\pm s}e^{\pm\frac{\xi}{2}}u(\xi) \quad k = \tfrac{b}{2} \mp s.$$

Условия (2.75) для $\rho(\xi)$, $\xi \in [\,0\,;\,\xi_0\,]$ не выполняются при $\xi = \xi_0$, поэтому формулы (2.76) и (2.77), а также правила (2.78) неприменимы. Выбор знаков основан на исследовании поведения решений уравнения (2.125) при малых и больших значениях ξ. Если $\xi \to 0$, то уравнение принимает вид

$\xi^2 R'' + \xi R' - s^2 R = 0$ и имеет линейно независимые решения ξ^s, ξ^{-s}, из которых условию нормировки удовлетворяет ξ^s. При $\xi \to \infty$ следует взять решение, которое ведет себя как $e^{-\xi/2}$. Таким образом,

$$k = \tfrac{b}{2} - \xi, \quad \pi(\xi) - \tfrac{\xi}{2} + 2s, \quad \lambda = \tfrac{b}{2} - s - \tfrac{1}{2}, \quad \rho(\xi) = \xi^{2s} e^{-\xi}, \quad R(\xi) = \xi^s e^{-\xi/2}.$$

Функция $u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2.71), которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$\xi u'' + (\gamma - \xi) u' - \alpha u = 0$$

с параметрами $\alpha = s + \frac{1}{2} - b$, $\gamma = 2s + 1$, и условиям

$$u(\xi_0) = 0, \quad \int_0^{\xi_0} \xi^{2s+1} e^{-\xi} u^2(\xi) d\xi < \infty.$$

Фундаментальной системой решений служат

$$u_1(\xi) = \Phi(\alpha, \gamma, \xi), \quad u_2(\xi) = \xi^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi).$$

Функция $u_2(\xi)$ не удовлетворяет условию нормировки, так как интеграл от функции $\xi^{2s-1} e^{-s} u_2^2(\xi) = \xi^{-1-2s} e^{-\xi} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi)$ расходится в нуле. Решением является $u_1(\xi) = A\Phi(\alpha, \gamma, \xi)$, а уравнение $\Phi(\alpha, \gamma, \xi_0) = 0$ определяет собственные значения. Для построения приближенного решения следует учесть, что $-E > -U_0$ (связанные состояния), поэтому

$$0 < s = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2 \kappa} r_0 < \frac{\sqrt{2mu_0}}{\hbar^2 \kappa} r_0 = \frac{b}{2}, \tag{2.126}$$

откуда $1 < \gamma < b + 1 < b \ln b \ll b e^\kappa = \xi_0$; наряду с этим выполняются неравенства $|\alpha| \le \frac{b+1}{2} < b \ll b e^\kappa = \xi_0$. Приведенные оценки позволяют применить асимптотическую формулу

$$\Phi(\alpha, \gamma, \xi_0) = e^{-i\pi\alpha} \tfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \xi_0^{-\alpha} + \tfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\xi_0} \xi_0^{\alpha - \gamma},$$

с помощью которой уравнение для собственных значений запишется в виде

$$\Gamma\left(s + \tfrac{1}{2} - \tfrac{b}{2}\right) - e^{i\pi(s + \frac{1}{2} - \frac{b}{2})} \Gamma\left(s + \tfrac{1}{2} + \tfrac{b}{2}\right) e^{b(exp\,\kappa - \kappa - \ln b)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\Gamma\left(s + \tfrac{1}{2} - \tfrac{b}{2}\right)\right| = \Gamma\left(s + \tfrac{1}{2} + \tfrac{b}{2}\right) e^{b(exp\,\kappa - \kappa - \ln b)} > \Gamma\left(\tfrac{b+1}{2}\right) e^b \gg 1,$$

основанное на оценках $\ln b \ll e^\kappa$, $e^\kappa > 1 + \kappa$. С другой стороны, в силу (2.126), $s + \frac{1}{2} - \frac{b}{2} < \frac{1}{2}$, что означает близость величины $s + \frac{1}{2} - \frac{b}{2}$ к полюсу гамма-функции, т.е. $s + \frac{1}{2} - \frac{b}{2} = -n$, $n \in \mathbf{N}_0$. Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2m|E_n|}}{\hbar \kappa} r_0 = s_n, \quad s_n = \tfrac{b-1}{2} - n > 0,$$

а волновые функции стационарных состояний

$$\psi_n(r) = \tfrac{B_n}{r} e^{-\kappa s_n \frac{r - r_0}{r_0}} exp\left(-\tfrac{b}{2} e^{-\kappa \frac{r - r_0}{r_0}}\right) \Phi\left(s_n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{b}{2}, 2s_n + 1, e^{-\kappa \frac{r - r_0}{r_0}}\right).$$

2.583. Собственные значения $E_n < 0$ — корни уравнения

$$tg\,(k_2 r_0 - \tfrac{\pi^2}{3} k_1 k_2 a^2) = -\tfrac{k_2}{k_1}, \qquad k_1 = \tfrac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}, \qquad k_2 = \tfrac{\sqrt{2m(U_0 - |E|)}}{\hbar}.$$

Решение. Для определения собственных значений оператора энергии требуется решить задачу

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\psi}{dr}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(r))\psi=0,\quad 0<r,\quad E<0,$$
$$|\psi|<\infty,\quad 4\pi\int_0^\infty|\psi|^2r^2dr=1.$$

В переменных $R=r\psi$, $\xi=\left(1+e^{\frac{r-r_0}{a}}\right)^{-1}$ эта задача принимает форму

$$R''+\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}R'+\frac{b^2\xi-s_1^2}{\xi^2(1-\xi)^2}R=0,\quad 0<\xi<\xi_0=\left(1-e^{-\frac{r_0}{a}}\right)^{-1},\quad (2.127)$$
$$R(\xi_0)=0,\quad \int_0^{\xi_0}|R|^2\frac{d\xi}{\xi(1-\xi)}<\infty,\quad s_{1,2}=a\,k_{1,2},\quad b=\frac{\sqrt{2mU_0}\,a}{\hbar}.$$

Уравнение (2.127) имеет структуру (2.64) и нужно взять то решение (см. задачу 2.582.), которое ведет себя как ξ^{s_1} при $\xi\to 0$ и как $(1-\xi)^{is_2}$ при $\xi\to 1$. Тогда $k=-(s_1+i\,s_2)^2$, $\pi(\xi)=s_1-(s_1+i\,s_2)\xi$, $\lambda=-(s_1+i\,s_2)(s_1+i\,s_2+1)$, $\varphi(\xi)=\xi^{s_1}(1-xi)^{i\,s_2}$, $R(\xi)=\xi^{s_1}(1-\xi)^{i\,s_2}u(\xi)$. Функция $u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2.71), которое представляет собой уравнение Гаусса

$$\xi(1-\xi)\,u''+[\,\gamma-(\alpha+\beta+1)\,\xi\,]\,u'-\alpha\beta\,u=0,\quad 0<\xi<\xi_0,$$

с параметрами $\alpha=s_1+i\,s_2$, $\beta=s_1+i\,s_2+1$, $\gamma=2s_1+1$, и условиям

$$u(\xi_0)=0,\quad \int_0^{\xi_0}|u(\xi)|^2\frac{\xi^{2s_1-1}}{1-\xi}d\xi<\infty.$$

Общее решение уравнения Гаусса выражается через гипергеометрические функции

$$u(\xi)=A\,F(s_1+i\,s_2,s_1+i\,s_2+1,2s_1+1,\xi)+$$
$$+B\,\xi^{-2s_1}F(-s_1+i\,s_2,-s_1+i\,s_2+1,-2s_2+1,\xi).$$

Оно удовлетворяет условию нормировки при $B=0$, следовательно, собственные значения являются корнями уравнения

$$F(s_1+i\,s_2,s_1+i\,s_2+1,2s_1+1,\xi_0)=0. \quad (2.128)$$

Чтобы найти значения гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)$ в окрестности точки $\xi_0=\left(1-e^{-\frac{r_0}{a}}\right)^{-1}\approx 1$, следует осуществить аналитическое продолжение этой функции на круг $|\xi-1|<1$ с помощью соотношения

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z).$$

На основе этого соотношения левая часть уравнения (2.128) может быть записана в виде суммы двух комплексно сопряженных величин, поэтому

$$\arg\left[\frac{\Gamma(2is_2)\,(1-\xi_0)^{-i\,s_2}}{(s_1+i\,s_2)\Gamma^2(s_1+i\,s_2)}F(s_1-i\,s_2,s_1-i\,s_2+1,-2is_2+1,1-\xi_0)\right]=\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right),$$

или, в приближении $\xi_0=1-e^{-\frac{r_0}{a}}\approx 1$, $F(\alpha,\beta,\gamma,\xi_0)\approx 1$,

$$\frac{r_0s_2}{a}+\arg\Gamma(2is_2)-2\arg\Gamma(s_1+i\,s_2)-\arg\frac{s_2}{s_1}=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right). \quad (2.129)$$

Из разложения $\ln\Gamma(1+z) = -Cz + \sum\limits_{m=2}^{\infty}(-1)^m\zeta(m)\frac{z^m}{m}, \quad |z|<1,$
где C — постоянная Эйлера, $\zeta(m)$ — дзета-функция Римана, следует, что

$$\arg\Gamma(z) = -\arg z + \mathbf{Im}\left(-Cz + \textstyle\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\zeta(m)\frac{z^m}{m!}\right).$$

Если сохранить величины второго порядка малости относительно a/r_0, то
$\arg\Gamma(2is_2) = -\frac{\pi}{2} - 2Cs_2 = -\frac{\pi}{2} - 2Ck_2a,$
$\arg\Gamma(s_1 + i\,s_2) = -arctg\frac{s_1}{s_2} - Cs_2 + \zeta(2)s_1s_2 = -arctg\frac{k_2}{k_1} - Ck_2a + \frac{\pi^2}{6}k_1k_2a^2,$
и (2.129) приобретает форму $k_2r_0 - \frac{\pi^2}{3}k_1k_2a^2 = \pi(n+1) - arctg\frac{k_2}{k_1}$. При a=0 получается уравнение для уровней энергии в прямоугольной потенциальной яме (задача 2.535.)

2.584. $TE-$ моды : $\mathcal{E}_y(x) = A_NH_N\left(\frac{x}{a}\right)e^{\frac{x^2}{2a^2}}$, $k^2n_1^2 = \beta^2 + \frac{2N+1}{a^2}$, $N\in\mathbf{N}_0$,
$a = \left(\frac{l}{kn_1\sqrt{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}}$.
$TM-$ моды : $\mathcal{H}_y(x)\frac{B_N}{n(x)}H_N\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$, $n(x) = n_1\left(1-\Delta\frac{x^2}{l^2}\right)$,
$a = l\,[2\Delta(k^2n_1^2l^2+5\Delta)]^{-\frac{1}{4}}$, $k^2n_1^2 = \beta^2 + \frac{2\Delta}{k^2} + \frac{2N+1}{a^2}$, $N\in\mathbf{N}_0$.
Остальные компоненты определяются формулами, приведенными в ответе к задаче 1.381. Указание. При больших частотах моды концентрируются в сердцевине волновода (задача 2.54.), поэтому задачи (1.191), (1.192) можно решать в предположении, что $n(x) = n_1\left(1-\Delta\frac{x^2}{l^2}\right)$ на $(0,\infty)$. Уравнение задачи (1.192) упрощается введением новой функции посредством соотношения $\mathcal{H}_y = (x)n(x)\,f(x)$ с последующей заменой $1/n(x)$ приближенным выражением. См.также задачу 2.579.

2.585. Амплитуды полей выражаются через функцию (см. задачу 1.386.)
$\psi_j(r) = C_jr^{|m\pm1|}e^{-\frac{s}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}L_N^{|m\pm1|}\left(\frac{sr^2}{r_0^2}\right)$, $m\in\mathbf{Z}$, $N\in\mathbf{N}_0$, $j=1,2$,
$\beta = [\,k^2n_1^2 - \frac{2k}{r_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\,(2N+1+|m\pm1|)\,]^{\frac{1}{2}}$.
Указание. Функция $\psi_j(r)$ является решением уравнения (1.128) при условии $\int_0^\infty r\psi_j^2(r)\,dr < \infty$. Замена переменной $r = \sqrt{\xi}$ преобразует уравнение (1.128) к виду (2.64).

2.586. Электромагнитная волна имеет вид (1.129), компоненты электромагнитного поля $\mathcal{E}_z\psi_1$, $\mathcal{H}_z = \psi_2$ выражаются через полиномы Чебышева-Эрмита:

$$\psi_{1,2} = C_{1,2}e^{-\frac{v}{r_0^2}(x^2+y^2)}H_M\left(\tfrac{\sqrt{v}}{r_0}x\right)H_N\left(\tfrac{\sqrt{v}}{r_0}y\right),$$

где $v = kr_0\sqrt{n_1^2-n_2^2}$, $\beta^2 = k^2n_1^2 - 2(M+N+1)$, $M,N\in\mathbf{N}_0$, а остальные

компоненты определяются соотношениями (1.130).

2.587. $\mathbf{E}=e^{i(\beta\, z-\omega t)}(0,\,\mathcal{E}_y(x),0),\ \ \mathbf{H}=e^{i(\beta\, z-\omega t)}(\mathcal{H}_{\S}(\S),\,0,\,\mathcal{H}_z(x)),$

$$\mathcal{E}_y(x)=\frac{A_N P_N^{p,p}\left(th\,\frac{x}{l}\right)}{ch^p\frac{x}{l}},\ \ \mathcal{H}_x(x)=-\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y,\ \ \mathcal{H}_z(x)=-\frac{i}{k}\frac{d\mathcal{E}_y(x)}{dx},$$

$p=p_N=l\sqrt{\beta_N^2-k^2n_2^2}$, β_N — корень характеристического уравнения

$$\beta^2=k^2n_2^2+\frac{(\sqrt{1+4s^2}-2N-1)^2}{4l^2},\ \ N\in\mathbf{N}_0,\ \ s^2=k^2l^2(n_1^2-n_2^2).$$

Если $N=0$, то $\mathcal{E}_y(x)=\frac{A_0}{ch^p\frac{x}{l}}$, если $N=1$, то $\mathcal{E}_y(x)\frac{A_1 sh\frac{x}{l}}{ch^{p+1}\frac{x}{l}}$.

Указание. См. задачу 2.577.

2.588. $\mathbf{E}=e^{i(\beta\, z-\omega t)}(0,\,\mathcal{E}_y(x),\,0),\ \ \mathbf{H}=e^{i(\beta\, z-\omega t)}(\mathcal{H}_x(x),\,0,\,\mathcal{H}_z(x)),$

$$\mathcal{E}_y(x)=A_Ne^{\frac{rx}{l}}\left(1+e^{\frac{2x}{l}}\right)^{\nu}F\left(\nu+\tfrac{r+p}{2},\nu+\tfrac{r-p}{2},r+1,-e^{\frac{2x}{l}}\right),$$

$$\mathcal{H}_x(x)=-\frac{\beta}{k}\mathcal{E}_y,\ \ \mathcal{H}_z(x)=-\frac{i}{k}\frac{d\mathcal{E}_y(x)}{dx},$$

где $r=r_N=l\sqrt{\beta_N^2-k^2n_3^2}$, $p=p_N=l\sqrt{\beta_N^2-k^2n_2^2}$, β_N — корень характеристического уравнения

$$\beta^2=k^2\tfrac{n_2^2+n_3^2}{2}+\frac{(\sqrt{1+2v^2(2+a^2)}-2N-1)^2}{4l^2}+\frac{a^4v^4}{4l^2(\sqrt{1+2v^2(2+a^2)}-2N-1)^2},\qquad N\in\mathbf{N}_0,$$

$\nu>0$ — корень уравнения $\nu^2-\nu-v^2(1+\frac{a^2}{2})=0$, $a^2=\frac{n_2^2-n_3^2}{n_1^2-n_2^2}$ — параметр асимметричности, $v^2=k^2l^2(n_1^2-n_2^2)$.

Если $N=0$, то $\mathcal{E}_y(x)=\frac{A_0e^{\frac{rx}{l}}}{\left(1+e^{\frac{2x}{l}}\right)^{\frac{r+p}{2}}}$, $r\pm p=\sqrt{1+2v^2(2+a^2)}-1$.

Указание. Компонента $\mathcal{E}_y(x)$ — решение задачи

$$\mathcal{E}_y''+\tfrac{1}{l^2}\left[\frac{v^2e^{\frac{2x}{l}}}{1+e^{\frac{2x}{l}}}\left(a^2+\frac{2(2+a^2)}{1+e^{\frac{2x}{l}}}\right)-r^2\right]\mathcal{E}_y=0,\ \ -\infty<x<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_y^2dx<\infty.$$

Замена $\xi=-e^{\frac{2x}{l}}$ преобразует уравнение к виду (2.64) для $\psi(\xi)=\mathcal{E}_y(x)$, а подстановка $\psi(\xi)=\xi^{\frac{r}{2}}(1-\xi)^{\nu}u(\xi)$ приводит к уравнению Гаусса с параметрами $\frac{r+p}{2}+\nu$, $\frac{r-p}{2}+\nu$, $r+1$ для функции $u(\xi)$. Условию интегрируемости $\mathcal{E}_y^2(x)$ при $x\to-\infty$ $(\xi\to+0)$ удовлетворяет решение

$$\psi(\xi)=C\xi^{\frac{r}{2}}(1-\xi)^{\nu}F\left(\tfrac{r+p}{2}+\nu,\tfrac{r-p}{2}+\nu,r+1,\xi\right).$$

Условие интегрируемости $\mathcal{E}_y^2(x)$ при $x\to\infty$ $(\xi\to-\infty)$ получается с помощью асимптотической формулы для гипергеометрической функции.

Глава 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Метод разделения переменных основан на разложении решения в ряд по собственным функциям дифференциального оператора, обладающего дискретным спектром. Если спектр непрерывен, то в ряде случаев решение имеет вид интеграла и получается с помощью интегрального преобразования. Аппарат интегрального преобразования должен содержать прямое преобразование, которое каждой функции $u(x, y)$ некоторого класса ставит в соответствие ее образ

$$U(\lambda, y) = \int_X K(\lambda, x) u(x, y)\, dx, \tag{3.1}$$

и обратное преобразование

$$u(x, y) = \int_\Lambda M(x, \lambda) U(\lambda, y)\, d\lambda, \tag{3.2}$$

восстанавливающее прообраз $u(x, y)$ по известному образу $U(\lambda, y)$. Функции $K(\lambda, x)$, $M(x, \lambda)$ фиксированы и называются

ядрами соответствующих интегральных преобразований. Если $u(x,y)$ — решение задачи математической физики для линейного дифференциального уравнения с частными производными, то интегральное представление (3.2) ассоциируется с рядом Фурье по собственным функциям. Ядро интегрального преобразования (3.1) выбирается так, чтобы образ дифференциального уравнения для $u(x,y)$ не содержал производных по x. Решение задач осуществляется по единой схеме: 1) выбор интегрального преобразования; 2) переход от задачи для функции $u(x,y)$ к задаче для образа $U(\lambda,y)$; 3) определение функции $U(x,y)$; 4) восстановление прообраза $u(x,y)$ посредством обратного преобразования.

В данной главе предлагаются задачи, которые могут быть решены с помощью интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля.

Литература к главе: [40], [77].

3.1. Преобразование Фурье

Пример 3.1. . Если функция $f(x)$, $x{\in}R$ — кусочно-гладкая на каждом конечном промежутке и абсолютно интегрируема на R, то существует интеграл

$$\mathcal{F}[\,f\,](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\,\lambda x} dx, \tag{3.3}$$

называемый преобразованием Фурье функции $f(x)$. При указанных условиях определено обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}^{-1}[\,g\,](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{i\,\lambda x} d\lambda, \tag{3.4}$$

где $g(\lambda){=}\mathcal{F}[\,f\,](\lambda)$, при этом (см. [34], т. 3)

$$\mathcal{F}^{-1}[\,g\,](x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f, \quad \mathcal{F}[\,f\,] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[g]] = g. \tag{3.5}$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{i\,\lambda x} d\lambda. \tag{3.6}$$

В случае четной функции правые части формул (3.3), (3.4) можно преобразовать в интегралы от 0 до ∞ с множителем $2\cos\lambda x$ вместо экспоненты (косинус-интеграл Фурье)

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx, \\ f(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda, \end{aligned} \tag{3.7}$$

а в случае нечетной функции — с множителем $2\sin\lambda x$ (синус-интеграл Фурье)

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx, \\ f(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} g(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in R^n$ определяется формулой

$$\mathcal{F}[\,f\,](\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbf{R^n}} f(x)\, e^{-i(\lambda,x)} dx, \tag{3.9}$$

где (λ, x) — скалярное произведение векторов λ и x, а обратное преобразование имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbf{R^n}} \mathcal{F}[\,f\,](\lambda)\, e^{i(\lambda,x)} d\lambda. \tag{3.10}$$

Так как $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция, то интеграл (3.9) равномерно сходится в R^n, следовательно, представляет собой непрерывную ограниченную функцию $\mathcal{F}[\,f\,](\lambda)$, определенную для $\lambda \in R^n$. Этой функции соответствует регулярный

функционал из $\mathcal{J}'$, действующий по правилу

$$(\mathcal{F}[\,f\,],\varphi)=\int\limits_{\mathbf{R^n}}\mathcal{F}[\,f\,](\lambda)\varphi\,d\lambda,\quad \varphi\in\mathcal{J}. \tag{3.11}$$

Повторный интеграл в правой части (3.11) допускает изменение порядка интегрирования, поэтому соотношению (3.11) можно придать форму

$$(\mathcal{F}[\,f\,],\varphi)=(f,\mathcal{F}[\varphi]),\quad \varphi\in\mathcal{J}. \tag{3.12}$$

Преобразованием Фурье обобщенной функции $f\in\mathcal{J}'$ называется функционал $\mathcal{F}[\,f\,]$, действующий по правилу (3.12).

Если $f(x,y)\in\mathcal{J}'(R^{m+n})$, $x\in R^n$, $y\in R^m$, то преобразованием Фурье функции $f(x,y)$ по переменной x называется функционал $\mathcal{F}_x[\,f\,]$, определенный формулой

$$(\mathcal{F}_x[\,f\,],\varphi)=(f,\mathcal{F}_\lambda[\varphi]),\quad \varphi(x,y)\in\mathcal{J}(R^{m+n}). \tag{3.13}$$

Пусть $f=\delta(x-x_0)$, тогда

$$(\mathcal{F}[\delta(x-x_0)](\lambda),\varphi(\lambda))=(\delta(x-x_0),\mathcal{F}[\varphi](x))=\mathcal{F}[\varphi](x_0)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbf{R^n}}\varphi(\lambda)e^{-i(\lambda,x_0)}d\lambda=\left(\frac{e^{-i(\lambda,x_0)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}},\varphi(\lambda)\right),$$

откуда

$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)](\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-i(\lambda,x_0)}. \tag{3.14}$$

Обратное преобразование, записанное в виде интеграла

$$\delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbf{R^n}}e^{i(\lambda,x-x_0)}d\lambda, \tag{3.15}$$

называется разложением δ-функции по плоским волнам. При $n=1$ формула (3.15) преобразуется к виду

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos\lambda x\,d\lambda. \tag{3.16}$$

3.1. Пусть $\varphi\in\mathcal{J}(R^n)$; доказать, что

$$D^{\alpha}\mathcal{F}[\varphi(x)] = \mathcal{F}[(-ix)^{\alpha}\varphi], \tag{3.17}$$

$$\mathcal{F}[D^{\alpha}\varphi](\lambda) = (i\lambda)^{\alpha}\mathcal{F}[\varphi](\lambda). \tag{3.18}$$

3.2. Каждая функция $\varphi\in\mathcal{J}(R^n)$ имеет фурье-образ $\mathcal{F}[\varphi]$, т.е. на пространстве $\mathcal{J}(R^n)$ задан оператор $\mathcal{F}$. Доказать, что этот оператор 1) линеен; 2) взаимно однозначно отображает $\mathcal{J}(R^n)$ в себя; 3) непрерывен на $\mathcal{J}(R^n)$.

3.3. Определить функцию $\varphi(x)$, если ее преобразование Фурье $1.\, e^{-\alpha|\lambda|}$; $2.\, e^{-\alpha\lambda^2}$, где $\alpha>0$.

3.4. Пусть $\varphi\in\mathcal{J}(R)$, $y\geq 0$; установить формулу

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}[\varphi]\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}. \tag{3.19}$$

3.5. Доказать, что преобразование $\mathcal{F}^{-1}$, определенное формулой

$$\mathcal{F}^{-1}[\,f(x)\,] = \mathcal{F}[\,f(-x)\,], \quad f\in\mathcal{J}'(R^n), \tag{3.20}$$

является обратным преобразованием Фурье.

3.6. Показать, что оператор $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{J}'(R^n)$ на $\mathcal{J}'(R^n)$ и является непрерывным на $\mathcal{J}'(R^n)$.

3.7. Доказать, что в $\mathcal{J}'(R)$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{k}\cos\lambda x\,d\lambda = \delta(x).$$

3.8. Установить следующие свойства преобразования Фурье функции $f\in\mathcal{J}'(R^n)$:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\mathcal{F}[f(x)] &= \mathcal{F}[(-ix)^{\alpha}f(x)], \\ \mathcal{F}[D^{\alpha}f](\lambda) &= (i\lambda)^{\alpha}\mathcal{F}[f](\lambda). \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.9. Найти преобразования Фурье функций:
1) $\frac{\sin ax}{x}$; 2) $D^m\delta(x-x_0)$; 3) x^m; 4) $e^{i\lambda_0 x}$; 5) $h(x)D^m\delta(x-x_0)$, где $x\in R$, $h(x)\in C^\infty$, $m\in\mathbf{N}_0$.

3.10. Вывести формулу

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,sign\,\lambda. \tag{3.22}$$

3.11. Найти функцию $f(x)$, где $x\in R^n$, если

$$\mathcal{F}[\,f\,] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\lambda^2+k^2)}, \quad k>0, \quad n=1,2,3.$$

3.12. Найти функцию $f(x)$, $x\in R^n$, преобразование Фурье которой

$$\mathcal{F}[\,f\,](\lambda) = \frac{\sin a|\lambda|t}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}a|\lambda|}\eta(t), \quad a>0, \quad n=1,2,3.$$

3.13. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая ограниченная в R функция; убедиться в том, что при $y\geq 0$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}[f](x)\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}. \tag{3.23}$$

3.14. Собственными функциями оператора импульса $-i\hbar\nabla$ в квантовой механике являются функции

$$\psi_p(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(p,x)}, \quad p,\ x\in R^3,$$

которые нормируются по правилу

$$\int\limits_{\mathbf{R^3}}\psi_p(x)\psi_{p'}(x)dx = \delta(p-p').$$

Определить C.

3.15. Показать, что волновая функция $\psi(x)$, $x\in R^3$ имеет в p-представлении вид

$$h^{-\frac{3}{2}}\mathcal{F}[\,\psi(x)\,]\left(\frac{p}{\hbar}\right).$$

3.16. Свободная частица имеет импульс $p_0\in R^3$. Определить ее волновую функцию в p-представлении.

3.17. Частица, локализованная в точке $x_0\in R^3$, описывается в x-представлении волновой функцией $\psi_{x_0}(x)=\delta(x-x_0)$. Найти волновую функцию в p-представлении.

Пример 3.2. Решить задачу Дирихле для полуплоскости:

$$\Delta u(x,y)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ 0<y,$$
$$u(x,0)=f(x),\ \ |u(x,y)|\le M.$$

Рассмотреть частный случай:

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0, & x\in(a,b),\\ 0, & x\,\overline{\in}\,(a,b).\end{cases}$$

Пусть $\mathcal{F}_x[\,u\,]=U(\lambda,y)$, $\mathcal{F}[\,f\,]=F(\lambda)$; преобразование Фурье задачи Дирихле, основанное на свойстве (3.21), имеет вид

$$U_{yy}-\lambda^2U=0,\ \ 0<y,$$
$$U(\lambda,0)=\mathcal{F}(\lambda),\ \ U\in\mathcal{J}'.$$

Так как $e^{|\lambda|y}\overline{\in}\mathcal{J}'$ (задача 10.68 п. 1) , то $U(\lambda,y)=e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}[\,f\,]$. Таким образом (см.(3.23)),

$$u(x,y)=\mathcal{F}^{-1}[\,e^{-|\lambda|y}F[\,f\,]](x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

В частном случае

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \frac{u_0}{\pi}\int\limits_a^b\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}=-\frac{u_0}{\pi}arctg\frac{x-\xi}{y}\Big|_a^b=\\ &= \frac{u_0}{\pi}\left(arctg\frac{x-a}{y}-arctg\frac{x-b}{y}\right)=\frac{u_0}{\pi}\gamma,\end{aligned}$$

где γ —угол, под которым виден из точки (x, y) отрезок $[a, b]$. Так как $\gamma \in [0, \pi]$, то

$$u(x,y) = \frac{u_0}{\pi} arcctg \frac{(x-a)(x-b)+y^2}{(b-a)y}.$$

3.18. Найти стационарное распределение температуры в двугранном угле $(0<x, 0<y)$, грань $x=0$ которого поддерживается при температуре u_0, а другая грань — при температуре $u_1\eta(l-x)$, $l>0$.

3.19. Определить стационарную температуру двугранного угла $(0<x, 0<y)$, грань $y=0$ которого теплоизолирована, а грань $x=0$ поддерживается при температуре 1) $u_0\eta(l-y)$; 2) $u_0\eta(y-l)$.

3.20. Грань $x=0$ двугранного угла $(0<x, 0<y)$ имеет постоянную температуру, а грань $y=0$ теплоизолирована, кроме полосы $(l_1<x<l_2)$ на этой грани, через которую внутрь угла поступает тепловой поток плотности q_0. Найти стационарную плотность потока через грань $x=0$.

3.21. Определить электростатический потенциал в пространстве между параллельными плоскостями $y=\pm l$, потенциал каждой из которых равен $u_0 sign\, x$.

3.22. Найти стационарное распределение температуры в слое $(0<y<l)$ с теплоизолированной поверхностью $y=0$, если температура поверхности $y=l$

$$u(x,l) = \begin{cases} u_1, & x<0, \\ u_2, & x>0. \end{cases}$$

3.23. Определить температуру пространства в момент $t>0$, если при $t=0$ она равна $u_0(r)$. Решить задачу в частном случае: $u_0(r)=u_0 e^{-\alpha r}$, $\alpha>0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.24. Нить ($x{=}0, y{=}y_0, -\infty{<}z{<}\infty$) с зарядом q на единицу длины расположена между проводящими заземленными плоскостями $y{=}\pm\, l$. Найти потенциал электростатического поля и плотность заряда на плоскостях.

3.25. В слое ($0{<}y{<}l$) на расстоянии y_0 от поверхности $y{=}0$ расположен прямолинейный проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность Q_0. Найти стационарную температуру поверхности $y{=}l$, если эта поверхность теплоизолирована, а другая — имеет нулевую температуру.

3.26. Внутри однородного изотропного слоя ($0{<}y{<}l$), проводимость которого σ, находится заряженная нить, с единицы длины которой в единицу времени стекает заряд J. При условиях задачи 1.345 найти плотность тока в слое.

3.27. Между проводящими заземленными плоскостями $y{=}\pm\, l$ помещена нить ($x{=}0, y{=}y_0, -\infty{<}z{<}\infty$), на которой расположены диполи с моментом $\mathbf{p}$ на единицу длины. Определить плотность заряда на плоскостях, если 1) $\mathbf{p}{=}p\,\mathbf{e}_x$; 2) $\mathbf{p}{=}p\,\mathbf{e}_y$.

3.28. Решить задачу Дирихле для полупространства $z{>}0$.

3.29. На плоской границе $y{=}0$ раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 (при $y{<}0$), μ_2 (при $y{>}0$) расположен прямой ток $\mathbf{J}{=}J\mathbf{e}_z$. Найти индукцию магнитного поля.

3.30. В сечении $x{=}0$ стержня ($-\infty{<}x{<}\infty$) с теплоизолированной поверхностью действует с момента $t{=}0$ источник тепла постоянной мощности Q_0. Найти температуру стержня при $t{>}0$, если при $t{=}0$ она равна нулю.

3.31. Решить в линейном приближении задачу о колебаниях бесконечной струны ($-\infty{<}x{<}\infty$) под действием поперечной сосредоточенной силы F_0, которая начинает двигаться по струне из точки $x{=}0$ с момента $t{=}0$ со скоростью v ($0{<}v{\ll}a$); начальные условия нулевые.

3.32. Решить задачу о колебаниях полубесконечной струны ($0<x$), конец которой движется по закону $\mu(t)\eta(t)$, $\mu(0)=0$; начальные условия нулевые.

3.33. Изучить движение полуограниченной струны ($0<x$), которая начинает двигаться под действием поперечной силы F(t), приложенной с момента $t=0$ к концу струны.

3.34. Торец однородного полуограниченного стержня ($0<x$) с теплоизолированной боковой поверхностью имеет заданную температуру $\mu(t)$. Найти распределение температуры в стержне при $t>0$, если его начальная температура равна нулю. Рассмотреть частный случай $\mu(t)=u_0$.

3.35. Решить задачу теплопроводности для бесконечного стержня ($-\infty<x<\infty$) с теплоизолированной поверхностью, начальная температура которого $u_0(x)$.

3.36. Проводник с магнитной проницаемостью μ и большой проводимостью σ (токами смещения можно пренебречь) заполняет полупространство $z>0$. В момент времени $t=0$ в области $z<0$ включается постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, параллельное плоскости $z=0$. Определить магнитное поле в проводнике.

3.37. Лазерный луч проникает в жидкость через прозрачную неподвижную пластинку, находящуюся на поверхности жидкости (см. задачу 1.223). Применяя преобразование Фурье

$$\Phi(z,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(z,t)e^{-i\omega t}dt,$$

определить звуковое поле в жидкости на больших расстояниях от поверхности $z=0$ в следующих случаях: 1) $\omega \ll \alpha c_0$ (длинный импульс, сильное поглощение света); 2) звук возбуждается мгновенным импульсом $I\delta(\frac{t}{t_0})$.

3.38. На свободную поверхность идеальной жидкости падает лазерный луч, поглощение которого сопровождается возбуждением звуковой волны (см. задачу 1.222). Определить звуковое поле в жидкости при условиях п.1 и п.2 предыдущей задачи.

3.39. Найти стационарную температуру канала с прямоугольным поперечным сечением ($|x|<l, 0<y$), стенки которого имеют нулевую температуру, а дно — температуру u_0.

3.40. Определить стационарную температуру однородного полуограниченного цилиндра ($r<r_0, 0<\varphi<2\pi, 0<z$), торец которого поддерживается при 0^o, а температура боковой поверхности равна $u_0 \cos m\varphi \cdot \eta(l-z)$, $l>0$, $m\in\mathbf{N}_0$.

3.41. Определить стационарную температуру полубесконечного цилиндра ($r<r_0, 0<\varphi<2\pi, 0<z$) с теплоизолированным торцом, боковая поверхность которого поддерживается при температуре $u_0 \sin m\varphi \cdot \eta(l-z)$, $l>0$, $m\in\mathbf{N}$.

3.42. Найти стационарную температуру полуограниченного цилиндра ($r<r_0, 0<\varphi<2\pi, 0<z$), через боковую поверхность которого поступает тепловой поток плотности $-\mathbf{e}_r\, q_0 \cos m\varphi\cdot\eta(l-z)$, $l>0$, $m\in\mathbf{N}_0$, а торец поддерживается при 0^o.

3.43. Найти электростатический потенциал внутри полого цилиндра ($r<r_0, 0<\varphi<2\pi, -\infty<z<\infty$), потенциал поверхности которого

$$u(r_0, z) = \begin{cases} u_1, & z < 0, \\ u_2, & z > 0. \end{cases}$$

3.44. Определить потенциал точечного заряда в цилиндрических координатах, применяя преобразование (3.7) к уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi q \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \delta(z).$$

Используя полученный результат, показать, что

$$\int_0^\infty K_0(\lambda r)\cos\lambda z\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda z\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = K_0(\lambda r).$$

3.45. Получить следующее выражение для потенциала точечного заряда, помещенного на оси полого проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 :

$$u(r,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(\lambda r_0)}{I_0(\lambda r_0)} I_0(\lambda r)\cos\lambda z\,d\lambda.$$

3.46. Найти потенциал точечного диполя в цилиндрических координатах, применяя преобразование (3.8) к соответствующему уравнению Пуассона, и показать, что

$$\int_0^\infty K_0(\lambda r)\sin\lambda z\,\lambda\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.47. Круглый виток с током J надет на длинный цилиндр, радиус которого r_0, магнитная проницаемость μ (см. задачу 1.324). Показать, что магнитное поле на оси цилиндра равно

$$\mathbf{H}|_{r=0} = \mathbf{e}_z \frac{4J}{c}\int_0^\infty \frac{K_1(\lambda r_0)\cos\lambda z\,d\lambda}{I_0(\lambda r_0)K_1(\lambda r_0) + \mu I_1(\lambda r_0)K_0(\lambda r_0)}.$$

3.48. В массивном теле из железа с бесконечно большой магнитной проницаемостью имеется зазор, внутри которого находится прямой ток (см. задачу 1.340). Определить магнитное поле в зазоре и силу, действующую на единицу длины тока.

3.49. В цилиндрическую оболочку ($r=r_0$, $0<\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$) втекает постоянный ток. При условиях задачи 1.356 найти плотность тока в оболочке.

3.50. В цилиндрическую оболочку ($r{=}r_0$, $0{<}\varphi{<}\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) втекает постоянный ток. При условиях задачи 1.357 найти плотность тока в оболочке.

3.51. В цилиндрическую оболочку ($r{=}r_0$, $0{<}\varphi{<}2\pi$, $-\infty{<}z{<}\infty$) втекает постоянный ток. При условиях задачи 1.358 найти плотность тока в оболочке.

3.2. Преобразование Лапласа

Пример 3.3. Функция $f(t)$, $t{\in}(-\infty, \infty)$ называется оригиналом, если 1) $f(t){=}0$ при $t{<}0$, 2) $f(t)$ — кусочно-гладкая на каждом конечном промежутке области определения, 3) существует такое вещественное число σ_0 (показатель роста), что при любом $\sigma{>}\sigma_0$ функция $f(t)e^{-\sigma t}$ абсолютно интегрируема на $(0,\infty)$. Преобразованием Лапласа, или изображением оригинала $f(t)$, называется функция комплексного переменного $p{=}\sigma{+}i\,\lambda$

$$\mathcal{L}[\,f\,](p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{3.24}$$

Обратное преобразование определяется формулой Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} F(p)\,e^{pt}dp, \quad \mathbf{Re}\,p = \sigma > \sigma_0, \tag{3.25}$$

где $F(p){=}\mathcal{L}[\,f\,](p)$. Функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости $\mathbf{Re}\,p{>}\sigma_0$ и $F(p) \to 0$, если $\mathbf{Re}\,p \to +\infty$. Взаимно однозначное соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывают в виде $f \leftrightarrow F$.

Преобразования Лапласа и Фурье связаны между собой:

$$\mathcal{L}[\,f\,](p) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f\,e^{-\sigma t}](\lambda), \quad \sigma > \sigma_0. \tag{3.26}$$

Пусть $\mathcal{D}'_+(\sigma_0)$ — множество обобщенных функций $f(t)\in\mathcal{D}'(R)$, таких, что f(t)=0 при $t<0$ и $f(t)\,e^{\sigma t}\in\mathcal{J}'(R)$ при $\sigma>\sigma_0$. Преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)\in\mathcal{D}'_+(\sigma_0)$ называется функционал, определенный соотношением (3.26). В частности

$$\mathcal{L}[\delta(t)](p)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\delta(t)e^{-\sigma t}](\lambda)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\delta](\lambda)=1.$$

3.52. Найти изображение обобщенной функции $D^m\delta(t-\tau)$, $\tau\geq 0$.

3.53. Доказать, что

$$D^m f(t)\leftrightarrow p^m F(p), \tag{3.27}$$

где D^m — оператор обобщенного дифференцирования.

3.54. Пусть $f(t)\in C^m(t\geq 0)$, показать, что

$$\{D^m f\}\leftrightarrow p^m F(p)-\sum_{k=1}^{m} p^{m-k} f^{(k-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

3.55. Доказать, что

$$\mathcal{L}[f*D^m\delta]=\mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[D^m\delta].$$

3.56. Доказать теорему умножения: изображение свертки классических оригиналов равно произведению их изображений [1], т.е.

$$f*g\leftrightarrow F\,G. \tag{3.28}$$

3.57. Получить соотношение (интеграл Дюамеля):

$$pF(p)G(p)\leftrightarrow g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.29}$$

где $f\leftrightarrow F$, $g\leftrightarrow G$.

[1] Доказательство теоремы для обобщенных функций см. в [14].

3.58. Установить соответствия:

1) $t^m \leftrightarrow \frac{m!}{p^{m+1}}$;
2) $e^{p_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{p-p_0}$;
3) $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$;
4) $\cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$;
5) $t \sin \omega t \leftrightarrow \frac{2p\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$;
6) $\int\limits_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \leftrightarrow \frac{arcctgp}{p}$;
7) $\int\limits_0^t \sin \alpha\tau \sin \beta(t-\tau) d\tau \leftrightarrow \leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.

3.59. Найти оригиналы, которым соответствуют изображения:

1) $\frac{1}{p^2-1}$; 2) $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$; 3) $\frac{p}{p^2+p+1}$; 4) $\frac{2p}{p^4+4}$;
5) $\frac{2P^3}{p^4-1}$; 6) $arctg\, \frac{1}{p+1}$; 7) $\ln \frac{p+1}{p-1}$; 8) $p^m,\ m \in N_0$.

3.60. Найти изображение многочлена Чебышева-Лагерра $L_n(x)$.

Пример 3.4. Построение изображения функции e^{-t^2}. Так как $e^{-t^2} \leq 1$, то показатель роста $\sigma_0 = 0$. Следовательно, $F(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\mathbf{Re}\, p > 0$. Пусть $p > 0$, тогда по определению (3.24)

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-t^2-pt} dt = e^{\frac{p^2}{4}} \int\limits_0^\infty e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \mathcal{E}rf\left(\frac{p}{2}\right).$$

Это равенство, установленное при $p > 0$, будет справедливо в области аналитичности правой и левой части, т.е. в полуплоскости $\mathbf{Re}\, p > 0$.

3.61. Найти изображения функций:

1) $erf\, t$; 2) $\mathcal{E}rf\sqrt{t}$; 3) $\ln t$; 4) $e^{-2\sqrt{t}}/\sqrt{\pi t}$.

3.62. Установить соответствия:

$$\frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},\ \tau \geq 0; \tag{3.30}$$

$$t^z \leftrightarrow \frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}},\ \mathbf{Re}\, z > -1. \tag{3.31}$$

3.63. Применяя теорему умножения (3.28), получить соотношение, связывающее B- и Γ-функции Эйлера:

$$B(z,\zeta)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)},$$

где z и ζ — комплексные переменные.

3.64. Найти изображения функций: 1) $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$; 2) $\dfrac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$; 3) $\dfrac{2\,sh\,\alpha t}{\sqrt{\pi t}}$.

3.65. Найти оригиналы, изображения которых:

1) $e^{-p}\left[\dfrac{1}{(p-1)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1}{(p+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$; 2) $\dfrac{p^2}{(p+1)^{\frac{5}{2}}}$; 3) $\dfrac{1}{p(p+1)^{\frac{3}{2}}}$.

3.66. Найти оригиналы, которым соответствуют изображения:

1) $e^{p^2}\mathcal{E}rf\,p$; 2) $\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}e^{p}\mathcal{E}rf\sqrt{p}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{1}{p}}\mathcal{E}rf\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$;

4) $\dfrac{1}{p}e^{p}\mathcal{E}rf\sqrt{p}$; 5) $\dfrac{\ln(p+\sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}}$; 6) $\dfrac{\ln(p+\sqrt{p^2-1})}{\sqrt{p^2-1}}$.

3.67. Найти изображения функций:

1) $\sin t-\dfrac{\pi}{2}tY_0(t)$; 2) $-\dfrac{\pi}{2}(tY_1(t)+\cos t)$;

3) $sh\,t+tK_0(t)$; 4) $ch\,t-tK_1(t)$.

Пример 3.5. Найти оригинал, изображение которого

$$F(p)=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-1}}}{\sqrt{p^2-1}},\quad \tau\geq 0,\quad \mathbf{Re}\,p>1,\quad \arg\sqrt{p^2-1}\Big|_{p=2}=0.$$

Пусть $\Phi(p)=F(p)e^{\tau p}$; по формуле (3.25)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi(p)e^{p(t-\tau)}dp,\quad \sigma>1.$$

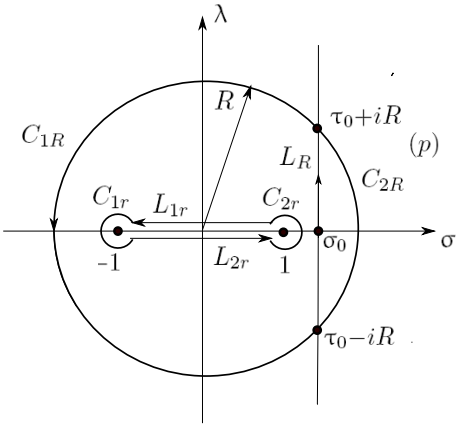

Рис. 3.1

Для вычисления интеграла с помощью вычетов нужно построить такой замкнутый вспомогательный контур, чтобы в ограниченной им области существовала однозначная ветвь функции $\sqrt{p^2-1}$. При $t<\tau$ следует взять замкнутый контур, состоящий из дуги C_{2R} и хорды L_R (рис.3.1).

Подынтегральная функция аналитична в области, ограниченной этим контуром, и согласно теореме Коши $\int_{C_{2R}} + \int_{L_R} = 0$. Если $R\to\infty$, то в силу леммы Жордана интеграл по дуге C_{2R} стремится к нулю, а второй интеграл — к $2\pi i f(t)$. Таким образом, функция $f(t) = 0$. При $t > \tau$ нужно выбрать контур, состоящий из дуги C_{1R}, хорды L_R, окружностей C_{1r}, C_{2r} и двух берегов L_{1R}, L_{2R} разреза по отрезку $[-1;\, 1\,]$ оси 0σ. По теореме Коши

$$\int_{C_{1R}} + \int_{L_R} + \int_{C_{1r}} + \int_{C_{2r}} + \int_{L_{1r}} + \int_{L_{2r}} = 0.$$

При $r \to 0$, $R \to \infty$ интегралы по C_{1r}, C_{2r}, C_{1R} стремятся к нулю (последний — по лемме Жордана); таким образом,

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \Phi(p) e^{p(t-\tau)} dp,$$

где L — замкнутый контур, состоящий из двух берегов разреза $[-1;\,1]$ оси 0σ. Замена переменной $z{=}p{-}\sqrt{p^2{-}1}$;($z(p)$ — обратная функция Жуковского) переводит контур L в окружность $|z|{=}1$, так что

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} e^{\tau z+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})(t-\tau)}\frac{dz}{z}.$$

Подынтегральная функция имеет в круге $|z|{<}1$ одну особую точку $z{=}0$, вычет в которой равен $I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})$, что становится очевидным, если показатель степени преобразовать к виду

$$\frac{\sqrt{t^2-\tau^2}}{2}\left(z\sqrt{\frac{t+\tau}{t-\tau}}+\frac{1}{z}\sqrt{\frac{t-\tau}{t+\tau}}\right).$$

Итак,

$$I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\eta(t-\tau)\leftrightarrow\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-1}}}{\sqrt{p^2-1}}. \tag{3.32}$$

Полученный результат эквивалентен следующему соотношению: при $\tau\geq 0$, $\mathbf{Re}\,p{>}1$, $\arg\sqrt{p^2{-}1}\Big|_{p=2}{=}0$,

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,e^{-pt}dt=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-1}}}{\sqrt{p^2-1}}. \tag{3.33}$$

3.68. Показать, что

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,e^{-pt}dt=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{p^2+1}} \tag{3.34}$$

при $\tau{\geq}0$, $\mathbf{Re}\,p{\geq}0$, $p\neq\pm i$, $\arg\sqrt{p^2{+}1}|_{p=1}{=}0$.

Пример 3.6. Теорема разложения: если однозначная функция $F(p)$ аналитична в окрестности $p{=}\infty$ и $\lim\limits_{p\to\infty}F(p){=}0$, то

$$\frac{1}{p^{\alpha}}F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+\alpha}}\leftrightarrow f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n t^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)},\qquad 0\leq\alpha<1. \tag{3.35}$$

Приложение теоремы:

$$\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}\tau^n t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}\tau^n \Gamma(n+\frac{3}{2})}{(2n+1)!\,p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{p\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^n}{n!\,p^n} = \frac{1}{p\sqrt{p}}\,e^{-\frac{\tau}{p}}.$$

3.69. Доказать, что при $\tau \geq 0$

$$1)\quad \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{e^{-\frac{\tau}{t}}}{\sqrt{p}};$$

$$2)\quad \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t\tau}) \leftrightarrow \frac{e^{-\frac{\tau}{t}}}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1. \tag{3.36}$$

3.70. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\tau^\mu (t-\tau)^\nu} J_\mu(\alpha\sqrt{\tau}) J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau})\, d\tau, \quad \mu > -1,\ \nu > -1.$$

3.71. Найти изображения функций: 1) $\frac{sh2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$; 2) $\frac{ch2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$.

3.72. Найти оригиналы, которым соответствуют изображения (при условии $\mathbf{Re}\,\nu > -1$) :

$$1)\ \frac{1}{p^{\nu+1}}\sin\left(\frac{1}{p}+\frac{3\pi\nu}{4}\right); \quad 2)\ \frac{1}{p^{\nu+1}}\cos\left(\frac{1}{p}+\frac{3\pi\nu}{4}\right);$$

$$3)\ \frac{1}{p^{\nu+1}}\,e^{\frac{1}{p}}; \quad 4)\ \frac{2}{p^{\nu+1}}\,sh\frac{1}{p}; \quad 5)\ \frac{2}{p^{\nu+1}}\,ch\frac{1}{p}.$$

3.73. Установить соответствия:

$$1)\quad \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \leftrightarrow J_0(t),$$

$$\int_0^{\infty} J_0(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}; \tag{3.37}$$

$$2)\quad \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \leftrightarrow I_0(t).$$

3.74. Найти изображения функций:

$$1)\ tJ_0(t);\ \ 2)\ J_1(\alpha t);\ \ 3)\ tJ_1(t);\ \ 4)\ \frac{J_1(\alpha t)}{t};\ \ 5)\ I_1(\alpha t);$$

$$6)\ t^2I_2(t);\ \ 7)\ \frac{J_1(\sqrt{t})}{\sqrt{t}};\ \ 8)\ \frac{I_0(\alpha t)-\cos\beta t}{t^2};\ \ 9)\ ber_2\sqrt{t}.$$

3.75. Найти изображения, оригиналы которых

$$1)\ \frac{\sin\sqrt{t}}{t};\qquad 2)\ \sqrt{t}\cos\sqrt{t}.$$

3.76. Просуммировать ряды:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\frac{t^n}{n!};\qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\frac{(-1)^nt^n}{n!}.$$

3.77. Если $f_1(t),\ f_2(t)$ — оригиналы с показателями роста $\sigma_1,\ \sigma_2$ соответственно и $f_1\leftrightarrow F_1,\ f_2\leftrightarrow F_2$, то

$$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F_1(q)F_2(p-q)\,dq,$$

где $\sigma>\sigma_1,\ Re\,p>\sigma+\sigma_2$. Используя приведенное соответствие, найти изображения произведений:

$$1)\ \sqrt{\tfrac{2}{\pi t}}\,sh\,t;\quad 2)\ \sqrt{\tfrac{2}{\pi t}}\,\cos t;\quad 3)\ I_0(t)\sin t;\quad 4)\ J_1(t)\cos t.$$

Пример 3.7. Обобщенная теорема умножения:
если $F(p)\leftrightarrow f(t)$ и $G(p)e^{-\tau\varphi(p)}\leftrightarrow g(t,\tau),\ \tau\geq0$, то

$$F(\varphi(p))\,G(p)\leftrightarrow\int\limits_0^{\infty}f(\tau)\,g(t,\tau)d\tau. \tag{3.38}$$

Пусть, в частности, $F(p)\leftrightarrow f(t),\ G(p)=\frac{1}{p\sqrt{p}},\ \varphi(p)=\frac{1}{p}$, тогда (см. пример 3.5)

$$G(p)e^{-\tau\varphi(p)}=\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{\tau}{p}}\leftrightarrow\frac{\sin2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty f(\tau)\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p\sqrt{p}}F\left(\frac{1}{p}\right).$$

3.78. Установить соответствия

$$1)\quad \int_0^\infty f(\tau)\frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}d\tau \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}F\left(\frac{1}{p}\right);$$

$$2)\quad \int_0^\infty f(\tau)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau})\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{p}\right);$$

$$3)\quad \int_0^\infty f(\tau)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}F(\sqrt{p}). \tag{3.39}$$

3.79. Показать, что

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \leftrightarrow \mathcal{E}rf\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}. \tag{3.40}$$

3.80. Известно, что $u(t) \leftrightarrow U(p)$; установить соотношение

$$U(p)\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(\tau)\,e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.41}$$

3.81. Показать, что если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$1) \quad \int_0^t J_0\left(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau}\right)\, f(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p} F\left(p+\frac{1}{p}\right); \quad (3.42)$$

$$2) \quad \int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\, f(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{F(\sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}}; \quad (3.43)$$

$$3) \quad \int_0^t I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\, f(\tau)\, d\tau \leftrightarrow F(p)\frac{F(\sqrt{p^2-1})}{\sqrt{p^2-1}}. \quad (3.44)$$

3.82. Доказать, что

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+a)} \leftrightarrow e^{\alpha a + a^2 t}\mathcal{E}rf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right), \quad \alpha \geq 0. \quad (3.45)$$

3.83. Найти оригиналы, которым соответствуют изображения (при $\alpha>0$):

$$1) \ \frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\alpha\sqrt{p}}; \quad 2) \ \frac{1}{p^2}e^{-\alpha\sqrt{p}}; \quad 3) \ e^{-\alpha\sqrt{p}};$$

$$4) \ \frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}; \quad 5) \ \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+a}; \quad 6) \ \frac{ae^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+a)}.$$

3.84. Доказать, что при $\rho>0$

$$\frac{K_0(\rho\sqrt{p})}{pK_0(\sqrt{p})} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\xi)Y_0(\rho\xi) - Y_0(\xi)J_0(\rho\xi)}{J_0^2(\xi)+Y_0^2(\xi)} \cdot \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi} d\xi, \quad (3.46)$$

$$\frac{K_0(\rho\sqrt{p})}{\sqrt{p}K_1(\sqrt{p})} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(\xi)Y_0(\rho\xi) - Y_1(\xi)J_0(\rho\xi)}{J_1^2(\xi)+Y_1^2(\xi)} \cdot e^{-\xi^2 t} d\xi. \quad (3.47)$$

3.85. Применяя теорему умножения (3.28), вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^t \sin\omega\tau \sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau; \quad 2)\ \int_0^t \tau^4 \cos\omega(t-\tau)\,d\tau;$$

$$3)\ \int_0^t J_1(\tau)J_1(t-\tau)\,d\tau; \quad 4)\ \int_0^t ch\tau I_0(t-\tau)\tau\,d\tau.$$

3.86. Используя предельную теорему

$$F(p) \leftrightarrow f(t) \Longrightarrow F(0) = \int_0^\infty f(t)dt,$$

доказать, что

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}dt = \frac{\pi}{2} sign\, k; \tag{3.48}$$

$$2)\ \int_0^\infty \frac{J_1(kt)}{t}dt = sign\, k.$$

3.87. Применяя равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(t)G(t)dt = \int_0^\infty F(p)g(p)dp,$$

где $f \leftrightarrow F$, $g \leftrightarrow G$, вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\alpha t}\right)^2}{t^2}dt, \quad \alpha > 0; \qquad 2)\ \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t^2}dt.$$

3.88. Показать, что

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{tx})\,dt = n!\,x^{\frac{\alpha}{2}}e^{-x}L_n^\alpha(x), \quad \alpha \geq 0, \;\; n \in N.$$

3.89. При $t>0$ решить задачи Коши:

$$1)\quad \begin{array}{l} u_t + a^2\lambda u = f(t), \\ u(0) = 0; \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{l} u_{tt} + a^2\lambda u = f(t), \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{array}$$

3.90. Пусть $u(t)$ — решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{array}{c} \sum_{m=0}^n a_m u^{(m)}(t) = f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0, \end{array} \tag{3.49}$$

а $v(t)$ — решение задачи (3.49) при $f(t)$=1. Применяя интеграл Дюамеля (3.29), показать, что

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)\,d\tau f(0)v(t) + \int_0^t v(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.50}$$

3.91. Решить задачу Коши

$$\begin{array}{c} u'' - a^2u(t) = A\,erf\,t, \quad t > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{array}$$

применяя формулу (3.50).

Пример 3.8. Конец полуограниченной линии ($0<x$) с параметрами R, C (L=G=0) подключается к батарее с Э.Д.С. E_0 через конденсатор C_0. Определить потенциал линии.

Потенциал $u(x,t)$ и ток $i(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} u_x + i\,R = 0, \\ i_x + u_t C = 0, \end{array} \quad 0 < x, \;\; 0 < t, \\ u(0,t) = E_0 - \frac{1}{C_0}\int_0^t i(0,\tau)\,d\tau, \quad u(x,0) = i(x,0) = 0. \end{array}$$

Для изображений $U(x,p) \leftrightarrow u(x,t)$, $I(x,p) \leftrightarrow i(x,t)$ получается задача

$$\begin{array}{l} U_x + IR = 0, \\ I_x + pCU = 0, \\ U(0,p) = \frac{E_0}{p} - \frac{1}{C_0}\frac{I(0,p)}{p}, \end{array} \quad 0 < x, \quad |U(x,p)| < \infty.$$

Из первого уравнения системы следует, что $RI(x,p) = -U_x(x,p)$, $RI(0,p) = -U_x(0,p)$. Подстановка этих выражений во второе уравнение системы и в граничное условие приводит к задаче для функции $U(x,p)$

$$\begin{array}{l} U_{xx} - pRCU = 0, \quad 0 < x, \\ U(0,p) - \frac{U_x(0,p)}{pRC_0} = \frac{E_0}{p}, \quad |U(x,p)| < \infty, \end{array}$$

решение которой

$$U(x,p) = \frac{E_0\, e^{-\sqrt{pRC}x}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p} + \frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C}{R}}\right)}.$$

Оригинал восстанавливается по формуле (3.45):

$$u(x,t) = E_0 e^{\frac{C\,x}{C_0} + \frac{C\,t}{R\,C_0^2}}\, \mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} + \frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C\,t}{R}}\right).$$

3.92. Решить задачу 2.293, где $0 < l \leq \infty$ (если $l = \infty$, то $|u(x,t)| < \infty$), применяя интегральное преобразование Лапласа.

3.93. В точке (x=0) неограниченной струны ($-\infty < x < \infty$), находящейся в покое, имеется шарик, масса которого M. На шарик действует пружинка, перпендикулярная к струне, с коэффициентом упругости k и сила трения, пропорциональная скорости шарика (коэффициент пропорциональности α задан). В момент t=0 шарик получает импульс $I\mathbf{e}_u$ в результате удара в точку x=0. Решить задачу о движении струны.

3.94. В точке (x=0) неограниченной струны ($-\infty<x<\infty$), находящейся в покое, имеется шарик, на который действует пружинка в направлении перпендикулярном к струне (коэффициент упругости пружинки k дан). С момента t=0 на шарик действует постоянная сила $F_0\mathbf{e}_u$. Решить задачу о движении струны, если масса шарика равна M.

3.95. В точке (x=0) неограниченной струны ($-\infty<x<\infty$) имеется шарик, к которому присоединена пружинка с коэффициентом упругости k. С момента времени t=0 свободный конец A пружинки движется по закону $\mu(t)$ вдоль оси $0u$ относительно своего начального положения. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях, если масса шарика равна M.

3.96. Определить потенциал и ток в полубесконечной линии ($0<x$) с параметрами L, C (R=G=0), конец которой подключается к батарее с э.д.с. E(t) через 1) сосредоточенное сопротивление R_0; 2) сосредоточенную индуктивность L_0; 3) конденсатор C_0. Рассмотреть случай постоянной э.д.с. E_0.

3.97. К концу линии ($0<x<\infty$) без искажения (RC=LG) подключается через сосредоточенное сопротивление R_0 батарея с э.д.с. $E(t)$. Найти ток и потенциал линии.

3.98. Найти потенциал полубесконечной линии ($0<x$) без искажения (LC=RG), конец которой заземляется через конденсатор C_0, заряженный до потенциала u_0.

3.99. Точечная масса m движется по оси $0x$ с постоянной скоростью $v_0\mathbf{e}_x$ и в момент времени t=0 в результате удара прилипает к свободному концу полуограниченного стержня ($0<x$). Решить задачу о движении этой механической системы, если до соударения стержень находился в статическом равновесии.

3.100. На конце полуограниченной трубки ($0<x$), заполненной идеальным газом, находится поршень, на который при движении

действует сила трения, пропорциональную скорости. В момент времени $t{=}0$ в результате продольного удара поршень приобретает скорость v_0 в положительном направлении оси $0x$. Определить в акустическом приближении отклонение $u(x,t)$ от положения равновесия тонкого слоя газа с начальной координатой x; масса поршня M, коэффициент трения α.

3.101. В сечении ($x{=}0$) бесконечного цилиндрического стержня ($-\infty{<}x{<}\infty$) с прямоугольным поперечным сечением (см. рис.1.11) имеется тонкая прокладка, масса которой m. В момент времени $t{=}0$ в результате поперечного удара в точку $x{=}0$ стержень получает импульс I. Найти закон движения прокладки.

3.102. Определить потенциал полубесконечной линии ($0{<}x$) с параметрами R, C ($L{=}G{=}0$), конец которой подключается к батарее с э.д.с. $E(t)$. Рассмотреть случай постоянной э.д.с. E_0.

3.103. К концу полуограниченной линии ($0{<}x$) через сосредоточенное сопротивление R_0 подключается батарея с постоянной э.д.с. E_0. Найти ток в линии, если ее параметры R, C ($L{=}G{=}0$).

3.104. К концу полубесконечной линии ($0{<}x$) в момент времени $t{=}0$ подключается батарея с э.д.с. $E(t){=}kt\,\eta(t-t_0)$, $t_0{>}0$. Найти ток через батарею, если параметры линии R, C ($L{=}G{=}0$).

3.105. К концу полуограниченной линии ($0{<}x$) без утечки подключается батарея с постоянной э.д.с. E_0. Найти ток через батарею.

3.106. Найти потенциал линии ($-\infty{<}x{<}\infty$), параметры которой $R{=}G{=}0$,

$$R(x)=\begin{cases} R_1, & x<0,\\ R_2, & 0<x,\end{cases}\qquad C(x)=\begin{cases} C_1, & x<0,\\ C_2, & 0<x,\end{cases}$$

если в момент времени $t{=}0$ потенциал и ток соответственно равны

$$\begin{cases} -u_0, & x<0,\\ u_0, & 0<x,\end{cases}\qquad i_0(x)=0.$$

3.107. Найти потенциал линии ($-\infty<x<\infty$), параметры которой L=G=0,

$$L(x)=\begin{cases} L_1, & x<0,\\ L_2, & 0<x,\end{cases}\qquad C(x)=\begin{cases} C_1, & x<0,\\ C_2, & 0<x,\end{cases}$$

если начальное распределение потенциала

$$\begin{cases} -u_0, & x<0,\\ u_0, & 0<x.\end{cases}$$

3.108. В полуограниченную трубку ($0<x$) через конец x=0 поступает поток частиц плотности q_0. Определить концентрацию частиц в процессе диффузии при нулевых начальных условиях.

3.109. Полуограниченный стержень ($0<x$) с теплоизолированной боковой поверхностью имеет постоянную температуру u_0. Какой плотности тепловой поток надо подавать на торец стержня, чтобы температура торца менялась со временем по закону $\mu(t)$?

3.110. Решить предыдущую задачу, если u_0=0, а температура торца меняется по закону 1) At^{β} $\beta\geq 0$; 2) $u_1e^{\alpha t}$, $\alpha\geq 0$.

3.111. Найти температуру стержня ($0<x$) с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0; начальная температура стержня равна нулю.

3.112. Через торец стержня ($0<x$) с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\theta(t)$. Какой должна быть функция $\theta(t)$, чтобы температура торца менялась со временем по заданноьу закону $\mu(t)$? Начальная температура стержня равна нулю. Рассмотреть случаи: 1) $\mu(t)$=At; 2) $\mu(t)$=$A\sqrt{t}$.

3.113. В тонкой неограниченной трубке ($-\infty<x<\infty$) с полупроницаемой перегородкой в сечении x=0 диффундирует газ. Решить задачу диффузии, если начальная концентрация газа равна u_1 при $x<0$, u_2 при $x>0$.

3.114. Найти температуру бесконечного стержня с теплоизолированной поверхностью, составленного из двух различных однородных стержней с параметрами ρ_i, k_i, C_i $(i{=}1,2)$, если их начальная температура равна u_1 и u_2 соответственно.

3.115. Часть $(x{>}0)$ поверхности бесконечного цилиндрического стержня $(-\infty{<}x{<}\infty)$ теплоизолирована, а через остальную поверхность происходит теплообмен со средой, температура которой u_0. Найти температуру сечения $x{=}0$ и плотность теплового потока через это сечение, если начальная температура стержня равна нулю.

3.116. Определение концентрации частиц в неоднородном слое (задачи 2.88, 2.89) основано на разных моделях граничных условий при $x{=}0$, которые обеспечивают правильное распределение частиц при $t \to \infty$. Для более полного исследования этих моделей необходимо проанализировать процесс диффузии при $t \to +0$. Выражения для концентрации, полученные методом Фурье, для этой цели мало пригодны из-за медленной сходимости рядов при малых t. Применяя интегральное преобразование Лапласа, показать, что при условиях задачи (2.88)

$$\lim_{t\to+0} u_i(0,t) = c_i \frac{u_1\sqrt{D_1} + u_2\sqrt{D_2}}{c_1\sqrt{D_1} + c_2\sqrt{D_2}}, \quad i = 1,2,$$

т.е. на границе $x{=}0$ в момент времени $t{=}0$ происходит скачок концентрации, а плотность потока в этот момент неограничена. Используя результаты, полученные при решении задачи 2.59, показать, что

$$\begin{array}{ll} u_i(0,t) \to u_i(0,\infty) + 0, & \gamma(\delta_1 - \delta_2) > 0, \\ u_i(0,t) \to u_i(0,\infty) - 0, & \gamma(\delta_1 - \delta_2){<}0, \end{array} \tag{3.51}$$

где $\gamma{=}\frac{u_2}{c_2} - \frac{u_1}{c_1}$, $\delta_i{=}\frac{l_i}{\sqrt{D_i}}$, $i{=}1,2$.

3.117. Показать, что при условиях задачи 2.89 концентрация частиц и плотность потока на границе $x{=}0$ имеют при $t \to +0$ вид

$$u_{1,2}(0,t) = u_{1,2} \pm \frac{4\varkappa\gamma}{\sqrt{\pi D_{1,2}}}\sqrt{t} + o(\sqrt{t}),$$
$$q(0,t) = \varkappa\gamma\left(1 + \frac{4\varkappa}{\sqrt{\pi}}\frac{c_2\sqrt{D_2} - c_1\sqrt{D_1}}{c_1c_2\sqrt{D_1D_2}}\sqrt{t}\right) + o(\sqrt{t}),$$

т.е. при $t{=}0$ концентрация непрерывна на границе, а плотность потока имеет конечное значение. Будут ли в данном случае выполняться соотношения (3.51)?

3.118. Полуограниченный стержень $(0{<}x)$ с теплоизолированной боковой поверхностью, составленный из двух однородных стержней — конечного $(0{<}x{<}l)$, физические характеристики которого k_1, ρ_1, C_1, и полубесконечного $(l{<}x)$ с характеристиками r_2, ρ_2, C_2 имеет нулевую температуру. Определить температуру полубесконечного стержня $(l{<}x)$, если торец $x{=}0$, начиная с момента времени $t{=}0$, поддерживается при температуре u_0.

3.119. На струну $(0{<}x{<}l)$ с закрепленными концами действует сила, линейная плотность которой $f_0 \sin\frac{3\pi x}{l}\mathbf{e}_u$. Решить при нулевых начальных условиях задачу о колебаниях 1) однородной струны; 2) струны с шариком, масса которого M, в точке $x = l/3$.

3.120. В стержне $(0{<}x{<}l)$, торец $x{=}0$ и боковая поверхность которого теплоизолированы, а торец $x{=}l$ поддерживается при температуре 0^o, действуют тепловые источники, мощность которых в единице объема $f_0 \cos\frac{\pi x}{l}e^{-\varkappa t}$, $\varkappa{>}0$. Решить при нулевых начальных условиях задачу теплопроводности, если 1) стежень однороден; 2) в сечении с координатой $x{=}l/2$ имеется сосредоточенная теплоемкость C_0.

3.121. Недеформированный упругий стержень $(0{<}x{<}l)$ выводится из состояния статического равновесия постоянной силой $F_0\mathbf{e}_x$, приложенной к свободному торцу $x{=}l$ с момента времени $t = 0$. Найти закон движения торца $x{=}0$, если на него действует сила

трения, пропорциональная скорости. При каком условии отсутствует отраженная волна? Как движется торец $x{=}0$ в этом случае?

3.122. Найти форму поверхности жидкости в канале (см. задачу 1.233), если начальное отклонение имеет форму тонкого вертикального слоя (вдоль оси $0y$), возвышающегося над горизонтальной поверхностью (объем жидкости на единицу длины слоя равен Q), а начальные скорости равны нулю. Дать приближенное решение при условии $x^2/t \gg 1$.

3.123. Жидкость в канале (см. задачу 1.233) возбуждается в результате мгновенного изменения давления на узкой полоске, расположенной вдоль оси $0y$ на поверхности жидкости. определить форму поверхности, если начальные отклонения равны нулю, а импульс давления равен I. Получить приближенное решение при условии $x^2/t \gg 1$.

3.124. В начальный момент времени поверхность жидкости в канале (см. задачу 1.233) имеет форму

$$\zeta(x,0) = \frac{Q}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},$$

а начальные скорости равны нулю. Исследовать движение жидкости в сечении $x{=}0$.

3.125. Боковая поверхность и торец $x{=}l$ стержня ($0{<}x{<}l$) теплоизолированы, а через торец $x{=}0$ поступает тепловой поток постоянной плотности $q_0\mathbf{e}_x$. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура стержня равна нулю.

3.126. Боковая поверхность и торец $x{=}l$ стержня ($0{<}x{<}l$) теплоизолированы, а через торец $x{=}0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура стержня равна нулю.

3.127. Решить задачу теплопроводности для стержня ($0<x<l$) с теплоизолированной боковой поверхностью, торцы $x=0$ и $x=l$ которого поддерживаются при температуре 0^o и u_0 соответственно. Получить ответ в двух формах: 1) в виде ряда, который сходится тем быстрее, чем больше t, либо 2) в виде ряда, который сходится тем быстрее, чем меньше t.

3.128. Торец $x=0$ однородного стержня ($0<x<l$) закреплен, а торец $x=l$ с сосредоточенной массой M свободен. С момента времени $t=0$ на свободный торец действует постоянная сила $F_0\mathbf{e}_x$. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

3.129. Торец $x=0$ упругого стержня ($0<x<l$) закреплен, а другой свободен. В момент времени $t=0$ происходит удар в торец $x=l$ тела, масса которого M, движущегося вдоль оси $0x$ в отрицательном направлении. Показать, что время соударения $\tau>\frac{2l}{a}$. При каких $\mu = \frac{m}{M}$, где m — масса стержня, значение $\tau\in(\frac{2l}{a}, \frac{4l}{a})$? Каково это значение?

3.130. Решить предыдущую задачу для стержня со свободным торцом $x=0$, находящегося на гладкой горизонтальной поверхности.

3.131. Два упругих стержня, отличающиеся только длинами l_1 и l_2, расположены на оси $0x$ и движутся вдоль нее с различными скоростями. В момент времени $t=0$ стержни сталкиваются. Определить время τ, в течение которого происходит соударение.

3.132. Два упругих стержня одинаковой формы (длина каждого l) с физическими характеристиками ρ_1, E_1 и ρ_2, E_2 расположены на оси $0x$ и движутся вдоль нее с различными скоростями. В момент времени $t=0$ стержни сталкиваются. Определить время τ, в течение которого происходит соударение.

3.133. Стержень, длина которого l, расположенный на оси $0x$, движется вдоль нее и в момент времени $t{=}0$ сталкивается с неподвижным полуограниченным стержнем $(0 < x)$. Определить время τ, в течение которого длится соударение, если физические характеристиками первого стержня ρ_1, E_1, второго — ρ_2, E_2, а их поперечные сечения одинаковы.

3.134. Замедлитель с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) занимает полупространство ($z{>}0$) и граничит с вакуумом ($z{<}0$). В точке с координатами $x{=}y{=}0$, $z{=}z_0{>}0$ действует изотропный источник, испускающий Q_0 быстрых нейтронов в единицу времени с летаргией $u{=}0$. Определить плотность замедления нейтронов при условии, что они из вакуума не возвращаются.

3.135. Шар, радиус которого r_0, помещен в однородную неограниченную среду с начальной температурой u_1. Найти распределение температуры в среде, если шар поддерживается при постоянной температуре u_0.

3.136. В пространстве, температура которого 0^o, имеется сферическая полость, радиус которой r_0. С момента $t{=}0$ через сферическую поверхность $r{=}r_0$ во внешнее пространство поступает радиальный тепловой поток плотности $q(t)$. При какой плотности потока температура сферической поверхности будет меняться со временем по закону $\mu(t)$? Рассмотреть случаи: 1) $\mu(t){=}At$; 2) $\mu(t){=}A\sqrt{t}$.

3.137. В однородной неограниченной среде имеется сферическая полость, радиус которой r_0; температура полости $\theta(t)$, начальная температура внешней среды равна нулю. На сферической поверхности $r{=}r_0$ происходит теплообмен по закону Ньютона. Известно, что температура этой поверхности $\mu(t)$. Определить температуру $\theta(t)$ полости. Рассмотреть частные случаи: 1) $\mu(t){=}At$; 2) $\mu(t){=}A\sqrt{t}$.

3.138. Шар, радиус которого r_0, находится в среде с характеристиками ρ, C, k. Через поверхность шара происходит теплообмен по закону Ньютона. Начальная температура среды равна нулю, температура шара — заданная функция времени $u_0(t)$. Какое количество тепла теряет шар в единицу времени? Рассмотреть частный случай $u_0(t)=u_0$.

3.139. В однородной неограниченной среде с коэффициентом диффузии D находится шар с полупроницаемой поверхностью, радиус которого r_0. Начальная концентрация нейтронов во внешней среде равна нулю, их концентрация в шаре при любом $t>0$ постоянна и равна u_0. Найти поток нейтронов через поверхность шара, если диффузия во внешней среде сопровождается поглощением нейтронов, пропорциональным их концентрации (коэффициент пропорциональности α задан).

3.140. В однородной неограниченной среде с характеристиками ρ, C, k, находится шар с характеристиками ρ_0, C_0, k_0,, радиус которого r_0; теплопроводность шара много больше теплопроволности среды, начальная температура шара и среды равна нулю. При условии $4\rho_0 C_0 \le 3\rho C$ решить задачу об остывании шара после мгновенного выделения в нем равномерно распределенного по объему количества тепла Q; получить асимптотическое представление температуры шара при $t\to\infty$.

3.141. Найти температуру, обусловленную камуфлетным ядерным взрывом в однородном изотропном массиве (см. задачу 1.141), если начальная температура массива u_1, газовой полости u_0, источники тепла в полости отсутствуют.

3.142. Решить предыдущую задачу при условии, что с момента $t=0$ в полости действуют источники, мощность которых в единице объема 1) q_0; 2) $b/\sqrt{t}$.

3.143. Найти температуру полости (см. задачу 3.141), если с момента $t=0$ в ней действуют источники тепла, мощность которых в единице объема $q_0\, exp(\beta t)$, $\beta>0$.

3.144. В бесконечном однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c \ll \sigma_s$) находится шар, радиус которого r_0, и в котором в результате деления рождается (равномерно по объему) Q_0 быстрых нейтронов в единицу времени с летаргией $u=0$. Найти плотность замедления нейтронов.

3.145. Найти установившийся ток в линии ($0 < x$) с параметрами L, G (R=C=0), подключенной к батарее с э.д.с. $E_0 \sin \omega t$.

3.146. Линия ($0<x$) с параметрами $L, G (R=C=0)$ подключается к батарее с э.д.с. $E_0 \sin \omega t$ через сосредоточенную индуктивность L_0. Найти установившийся ток через батарею.

3.147. Найти установившийся ток в полуограниченной линии ($0<x$) с параметрами $R, C (L=G=0)$, к концу которой подключена батарея с э.д.с. $E_0 \sin \omega t$.

3.148. Линия ($0<x$) с параметрами $R, C (L=G=0)$ подключается к батарее с э.д.с. $E_0 \sin \omega t$ через конденсатор C_0. Найти установившийся ток через батарею.

3.149. Найти установившуюся температуру в полубесконечном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, конец которого имеет температуру $u_0 \sin \omega t$.

3.150. Основания круглой шайбы, радиус которой r_0, теплоизолированы, а боковая поверхность поддерживается при температуре u_0. Определить температуру шайбы в момент времени $t>0$, если при $t=0$ она имела нулевую температуру.

3.151. Решить предыдущую задачу при условии, что на боковой поверхности шайбы происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_0.

3.152. В полуограниченную трубу ($r<r_0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0<z$) втекает вязкая несжимаемая жидкость, скорость которой в сечении $z=0$ постоянна и равна $u_0 \mathbf{e}_z$. При условиях задачи 1.248 найти скорость жидкости, если ее течение стационарно.

3.153. В неограниченной среде имеется цилиндрический канал, радиус которого r_0. В момент времени $t{=}0$ в канал вводится длинный радиоактивный стержень. Определить концентрацию нейтронов в среде в процессе диффузии, если их начальная концентрация равна нулю, а концентрация на поверхности канала $u_0(t)$. Рассмотреть случай $u_0(t) \equiv u_0$.

3.154. Решить предыдущую задачу для канала с полупроницаемой поверхностью, если радиус стержня равен радиусу канала, а концентрация нейтронов в стержне постоянна и равна u_0.

3.155. Бесконечный цилиндрический стержень, радиус которого r_0, находится в неограниченной среде. Теплоемкость единицы длины стержня C_0, его теплопроводность много больше теплопроводности среды. Найти температуру стержня, если его начальная температура u_0, а температура среды при любом t равна нулю.

3.156. В однородной неограниченной пластине с теплоизолированными гранями имеется цилиндрический канал, радиус которого r_0. Определить температуру пластины при $t{>}0$, если ее начальная температура равна нулю, а поверхность канала поддерживается при постоянной температуре u_0.

3.157. В неограниченной пластине, толщина которой l, просверлен цилиндрический канал, радиус которого r_0. Пластина имеет нулевую температуру. С момента $t{=}0$ на поверхность канала подается радиальный тепловой поток плотности q_0. Найти распределение температуры в пластине, если ее грани поддерживаются при нулевой температуре.

3.158. Недеформированный упругий стержень ($0{<}x{<}l$), торец $x{=}0$ которого закреплен посредством пружинки с коэффициентом жесткости k, выводится из состояния статического равновесия постоянной силой $F_0\mathbf{e}_x$, приложенной к свободному торцу

$x{=}l$. Показать, что скорость торца $x{=}0$

$$v(0,t) = \frac{2aF_0}{ES}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ah(t-t_n)} L_n(2ah(t-t_n))\eta(t{-}t_n),$$

где $h{=}\frac{k}{ES}$, $t_n{=}\frac{l}{a}(2n+1)$, $L_n(x)$ — многочлен Чебышева-Лагерра.

3.3. Преобразование Меллина

Пример 3.9. Пусть функция $f(r)$ определена на $(0,\infty)$ и является кусочно-гладкой на каждом конечном промежутке $(0, r_0)$. Если существуют такие вещественные числа $\sigma_1{<}\sigma_2$, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |f|\, r^{\sigma-1} dr < \infty, \quad \sigma > \sigma_1, \\ &\int_1^\infty |f|\, r^{\sigma-1} dr < \infty, \quad \sigma < \sigma_2, \end{aligned} \tag{3.52}$$

то интеграл

$$\mathcal{M}[\,f\,](p) = \int_0^\infty f(r)\, r^{p-1} dr, \quad p = \sigma + i\,\lambda, \tag{3.53}$$

называемый преобразованием Меллина функции $f(r)$, сходится в полосе $(\sigma_1{<}\mathbf{Re}\, p{<}\sigma_2)$ и представляет собой аналитическую функцию в этой полосе. Прообраз $f(r)$ выражается через образ $\mathcal{M}[\,f\,](p)$ посредством обратного преобразования

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\,\infty}^{\sigma+i\,\infty} \mathcal{M}[\,f\,](p)\, r^{-p} dp, \quad \sigma_1 < \mathbf{Re}\, p = \sigma < \sigma_2. \tag{3.54}$$

Соответствие $f(r) \leftrightarrow \mathcal{M}[\,f\,](p)$ является взаимно однозначным.

Функция

$$f(r) = \frac{r\, r_0 \sin\varphi_0}{r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\varphi_0}$$

при $\sigma_1{=}{-}1,\ \sigma_2{=}1$ удовлетворяет условиям (3.52), поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\,f\,](p) &= r_0 \sin\varphi_0 \int\limits_0^\infty \frac{r^p dr}{r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\varphi_0} = \\ &= r_0^p \sin\varphi_0 \int\limits_0^\infty \frac{\xi^p d\xi}{1 + \xi^2 - 2\xi\cos\varphi_0} = r_0^p \sin\varphi_0\, I.\end{aligned}$$

Вычисление интеграла I на комплексной плоскости $\zeta{=}\xi{+}i\,\eta$ осуществляется с помощью замкнутого контура, составленного из двух концентрических окружностей $|\zeta| = \rho,\ |z| = R$ и двух берегов разреза по отрезку $[\,\rho,\, R\,]$ вещественной оси. По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_r^R + \int\limits_{R\,e^{2\pi i}}^{r\,e^{2\pi i}} + \int\limits_{C_R} + \int\limits_{C_r} 2\pi i \sum_{k=1}^{2} res\left(\frac{\zeta^p}{1 + \zeta^2 - 2\zeta\cos\varphi_0}\right)\Big|_{\zeta=\zeta_k},$$

где $\zeta_{1,2}{=}exp(\pm i\,\varphi_0)$ — простые полюсы подынтегральной функции. Так как $-1 {<} \mathbf{Re}\, p {<} 1$, то интегралы по окружностям C_r и C_R стремятся к нулю при $r \to 0$ и $R \to \infty$ соответственно, поэтому

$$I\left(1 - e^{2\pi i p}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{ip\varphi_0}}{2i\sin\varphi_0} + \frac{e^{ip(2\pi - \varphi_0)}}{-2i\sin\varphi_0}\right),$$

откуда

$$I = \frac{\pi \sin p(\pi - \varphi_0)}{\sin\varphi_0 \sin\pi p}.$$

Таким образом, при $-1 {<} \mathbf{Re}\, p {<} 1,\ \ 0{<}\varphi_0{<}2\pi$

$$\frac{r\, r_0 \sin\varphi_0}{r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0\cos\varphi_0} \leftrightarrow \frac{\pi r_0^p \sin p(\pi - \varphi_0)}{\sin\pi p}. \tag{3.55}$$

3.159. Установить соответствие:

$$\frac{r_0^2 \sin\varphi_0}{r^2 + r_0^2 + 2r\, r_0\cos\varphi_0} \leftrightarrow \frac{\pi r_0^p \sin(1-p)\varphi_0}{\sin\pi p}, \tag{3.56}$$

где $-\pi{<}\varphi_0{<}\pi,\ \ 0{<}\mathbf{Re}\, p{<}2$.

3.160. Найти $\mathcal{M}[\,f\,](p)$, если 1) $f(r)=\frac{1}{1+r^2}$ 2) $f(r)=\frac{r}{1+r^2}$.

3.161. Доказать, что

1) $f(ar) \leftrightarrow a^{-p}\mathcal{M}[\,f\,](p)$, $a>0$; 2) $r^{\alpha}f(r) \leftrightarrow \mathcal{M}[\,f\,](p+\alpha)$;
3) $f(r^{\beta}) \leftrightarrow \dfrac{1}{\beta}\mathcal{M}[\,f\,]\Big(\dfrac{p}{\beta}\Big)$.

3.162. Найти преобразования Меллина следующих функций:

1) $r^{\alpha}\eta(r_0-r)$; 2) $r^{\alpha}\eta(r-r_0)$; 3) $\dfrac{r^{\alpha}}{1+r}$,
4) e^{-ar}; 5) $\sin ar$; 6). $\cos ar$,

где $r_0>0$, $a>0$.

3.163. Найти $\mathcal{M}[\,f\,](p)$, если

1) $f(r)=\ln|r+1|$; 2) $f(r)=\ln|r-1|$; 3) $f(r)=\ln\frac{\sqrt{r}+1}{|\sqrt{r}-1|}$.

3.164. Установить соответствие

$$r\frac{d}{dr}r\frac{df}{dr} \leftrightarrow r^p(rf'-pf)|_0^{\infty}+p^2\mathcal{M}[\,f\,](p). \tag{3.57}$$

3.165. Доказать теорему умножения

$$\int\limits_0^{\infty} f(\rho)g\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho} \leftrightarrow \mathcal{M}[\,f\,](p)\,\mathcal{M}[\,g\,](p). \tag{3.58}$$

3.166. Известно, что $\mathcal{M}[\,u\,](p)=U(p)$; найти преобразования Меллина следующих функций:

1) $\int\limits_0^{\infty}\frac{ru(\rho)\,d\rho}{r^2+\rho^2}$; 2) $\int\limits_0^{\infty}\ln\frac{\sqrt{r}+\sqrt{\rho}}{\sqrt{r}-\sqrt{\rho}}\frac{u(\rho)}{\rho}\,d\rho$.

3.167. Известно, что функция $\mathcal{M}[\,f\,](p) = F(p)$ аналитична в полосе $\sigma_1 < \mathbf{Re}\, p < \sigma_2$, а функция $\mathcal{M}[\,u\,](p) = U(p)$ — в полосе $1 - \sigma_2 < \mathbf{Re}\, p < 1 - \sigma_1$; показать, что

$$\int\limits_0^\infty f(xy)u(y)\,dy \leftrightarrow F(p)U(1-p). \tag{3.59}$$

3.168. Известно, что $\mathcal{M}[\,u\,](p) = U(p)$; найти преобразования Меллина следующих функций:

1) $\int\limits_0^\infty e^{-r\rho}u(\rho)\,d\rho$; 2) $\int\limits_0^\infty \ln|r\rho - 1|u(\rho)\,d\rho$;

3) $\int\limits_0^\infty \cos(r\rho)\,u(\rho)\,d\rho$; 4) $\int\limits_0^\infty \rho\sin(r\rho)\,u(\rho)\,d\rho$.

3.169. Пусть существует $\mathcal{M}[\,f\,](p)$; показать, что $\mathcal{M}[\,f\,](p)$ определяет регулярную обобщенную функцию в $\mathbf{Z}'_+$ (см. задачи 10.69, 10.70), при этом

$$(\mathcal{M}[\,f\,](p), \psi(p)) = \big(f(r), (r^{p-1}, \psi(p)\big)\,, \quad \psi(p) \in \mathbf{Z}'_+. \tag{3.60}$$

3.170. Пусть $f \in \mathcal{D}'_+$. Преобразованием Меллина функции f называется функционал, действующий по правилу (3.60) (см.[9]). Показать, что

1) $\mathcal{M}[\,D^k\delta(r - r_0)\,](p) = (-1)^k \frac{\Gamma(p-1)}{\Gamma(p-k)} r_0^{p-k-1}$, $r_0 > 0$;

2) $\mathcal{M}[(\ln r)^k f(r)\,](p) = D^k \mathcal{M}[\,f\,](p)$.

3.171. Найти $\mathcal{M}[\,f\,](p)$, если 1) $f(r) = \ln\frac{1}{r}\,\eta(r-1)$;

2) $f(r) = \ln^2\frac{1}{r}\,\eta(1-r)$; 3) $f(r) = \int\limits_0^\infty \ln\frac{r}{\rho}\frac{u(\rho)}{\rho}\,d\rho$, $\mathcal{M}[\,u\,](p) = U(p)$.

3.172. Найти $f(r)$, для следующих $\mathcal{M}[\,f\,](p)$:

1) $\frac{\pi}{\sin\pi p}$, $-2 < \mathbf{Re}p < -1$; 2) $\frac{\pi}{\cos\pi p}$, $-\frac{1}{2} < \mathbf{Re}p < \frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{p^n}$, $\mathbf{Re}p > 0$; 4) $\frac{\pi ctg\,\pi p}{p+1}$, $0 < \mathbf{Re}p < 1$;

5) $p\,(2p+1)\,\Gamma(p)$, $\mathbf{Re}p > 0$; 6) $\frac{\pi}{p\sin\frac{\pi p}{2}}$, $-2 < \mathbf{Re}p < 0$.

Пример 3.10. Найти стационарное распределение температуры в двугранном угле ($0<\varphi<\alpha<2\pi$), грань $\varphi=\alpha$ которого поддерживается при нулевой температуре, а температура грани $\varphi=0$ равна $u_0\eta(r-r_0)$.

Решение задачи

$$r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\quad 0<r,\ 0<\varphi<\alpha,$$
$$u(r,0)=u_0\eta(r-r_0),\quad u(r,\alpha)=0$$

посредством преобразования Меллина возможно, если выполняются условия (3.52). Для их проверки надо оценить поведение функции $u(r,\varphi)$ при $r\to 0$ и $r\to\infty$. Необходимые оценки вытекают из представления решения в форме рядов

$$u(r,\varphi)=\sin\tfrac{\pi\varphi}{\alpha}\,r^{\frac{\pi}{\alpha}}+\sin\tfrac{2\pi\varphi}{\alpha}\,r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+\ldots,\quad r\to 0,$$
$$u(r,\varphi)=u_0\left(1-\tfrac{\varphi}{\alpha}\right)+\sin\tfrac{\pi\varphi}{\alpha}\,r^{-\frac{\pi}{\alpha}}+\ldots,\quad r\to\infty,$$

которые получаются методом Фурье. Если $\sigma_1=-\frac{\pi}{\alpha}$, $\sigma_2=0$, то условия (3.52) для функции $u(r,\varphi)$ выполняются, при этом подстановка в (3.57) обращается в нуль. Переход к $\mathcal{M}[\,u\,]\equiv U$ определяет задачу

$$U_{\varphi\varphi}+p^2U=0,\ \ 0<\varphi<\alpha,$$
$$U(p,0)=-u_0\tfrac{r_0^p}{p},\ \ U(p,\alpha)=0.$$

Общее решение уравнения $U(p,\varphi)=A\cos p(\alpha-\varphi)+B\sin p(\alpha-\varphi)$ удовлетворяет граничному условию при $\varphi=\alpha$, если $A=0$, а из граничного условия при $\varphi=0$ следует $A=-\frac{u_0r_0^p}{p\sin p\alpha}$. Таким образом, решение задачи

$$U(p,\varphi)=-u_0\frac{r_0^p}{p}\frac{\sin p(\alpha-\varphi)}{\sin p\alpha},\quad -\frac{\pi}{\alpha}<\mathbf{Re}\,p<0.$$

По формуле обращения

$$u(r,\varphi)=-\frac{u_0}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\,\infty}^{\sigma+i\,\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^p\frac{\sin p(\alpha-\varphi)}{p\sin p\alpha}dp,\quad -\frac{\pi}{\alpha}<\sigma<0.$$

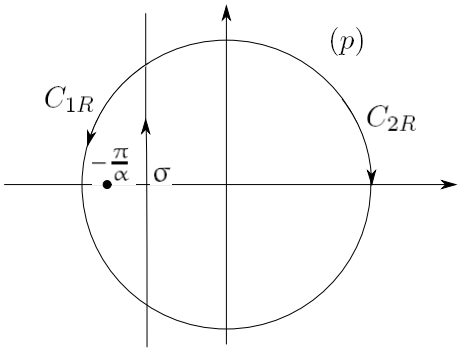

Рис. 3.2

Особыми точками функции $U(p,\varphi)$ являются простые полюсы $p_n = \frac{\pi n}{\alpha}$, $n \in \mathbf{Z}$. Если $r<r_0$, то для вычисления интеграла следует взять замкнутый контур(3.2), включающий дугу C_{1R} и применить теорему Коши о вычетах. При $R \to \infty$ интеграл по дуге C_{1R} стремится к нулю (по лемме Жордана) и

$$
\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= -u_0 \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{\frac{\pi n}{\alpha} \ln \frac{r_0}{r}} \frac{\sin \frac{\pi n}{\alpha}(\alpha-\varphi)}{\pi n \cos \pi n} = \\
&= u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \frac{\sin \frac{\pi n}{\alpha}\varphi}{\pi n} = \frac{u_0}{\pi} \mathbf{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{r}{r_0} e^{i\,\varphi}\right)^{\frac{\pi}{n}}\right]^n = \\
&= \frac{u_0}{\pi} \mathbf{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \frac{u_0}{\pi} \mathbf{Im} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \frac{u_0}{\pi} \mathbf{Im} \int_0^t \frac{dt}{1-t} = \\
&= -\frac{u_0}{\pi} \mathbf{Im} \ln \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha} - i \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right) = \\
&= \frac{u_0}{\pi}\, arrcctg\, \frac{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Такой же результат получается при $r>r_0$; в этом случае нужно интегрировать по замкнутому контуру, содержащему дугу C_{2R} и отрезок L_R; вычисление интеграла осуществляется точно также, как и в предыдущем случае. Впрочем, эту выкладку можно опустить, если заметить, что найденное решение удовлетворяет условиям задачи и при $r\geq r_0$.

3.173. Найти стационарное распределение температуры внутри клина ($0<\varphi<\alpha$), грань $\varphi = 0$ которого имеет нулевую температуру, а грань $\varphi=\alpha$ — температуру $u_0\eta(r_0-r)$.

3.174. Найти стационарную температуру клина ($-\alpha<\varphi<\alpha$), где $0<\alpha<\pi$, если температура граней $u(r,\pm\alpha)=\eta(r_0-r)$.

3.175. Грань $\varphi=\alpha$ однородного клина ($0<\varphi<\alpha$) теплоизолирована, а грань $\varphi=0$ поддерживается при температуре $u_0\eta(r-r_0)$. Найти стационарную температуру клина.

3.176. Полуплоскость ($0<r$, $\varphi=\pi$) поддерживается при температуре $u_0\eta(r_0-r)$. Найти стационарное распределение температуры в пространстве.

3.177. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве $y>0$, часть границы ($x<0$) которого теплоизолирована, а другая часть ($x>0$) имеет температуру $u_0\eta(r-r_0)$.

3.178. Методом преобразования Меллина решить задачу Дирихле для полуплоскости (см. пример 3.2).

3.179. Найти стационарную температуру полупространства $y>0$, если на границе задан следующий тепловой режим: часть ($x<0$) границы поддерживается при нулевой температуре, через полосу ($0<x<l$) поступает тепловой поток плотности $q_0\mathbf{e}_y$, а остальная часть ($x>l$) теплоизолирована.

3.180. Грань $y=0$ двугранного угла ($0<x, 0<y$) поддерживается при нулевой температуре, а грань $x=0$ теплоизолирована, кроме

полосы ($0<y<l$), через которую извне поступает тепловой поток плотности q_0, Внутри угла устанавливается стационарный тепловой режим. Какова температура грани $x=0$?

3.181. Внутрь клина ($0<\varphi<\frac{\pi}{4}$) через грань $\varphi=0$ поступает тепловой поток плотности $q_0\eta(r_0-r)$ столь долго, что в клине устанавливается стационарный тепловой режим. Найти плотность потока через грань $\varphi=\frac{\pi}{4}$, если ее температура постоянна.

3.182. Внутри двугранного угла ($0<\varphi<\alpha$) параллельно ребру расположен проводник с током, координаты которого (r_0, φ_0); с единицы длины проводника выделяется тепловая мощность q_0. Найти стационарное распределение температуры внутри угла, если его грани поддерживаются при нулевой температуре.

3.183. Грань $\varphi=0$ клина ($0<\varphi<\alpha$) имеет нулевую температуру, а грань $\varphi=\alpha$ теплоизолирована, кроме линии, параллельной ребру и отстоящей от него на расстоянии l, через которую извне поступает тепловой поток линейной плотности q_0. Найти стационарное распределение температуры в клине.

3.184. Внутри двугранного угла ($0<\varphi<\alpha$) параллельно ребру расположен линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность которого на единицу длины равна q_0, координаты $(r_0,\ \varphi_0)$. Определить потенциал скоростей жидкости.

3.185. Бесконечная нить расположена параллельно краю проводящей заземленной полуплоскости ($0<x,\ y=0$). Координаты нити $(r_0,\ \varphi_0)$, заряд единицы длины q. Найти электростатический потенциал этой системы.

3.186. Параллельно ребру двугранного угла ($0<\varphi<\alpha$) с проводящими заземленными гранями расположена нить, заряд единицы длины которой q, координаты $(r=r_0,\ \varphi=\alpha/2)$. Определить плотность заряда на гранях угла.

3.187. Параллельно ребру двугранного угла ($-\alpha<\varphi<\alpha$), образованного проводящими заземленными полуплоскостями, расположена нить, координаты которой ($r = r_0$, $\varphi = 0$), дипольный момент единицы длины $\mathbf{p}$. Определить плотность заряда на гранях угла, если $\mathbf{p} = p\,\mathbf{e}_x$.

3.188. Решить предыдущую задачу, если линейная плотность дипольного момента нити $\mathbf{p} = p\,\mathbf{e}_y$.

3.189. В массивном теле из железа с бесконечно большой магнитной проницаемостью имеется полость в форме двугранного угла ($0<r$, $0<\varphi<\alpha$). Внутри угла параллельно ребру расположен прямой ток J, координаты которого $r=r_0$, $\varphi=\alpha$. Определить магнитное поле в полости.

3.4. Преобразование Ганкеля

Пример 3.11. Если $f(r)$, $r\in(0,\infty)$ — кусочно-гладкая функция на каждом конечном промежутке $(0, r_0)$ и абсолютно интегрируема с весом $\sqrt{r}$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|\sqrt{r}dr < \infty,$$

то существует интеграл

$$\mathcal{H}_\nu[\,f\,](\lambda) = \int\limits_0^\infty f(r)J_\nu(\lambda r)r dr, \;\; \nu \geq -\frac{1}{2}, \tag{3.61}$$

называемый преобразованием Ганкеля функции $f(r)$; прообраз $f(r)$ выражается через $\mathcal{H}[\,f\,](\lambda)$ посредством обратного преобразования

$$f(r) = \int\limits_0^\infty \mathcal{H}_\nu[\,f\,](\lambda)J_\nu(\lambda r)\lambda d\,\lambda. \tag{3.62}$$

Функция

$$f(r)=\frac{e^{-x\sqrt{r^2-k^2}}}{\sqrt{r^2-k^2}},\ x>0,\ \ k>0,\ \ \arg\sqrt{r^2-k^2}=\frac{\pi}{2}\eta(k-r)$$

удовлетворяет условиям существования интегрального преобразования Ганкеля Для его построения можно исходить из интеграла (3.34), который после введения параметров $x>0$, $r>0$, $k\geq 0$ по формулам $xr=\tau$, $pr=i\,k$ и переменной λ по формуле $t=r\sqrt{x^2+\lambda^2}$ принимает вид:

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{e^{-ik\sqrt{\lambda^2+x^2}}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}}\lambda\,d\lambda\ =\ \frac{e^{-x\sqrt{r^2-k^2}}}{\sqrt{r^2-k^2}}.$$

Полученное равенство, трактуемое как обратное преобразование (3.62) функции $f(r)$, трансформируется посредством формулы (3.61) в

$$\mathcal{H}_\nu[\,f\,](\lambda)\equiv\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{e^{-x\sqrt{r^2-k^2}}}{\sqrt{r^2-k^2}}r\,dr=\frac{e^{-ik\sqrt{\lambda^2+x^2}}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}},\qquad(3.63)$$

где $x>0$, $k>0$, $\arg\sqrt{r^2-k^2}=\frac{\pi}{2}\eta(k-r)$. Это соотношение называется формулой Зоммерфельда.

3.190. Доказать, что

$$\mathcal{H}_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{df}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}f\right](\lambda)=$$
$$=r\,(f'J_\nu-fJ'_\nu)\big|_0^\infty-\lambda^2\mathcal{H}_\nu[\,f\,](\lambda).\quad(3.64)$$

3.191. Доказать, что

$$1)\ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\sin k\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}}rdr=\frac{\cos\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\eta(r-\lambda);\qquad(3.65)$$

$$2)\ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\sin k\sqrt{r^2-1}}{\sqrt{r^2-1}}rdr=\frac{ch\,\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\eta(k-\lambda),\qquad(3.66)$$

где $k>0$, $\arg\sqrt{r^2-1}=\frac{\pi}{2}\eta(1-r)$.

3.192. Найти преобразование $\mathcal{H}_0[\,f\,](\lambda)$, если

$$f(r)=\frac{r_0}{(r_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.\quad r_0>0.$$

3.193. Найти функцию $\mathcal{H}_1[\,f\,](\lambda)$, где

$$f(r)=\frac{r}{(r_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.\quad r_0>0.$$

3.194. Определить функцию $\mathcal{H}_0[\,f\,](\lambda)$, где

$$1)\ f(r)=\frac{1}{r}e^{-\alpha r^2};\qquad 2)\ f(r)=e^{-\alpha r^2},\quad \alpha>0.$$

3.195. Определить $f(r)$, если

$$\mathcal{H}_0[\,f\,](\lambda)=J_0(\lambda r)\,e^{-a^2\lambda^2 t},\quad r\geq 0,\quad t>0.$$

3.196. Найти преобразования Ганкеля следующих функций:

$$1)\ \frac{\sin kr}{r};\ 2)\ \frac{\cos kr}{r};\ 3)\ \frac{\sin kr}{r^2},\quad k>0.$$

3.197. Функция $f(r)$ удовлетворяет условиям существования преобразования Ганкеля; доказать, что для $\varphi(\lambda)\in\mathcal{D}_+$

$$(\mathcal{H}_n[\,f\,](\lambda),\varphi(\lambda))=\left(f(r),r\mathcal{H}_n\left[\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda}\right](r)\right),\quad n\in\mathbf{N}_0. \qquad (3.67)$$

3.198. Преобразованием Ганкеля $\mathcal{H}[\,f\,](\lambda)$, $n\in\mathbf{N}_0$, обобщенной функции $f(r)\in\mathcal{D}'_+$ называется функционал, действующий по правилу (3.67). Доказать, что

$$\mathcal{H}_n\left[\frac{\delta(r-r_0)}{r}\right](\lambda)J_n(\lambda r_0),\quad r_0\geq 0. \qquad (3.68)$$

Пример 3.12. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве $z>0$, граница которого имеет температуру

$$u_0(r) = u_0 \frac{r_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}, \quad r_0 > 0.$$

Вследствие аксиальной симметрии температурного поля задачу естественно поставить в цилиндрических координатах

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r} r \tfrac{\partial u}{\partial r} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r, \ \ 0 < z, \\ u(r,0) = u_0(r), \quad |u(r,z)| < \infty \end{gathered}$$

и решать, используя интегральное преобразование $\mathcal{H}_0[\,u\,](\lambda)$. Преобразование уравнения основано на соответствии (3.64). При $r\to 0$ функция $u_r\to 0$, а при $r\to\infty$ и u и u_r при любом z стремятся к нулю не медленнее, чем при $z=0$ (это ясно из физических соображений). Следовательно, функция $U=\mathcal{H}_0[\,u\,]$ удовлетворяет уравнению $U_{zz} - \lambda^2 U = 0$, а из (3.37) вытекает, что

$$\mathcal{H}_0[\,u_0](\lambda) \equiv U(\lambda, 0) = \frac{u_0 r_0}{\lambda} e^{-\lambda r_0}.$$

Таким образом,

$$U(\lambda, z) = Ce^{-\lambda z} = \frac{u_0 r_0}{\lambda} e^{-\lambda(r_0+z)}.$$

Прообраз восстанавливается с помощью формул (3.62) и (3.37):

$$u(r,z) = u_0 r_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(r_0+z)} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{u_0 r_0}{\sqrt{r^2 + (r_0+z)^2}}.$$

3.199. Решить задачу Дирихле для полупространства:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \quad 0 < r, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 < z, \\ u|_{z=0} = \tfrac{u_0 r_0^3}{(r^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad |u| < \infty. \end{gathered}$$

3.200. Решить задачу Дирихле для полупространства:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < z,$$
$$u|_{z=0} = \frac{u_0 r_0^2 r \cos\varphi}{(r^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad |u| < \infty.$$

3.201. Решить задачу Неймана для полупространства:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{Ar_0}{(r^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad |u| < \infty.$$

3.202. Решить задачу Неймана для полупространства:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{Ar\cos\varphi}{(r^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad |u| < \infty.$$

3.203. На плоской поверхности (z=0) диэлектрика, занимающего полупространство (z<0), находится точечный заряд Q. Найти потенциал электростатического поля.

3.204. В неограниченной среде, коэффициент диффузии которой D, имеется цилиндрический канал, радиус которого r_0. В среде диффундируют частицы примеси, концентрация которых u_0. Канал заполнили чистым веществом (без примеси) с тем же коэффициентом диффузии D. Решить задачу диффузии.

3.205. В неограниченную пластину ($0<z<l$), расположенную на идеально проводящем основании z=0, втекает через точечный контакт на поверхности $z=l$ постоянный ток J. Определить потенциал электростатического поля и плотность тока в пластине, если ее проводимость σ.

3.206. Определить стационарную температуру полупространства z>0, граница которого поддерживается при температуре, равной u_0 внутри круга, радиус которого r_0, и нулю вне этого круга.

3.207. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве $z>0$, на границу которого падает сосредоточенный в точке тепловой поток $Q_0\mathbf{e}_z$, при этом через границу осуществляется теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

3.208. В полупространство $z>0$ по цилиндрическому проводнику, радиус которого r_0, втекает постоянный ток $J\,\mathbf{e}_z$; проводник перпендикулярен плоскости $z=0$. Определить плотность тока в полупространстве, если 1) проводник сплошной, а ток равномерно распределен по поперечному сечению проводника; 2) проводник полый, а ток равномерно распределен по периметру поперечного сечения проводника.

3.209. Неограниченная пластина $(0<z<l)$, коэффициент теплопроводности которой k_1, расположена на плоской поверхности массивного тела $(z>l)$, коэффициент теплопроводности которого k_2. Грань $z=0$ теплоизолирована, кроме точки на этой грани, через которую поступает тепловой поток $Q_0\mathbf{e}_z$. Считая тепловой режим стационарным, определить температуру поверхности $z=l$. Рассмотреть случай $k_1=k_2$.

3.210. В полупространстве $z>0$, граница которого поддерживается при температуре $u_0 exp(-\alpha r^2)$, $\alpha>0$, устанавливается стационарный тепловой режим. Определить плотность теплового потока через границу. Как зависит плотность потока от r при $r\to 0$, $r\to\infty$?

3.211. Точечный заряд Q расположен между проводящими заземленными плоскостями $z=-l$ и $z=l$ на одинаковом расстоянии от каждой. Получить следующее выражение для потенциала

$$u(r,z)=\frac{q}{\sqrt{r^2+r^2}}-q\int\limits_0^\infty e^{-\lambda l}\,\frac{ch\,\lambda z}{ch\,\lambda l}J_0(\lambda r)d\lambda.$$

3.212. Поверхность z=0 слоя ($0<z<l$) имеет нулевую температуру, а поверхность z=l теплоизолирована. В точке с координатами $(0,\ 0,\ l/2)$ находится источник тепла мощности Q_0. Найти стационарное распределение температуры в слое.

3.213. Определить плотность заряда на тонком проводящем диске, радиус которого r_0, а потенциал u_0.

3.214. Полупространство $z<0$ заполнено идеальной несжимаемой жидкостью. Определить форму поверхности жидкости, если начальное отклонение представляет сбой тонкий цилиндр (радиус цилиндра много меньше его высоты), объем которого Q, расположенный вертикально над поверхностью, а начальные скорости жидкости равны нулю. Получить приближенное решение для $r\gg 1,\ (t^2/r)\gg 1$.

3.215. Решить предыдущую задачу для жидкости, равновесие которой нарушается из-за мгновенного изменения давления в пределах круга, радиус которого много меньше отношения давления I к его поверхностной плотности. Найти приближенное решение при $r\gg 1,\ (t^2/r)\gg 1$.

3.216. В результате высоковольтного разряда в газе мгновенно выделилось Q единиц тепла, равномерно распределенных по цилиндру, высота которого $2l$, а радиус много меньше высоты. Найти температуру газа, если до разряда он находился при 0^o.

3.217. Решить предыдущую задачу для газа, движущегося с постоянной скоростью v, разряд в котором направлен перпендикулярно скорости.

3.218. Бесконечная невозбужденная мембрана, расположенная в плоскости $x0y$, получает в момент времени t=0 импульс $I\mathbf{e}_u$ в результате удара в точку $(0,0)$. Решить задачу о движении мембраны.

3.219. Установить соотношение

$$K_0(ar) = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{a^2+\lambda^2}, \quad r>0,\ a>0, \tag{3.69}$$

решив задачу 6.65 посредством преобразования Ганкеля.

3.220. Получить соотношение

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda^2\tau}\lambda\, d\lambda = \frac{e^{-\frac{r^2}{\tau}}}{2\tau} \quad r>0,\ \tau>0, \tag{3.70}$$

решив задачу 6.68 с помощью преобразования Ганкеля. Соотношение (3.70) вытекает также из (3.36).

3.221. В однородной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \sigma_s$) действует линейный источник, расположенный на оси $0z$, с единицы длины которого в единицу времени испускается Q_0 быстрых нейтронов с летаргией u=0. Найти в диффузионно-возрастном приближении плотность потока тепловых нейтронов.

3.5. Ответы

3.2. Указание. Равномерная по λ оценка

$$\left|\lambda^\beta D^\alpha \mathcal{F}[\,\varphi\,](\lambda)\right| = \left|(-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}[D^\beta(x^\alpha\varphi)](\lambda)\right| \le \int_{\mathbf{R}^n}\left|D^\beta(x^{|\alpha|}\varphi)\right| dx, \tag{3.71}$$

вытекающая из свойств (3.17), (3.18), означает, что $\mathcal{F}[\,\varphi\,] \in \mathcal{J}'$. Любая функция $\varphi \in \mathcal{J}$ является фурье-образом некоторой функции ψ, так как (см.(3.5)) $\varphi = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\,\varphi\,]] = \mathcal{F}[\,\psi\,]$. Если бы $\varphi = \mathcal{F}[\,\psi_1\,] = \mathcal{F}[\,\psi_2\,]$, то $\mathcal{F}[\psi_1-\psi_2]=0$, откуда $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\psi_1-\psi_2]] = \psi_1-\psi_2 = 0$. Для доказательства непрерывности оператора $\mathcal{F}$ использовать оценку

$$\left|\lambda^\beta D^\alpha \mathcal{F}[\,\varphi\,](\lambda)\right| \le \sup_{x\in R^n}\left(\left|D^\beta(x^\alpha\varphi)\right|(1+|x|^{n+1})\int_{\mathbf{R}^n}\frac{dx}{1+|x|^{n+1}}\right),$$

которая следует из (3.71) (см. [14]). **3.3**. 1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$; 2) $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$.
3.4. Указание. Применить теорему умножения:

$$\mathcal{F}^{-1}[\,\mathcal{F}[\,\varphi_1]\,\mathcal{F}[\,\varphi_2]] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\,\varphi_2(x-\xi)\,d\xi. \tag{3.72}$$

3.7. Доказательство. Пусть $\psi(\lambda) = \mathcal{F}[\,\varphi\,](\lambda)$, тогда

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^k \cos\lambda x\,d\lambda, \varphi\right) &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx\int\limits_{-k}^{k}e^{-i\,\lambda x}\,d\lambda = \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-k}^{k}\psi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda)\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda)e^{i\,\lambda x}d\lambda|_{x=0} = \varphi(0) = (\delta,\varphi).\end{aligned}$$

3.9. 1) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,sign\,a\,\eta(|a|-\lambda)$; 2) $\frac{(i\,\lambda)^m e^{-i\,\lambda x_0}}{\sqrt{2\pi}}$;
3) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\,\lambda x_0}\sum\limits_{k=0}^{m}(-i\,\lambda)^k C_m^k D^{m-k}h(x_0)$; 4) $(-i)^m\sqrt{2\pi}\,D^m\delta(\lambda)$;
5) $\sqrt{2\pi}\,\delta(\lambda-\lambda_0)$; 6) $\sqrt{2\pi}\,i^m D^m\delta(\lambda-\lambda_0)$.

3.10. Решение.

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}\left[\,\mathcal{P}\tfrac{1}{x}\,\right],\varphi\right) &= \left(\mathcal{P}\tfrac{1}{x},\mathcal{F}[\,\varphi\,]\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{dx}{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}e^{i\,\lambda x}d\lambda = \\ &= i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dx}{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\sin\lambda x d\lambda = i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,dx = \\ &= i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,sign\,\lambda\,d\lambda = \left(i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,sign\,\lambda,\varphi\right).\end{aligned}$$

3.11. $n=1$, $f(x)=\frac{1}{2}e^{-k|x|}$;
$n=2$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_0(k|x|)$;
$n=3$, $f(x)=\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$.

3.12. $n=1$, $f(x)=\frac{1}{2a}\eta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)$;
$n=2$, $f(x)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\eta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{\sqrt{(at)^2-x^2}}$;
$n=3$, $f(x)=\frac{\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{4\pi a^2 x}$.

Указание к задаче 3.12. При $n=1$ применить соответствие (3.48); при $n=2$ провести вычисление интеграла в полярных координатах, используя интегральное представление функции Бесселя и формулу (3.78), а при $n=3$ — в сферических координатах с помощью формулы (3.14).

3.13. Решение. На основании формул (3.20), (3.19), (3.13)

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{F}_\lambda^{-1}\left[\eta(y)e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}[\,f(\xi)\,](\lambda)\right](x),\varphi(x,y)\right)=\\
&=\left(\mathcal{F}_\lambda\left[\eta(y)e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}[\,f(\xi)\,](-\lambda)\right](x),\varphi(x,y)\right)=\\
&=\left(f(\xi),\mathcal{F}_\lambda\left[e^{-|\lambda|y}\eta(y)\mathcal{F}_x[\,\varphi(x,y)\,](-\lambda)\right](\xi)\right)=\\
&=\left(f(\xi),\mathcal{F}_\lambda^{-1}\left[\eta(y)e^{-|\lambda|y}\mathcal{F}_x[\,\varphi(x,y)\,](\lambda)\right](\xi)\right)=\\
&=\left(f(\xi),\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,\varphi(x,y)\,dx}{(\xi-x)^2+y^2}\eta(y)\right)=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}\eta(y),\varphi(x,y)\right).
\end{aligned}$$

3.14. $C=(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}$.

3.15. Решение. Волновой функцией в p-представлении называется такая функция $\chi(p)$, что (см. задачу 3.14)

$$\psi(x)=\int\chi(p)\psi_p(x)dp=\tfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\chi(p)e^{\frac{i}{\hbar}(p,x)}dp,$$

откуда $\chi(p)=\hbar^{-\frac{3}{2}}\mathcal{F}^{-1}[\,\psi(x)\,](-\frac{p}{\hbar})=\hbar^{-\frac{3}{2}}\mathcal{F}[\,\psi(x)\,](\frac{p}{\hbar})$.

3.16. $\chi(p)=\delta(p-p_0)$. **3.17** $\chi(p)=(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}(p,x_0)}$.

3.18. $u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\left(2u_0\varphi+u_1\,arcctg\frac{r^2+l^2\cos 2\varphi}{l^2\sin 2\varphi}\right)$.

3.19. 1) $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}\,arcctg\,\frac{r^2-l^2}{2rl\cos\varphi}$; 2) $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}\,arcctg\frac{l^2-r^2}{2rl\cos\varphi}$.

3.20. $\mathbf{q}(y)=-\mathbf{e}_x\,\frac{q_0}{\pi}\ln\frac{y^2+l_2^2}{y^2+l_1^2}$. **3.21**. $u(x,y)=\frac{2u_0}{\pi}arctg\,(sh\,\frac{\pi x}{2l}\sec\frac{\pi y}{2l})$.
Указание. Применить формулу (3.22).

3.22. $u(x,y)=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_2-u_1}{2}arctg\,(sh\,\frac{\pi x}{2l}\sec\frac{\pi y}{2l})$. Указание. Методом продолжений перейти к задаче в полосе $(-l<y<l)$.

3.23. $u(r,t)=\frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(r-\rho)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+\rho)^2}{4a^2t}}\right]u_0(\rho)\,\rho\,d\rho$; $u(r,t)=\frac{u_0}{2r}e^{a^2\alpha^2t}\times$
$\times\left[(r-2a^2\alpha t)e^{-\alpha r}\mathcal{E}rf\left(a\alpha\sqrt{t}-\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)-(r+2a^2\alpha t)e^{\alpha r}\mathcal{E}rf\left(a\alpha\sqrt{t}+\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$.

3.24. $u(x,y)=q\ln\frac{ch\,\frac{\pi x}{2l}+\cos\frac{\pi(y+y_0)}{2l}}{ch\,\frac{\pi x}{2l}-\cos\frac{\pi(y-y_0)}{2l}}$, $\sigma|_{y=\pm l}=\frac{q}{4l}\,\frac{\cos\frac{\pi y_0}{2l}}{ch\,\frac{\pi x}{2l}\mp\sin\frac{\pi y_0}{2l}}$.

Решение. Потенциал определен условиями

$$\Delta u(x,y)=-4\pi q\delta(x)\cdot\delta(y-y_0),\quad -\infty<x<\infty,\ \ -l<y<l,$$
$$u(x,\pm l)=0.$$

Переход к задаче для фурье-образа

$$U_{yy}-\lambda^2U=-2q\sqrt{2\pi}\,\delta(y-y_0),\quad -l<y<l,$$
$$U(\lambda,\pm l)=0,$$

осуществляется по формулам (3.14), (3.21). Функция $U(\lambda,y)$ имеет вид

$$U(\lambda,y)=\tfrac{q\sqrt{2\pi}}{\lambda\, sh\, 2\lambda l}\left[ch\,\lambda(2l-|y-y_0|)-ch\,\lambda(y+y_0)\right].$$

По формуле обратного преобразования (3.6)

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,y)e^{i\lambda x}d\lambda=\tfrac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}res\left(U(\lambda_n,y)e^{i\lambda_n x}\right)=$$

$$=2q\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\cos\tfrac{\pi n}{2l}(y+y_0)-\cos\tfrac{\pi n}{2l}(2l-|y-y_0|)\right]e^{-\frac{\pi n x}{2l}}.$$

Суммирование ряда проводится с помощью разложения

$$-\ln\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n\cos n\varphi}{n},\quad \varnothing\le\rho\le 1. \tag{3.73}$$

Плотность заряда $\sigma|_{y=\pm l}=-\tfrac{1}{4\pi}\,\tfrac{\partial u}{\partial n}\big|_{y=\pm l}$.

3.25. $u(x,l)=\tfrac{q_0}{2\pi k}\ln\tfrac{ch\,\frac{\pi x}{2l}+\sin\frac{\pi y_0}{2l}}{ch\,\frac{\pi x}{2l}-\sin\frac{\pi y_0}{2l}}$.

3.26. $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u,\ u(x,y)=-\tfrac{J}{4\pi\sigma}\ln\left(ch\tfrac{\pi x}{l}+\cos\tfrac{\pi(y-y_0)}{l}\right)\left(ch\tfrac{\pi x}{l}+\cos\tfrac{\pi(y+y_0)}{l}\right)$.

3.27. 1) $\sigma|_{y=\pm l}=\pm\tfrac{\pi p}{8l^2}\,\tfrac{sh\,\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{\pi y_0}{2l}}{\left(ch\,\frac{\pi x}{2l}\mp\sin\frac{\pi y_0}{2l}\right)^2}$; 2) $\sigma|_{y=\pm l}=-\tfrac{\pi p}{8l^2}\,\tfrac{1\mp ch\,\frac{\pi x}{2l}\,\sin\frac{\pi y_0}{2l}}{\left(ch\,\frac{\pi x}{2l}\mp\sin\frac{\pi y_0}{2l}\right)^2}$.

3.28. $u(x,y,z)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tfrac{z\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$. **3.29**. $\mathbf{B}=\tfrac{4J\mu_1\mu_2\,\mathbf{e}_\varphi}{c(\mu_1+\mu_2)r}$.

3.30. $u(x,t)=\tfrac{Q_0}{kS_0}\left[a\sqrt{\tfrac{t}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}-\tfrac{|x|}{2}\mathcal{E}rf\left(\tfrac{|x|}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$.

3.31. $u(x,t)=\begin{cases}0, & at\le|x|,\\ \tfrac{F_0}{2a\rho_0}\tfrac{at-x}{a-v}, & vt\le x<at,\\ \tfrac{F_0}{2a\rho_0}\tfrac{x+at}{a+v}, & -at\le x<vt.\end{cases}$

3.32. $u(x,t)=\mu\left(t-\tfrac{x}{a}\right)\eta\left(t-\tfrac{x}{a}\right)$. Решение. Постановка задачи:

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx}\quad 0<x,\ \ 0<t,\\ &u(0,t)=\mu(t),\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Если освободиться от неоднородности в граничном условии и перейти к задаче Коши посредством нечетного продолжения решения на всю ось $0x$, то к такой задаче применимо преобразование Фурье (3.8). Это же преобразование можно использовать для решения задачи (3.74), не меняя ее формы. Пусть

$$U(\lambda,t)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(x,t)\sin\lambda x\,dx.$$

Так как возмущение распространяется по струне с конечной скоростью a, то при $x\to\infty$ функции u, u_x, u_{xx} стремятся к нулю. Поэтому для $\mathcal{F}_x[\,u_{xx}]$ (см.(3.13)) после интегрирования по частям получается выражение

$$\mathcal{F}_x[\,u_{xx}]=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{xx}\sin\lambda x\,dx=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\lambda\,\mu(t)-\lambda^2U(\lambda,t).$$

Функция $U(\lambda,t)$ является решением залачи

$$U_{tt}+a^2\lambda^2U=a^2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\mu(t),\quad 0<t,$$
$$U(\lambda,0)=U_t(\lambda,0)=0,$$

откуда $U(\lambda,t)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t\mu(t-\tau)\sin a\lambda\tau\,d\tau$. Применение обратного преобразования и формулы (3.16) дает:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{2a}{\pi}\int_0^t\mu(t-\tau)d\tau\int_0^\infty\sin a\lambda\tau\,\sin\lambda x\,d\lambda=\\ &= \frac{a}{\pi}\int_0^t\mu(t-\tau)d\tau\int_0^\infty[\cos\lambda(x-a\tau)-\cos\lambda(x+a\tau)]\,d\lambda=\\ &= a\int_0^t\mu(t-\tau)[\delta(x-at)-\delta(x+at)]\,d\tau=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

3.33. $u(z,t)=\frac{a}{T_0}\int_0^{t-\frac{x}{a}}F(\tau)d\tau\cdot\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)$. Указание. Применить косинус-преобразование Фурье (3.7).

3.34. $u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{t}}\int_0^t\mu(t-\tau)e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}$;

$u(x,t)=u_0\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. **3.35**. $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$.

3.36. $H(z,t)=H_0\mathcal{E}rf\left(\frac{z}{c}\sqrt{\frac{\pi\mu\sigma}{t}}\right)$. **3.37**. 1) $V(z,t)=c_0Nf(t-\frac{z}{c_0})$;

2) $V(z,t)=\frac{\alpha t_0c_0^2N}{2}e^{-\alpha c_0|t-\frac{z}{c_0}|}$. **3.38**. 1) $V(z,t)=\frac{N}{\alpha}f'(t-\frac{z}{c_0})$;

2) $V(z,t)=\frac{t_0c_0N}{2}\frac{d}{dt}e^{-\alpha c_0|t-\frac{z}{c_0}|}$. **3.39**. $u(x,y)=\frac{2u_0}{\pi}arctg\,(\cos\frac{\pi x}{2l}\,cosech\,\frac{\pi y}{2l})$.

3.40. $u(r,\varphi,z)=\frac{2u_0\cos m\varphi}{\pi}\int_0^\infty\frac{I_m(\lambda r)}{I_m(\lambda r_0)}\frac{1-\cos\lambda l}{\lambda}\sin\lambda z\,d\lambda$. Указание. Сделать замену $u(r,\varphi,z)=v(r,z)\sin m\varphi$ и применить преобразование (3.8).

3.41. $u(r,\varphi,z)=\frac{2u_0\sin m\varphi}{\pi}\int_0^\infty\frac{I_m(\lambda r)}{I_m(\lambda r_0)}\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda z\,d\lambda$.

3.42. $u(r,\varphi,z)=\frac{2q_0\cos m\varphi}{\pi k}\int_0^\infty\frac{I_m(\lambda r)}{I'_m(\lambda r_0)}\frac{1-\cos\lambda l}{\lambda^2}\sin\lambda z\,d\lambda$.

3.43 $u(r,z)=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_2-u_1}{2}\int_0^\infty\frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda r_0)}\frac{\sin\lambda z}{\lambda}d\lambda$.

3.48 $H_x(x,y)=-\frac{\pi J}{ch}\Big[\frac{\sin\frac{\pi(y-y_0)}{h}}{ch\frac{\pi x}{h}-\cos\frac{\pi(y-y_0)}{h}}+\frac{\sin\frac{\pi(y+y_0)}{h}}{ch\frac{\pi x}{h}-\cos\frac{\pi(y+y_0)}{h}}\Big]$,

$H_y(x,y)=\frac{\pi Jsh\frac{\pi x}{h}}{ch}\Big[\frac{1}{ch\frac{\pi x}{h}-\cos\frac{\pi(y-y_0)}{h}}+\frac{1}{ch\frac{\pi x}{h}-\cos\frac{\pi(y+y_0)}{h}}\Big]$;

$\mathbf{F}=-\frac{\pi J^2}{c^2h}ctg\frac{\pi y_0}{h}\,\mathbf{e}_y$. Указание. $\mathbf{H}=rot\mathbf{A}$, $\mathbf{A}=A(x,y)\mathbf{e}_z$, уравнения, которым удовлетворяет $A(x,y)$, даны в ответе к задаче 1.340. Функцию $A(x,y)$ следует отыскивать в виде $A(x,y)=w(x,y)-\frac{2\pi J|x|}{hc}$. Фурье-образ $W(x,y)$ функции $w(x,y)$ имеет вид:

$$W(x,y)=\frac{\sqrt{2\pi}J}{c}\left[\frac{ch\lambda(h-y-y_0)+ch\lambda(h-|y-y_0|)}{\lambda sh\lambda h}-\frac{2}{h\lambda^2}\right].$$

Вычисление интеграла в обратном преобразовании проводится так же, как в решении задачи 3.24; в результате

$$A(x,y) = -\frac{J}{c}\ln(ch\frac{\pi x}{h} - \cos\frac{\pi(y+y_0)}{h})(ch\frac{\pi x}{h} - \cos\frac{\pi(y-y_0)}{h}.)$$

3.49 $u(\varphi,z) = \frac{J}{4\pi\sigma}\ln\frac{1}{ch\frac{z}{r_0}-\cos\varphi} + C$. **3.50** $u(\varphi,z) = \frac{J}{4\pi\sigma}\ln\frac{1}{ch\frac{2z}{r_0}-\cos 2\varphi} + C$.

3.51 $u(\varphi,z) = \frac{J}{4\pi\sigma}\ln\frac{ch\frac{z}{r_0}-\sin\varphi}{ch\frac{z}{r_0}+\sin\varphi} + C$. **3.52** $p^m e^{-p\tau}$.

3.54 Указание. Применить соответствие (3.27). **3.58** Указание. 1) при m=0 воспользоваться определением (3.24) и теоремой дифференцирования изображения; 2) использовать соответствие из п.1 при m=0 и теорему смещения; 3) представить $\sin\omega t$ в виде линейной комбинации экспонент; 5) воспользоваться теоремой дифференцирования изображения; 6) применить теоремы интегрирования оригинала и изображения; 7) воспользоваться теоремой умножения (3.28). **3.59** 1) $sh\,t$; 2) $t\sin t$; 3) $e^{-\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$; 4) $sh\,t\,\sin t$; 5) $ch\,t + \cos t$; 6) $e^{-t}\frac{\sin t}{t}$; 7) $\frac{2\,sh\,t}{t}$; 8) $\delta^{(m)}(t)$. Указания. 2) $F(p) = -\frac{d}{dp}\frac{1}{p^2+1}$; 3) $F(p) = \frac{(p+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$; 6) Найти оригинал $(arctg\,\frac{1}{p})' = -\frac{1}{p^2+1}$, затем применить теорему интегрирования изображения и теорему смещения; 8) применить соответствие (3.27). **3.60** $\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$.

3.61 1) $\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{4}}\mathcal{E}rf(\frac{p}{2})$; 2) $\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right)$; 3) $-\frac{1}{p}\ln(pe^C)$, $C=\Gamma'(1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{1}{p}}\mathcal{E}rf\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

3.64 1) $\sqrt{\frac{\pi}{p}}$; 2) $\sqrt{\frac{\pi}{p-\alpha}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{p-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$. Указание. Воспользоваться соответствием (3.31).

3.65 1) $4\sqrt{\frac{t-1}{\pi}}ch\,(t-1)\,\eta(t-1)$; 2) $\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left(1-4t+\frac{4}{3}t^2\right)e^{-t}$; 3) $erf\sqrt{t} - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$.

3.66 1) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\sqrt{t}}$; 4) $\frac{2}{\pi}arctg\sqrt{t}$; 5) $-\frac{pi}{2}Y_0(t)$; 6) $K_0(t)$. Указание к п.1. $F'(p) = 2pF(p) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $f(0) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$, поэтому $2f' = -tf$.

3.67 1) $\frac{p\ln(\sqrt{p^2+1}+p)}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\frac{\ln(\sqrt{p^2+1}+p)}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\frac{p\ln(\sqrt{p^2-1}+p)}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{\ln(\sqrt{p^2-1}+p)}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

3.70 $\frac{2\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}}J_{\mu}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t)$. Указание. Применить (3.36), (3.28).

3.71 1) $\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{\frac{1}{p}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{1}{p}}$.

3.72 1) $t^{\frac{\nu}{2}}bei_{\nu}(2\sqrt{t})$; 2) $t^{\frac{\nu}{2}}ber_{\nu}(2\sqrt{t})$; 3) $t^{\frac{\nu}{2}}I_{\nu}(2\sqrt{t})$; 4) $t^{\frac{\nu}{2}}\left[J_{\nu}(2\sqrt{t}) - I_{\nu}(2\sqrt{t}\right]$; 5) $t^{\frac{\nu}{2}}\left[J_{\nu}(2\sqrt{t}) + I_{\nu}(2\sqrt{t}\right]$.

3.74 1) $\frac{p}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{p}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}\right)$; 3) $\frac{1}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{\alpha^2}{p+\sqrt{p^2+\alpha^2}}$; 5) $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2-\alpha^2}} - 1\right)$; 6) $\frac{3}{(p^2-1)^{\frac{5}{2}}}$; 7) $2\left(1-e^{-\frac{1}{4p}}\right)$;

8) $p-\sqrt{p^2-\alpha^2}+|\beta|arcctg\,\frac{p}{|\beta|}+p\ln\frac{p+\sqrt{p^2-\alpha^2}}{2\sqrt{p^2+\beta^2}}$; 9) $4\sin\frac{1}{4p}-\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$.

3.75 1) $\pi\,erf\frac{1}{2\sqrt{p}}$; 2) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}\left(1-\frac{1}{2p}\right)e^{-\frac{1}{4p}}$.

3.76 1) $e^{t\cos\theta}J_0(t\sin\theta)$, 2) $e^{-t\cos\theta}I_0(t\sin\theta)$.

3.77 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right)$; 2) $\frac{\sqrt{p+\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{2+1}}$; 3) $\frac{\sqrt{\sqrt{r^2+4}-p^2+2}}{\sqrt{2(p^4+4)}}$;
4) $1-\frac{1}{\sqrt{2p(p^2+4)}}\left(p\sqrt{\sqrt{p^2+4}+p}+\sqrt{\sqrt{p^2+4}-p}\right)$.

3.82 Указание. Изображение записать в виде $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$, где $F(p)=\frac{e^{-\alpha p}}{p+\alpha}$, и применить соответствие (3.39).

3.83 1) $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}-\alpha\,\mathcal{E}rf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$; 2) $\left(t+\frac{\alpha^2}{2}\right)-\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$;
3) $\frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$; 4) $erf(a\sqrt{t})$; 5) $\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}-a\,e^{a^2t+a\alpha}\mathcal{E}rf\left(a\sqrt{t}+\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$;
6) $\mathcal{E}rf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-e^{\alpha a+a^2t}\mathcal{E}rf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)$.

3.84 Указание. Для вычисления интеграла (3.25) используется контур, изображенный на рис.3.3. При $R\to\infty$ интеграл по C_R стремится к нулю (по лемме Жордана), поэтому

$$f(t)=-\tfrac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_r}+\int_{\infty e^{i\pi}}^{0}+\int_{0}^{\infty e^{-i\pi}}\right].$$

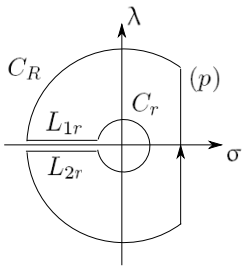

Рис. 3.3

Теперь нужно перейти к пределу при $r\to 0$, сделать замены $p=\xi^2e^{i\pi}$ в первом, $p=\xi^2e^{-i\pi}$ — во втором интеграле и применить формулу $K_0(iz)=-\frac{i\pi}{2}H_0^{(2)}(z)$. **3.85** 1) См. ответ к задаче 10.35; 2) $\frac{24}{\omega^2}\left(\frac{t^3}{6}-\frac{t}{\omega^2}+\frac{\sin\omega t}{\omega^3}\right)$; 3) $2J_1(t)-\sin t$; 4) $tI_1(t)+\frac{2}{3}t^2I_2(t)$. **3.86** Решение п.1. По теореме интегрирования изображения (см. задачу 3.58)

$$\tfrac{\sin kt}{t}=sign\,k\tfrac{\sin|k|t}{t}\leftrightarrow F(p)=sign\,k\int_p^\infty\tfrac{|k|dp}{p^2+k^2}=sign\,k\,arcctg\tfrac{p}{|k|},$$

откуда $F(0)=\frac{\pi}{2}sign\,k$. **3.87** 1) $2\alpha\ln 2$. 2) $\frac{\pi}{2}|\beta|-|\alpha|$.

3.89 1) $u(t)=f(t)*e^{-a^2\lambda t}=\int_0^t f(\tau)\,e^{-a^2\lambda(t-\tau)}d\tau$;

2) $u(t)=\frac{1}{a\sqrt{\lambda}}f(t)*\sin a\sqrt{\lambda}t=\frac{1}{a\sqrt{\lambda}}\int_0^t f(\tau)\sin a\sqrt{\lambda}(t-\tau)\,d\tau$.

3.90 Указание. Изображение $U(p)$ является решением алгебраического уравнения $A(p)U(p)=F(p)$, а $V(p)$ — решение уравнения $A(p)V(p)=1/p$, откуда $U(p)=pF(p)V(p)$.

3.91 $u(t)=\frac{A}{2a^2}e^{\frac{a^2}{4}}\left[\,e^{at}erf\left(t+\frac{a}{2}\right)+e^{-at}erf\left(t-\frac{a}{2}\right)-2erf\frac{a}{2}\,sh\,at\,\right]-\frac{2A}{a^2\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$.

3.92 Решение. Пусть $u(x,t)\leftrightarrow U(x,p)$, $v(x,t)\leftrightarrow V(x,p)$, $\mu(t)\leftrightarrow M(p)$, $F_1(x,p)$ и $F_2(x,p)$ — фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения 2-го порядка, которому удовлетворяет функция $U(x,p)$ (а также $V(x,p)$), и $l<\infty$. Изображение $U(x,p)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}&U(x,p)=A_1(p)F_1(x,p)+A_2(p)F_2(x,p),\quad 0<x<l,\\&\alpha_1U_x(0,p)-\beta_1U(0,p)=M(p),\\&\alpha_2U_x(l,p)+\beta_2U(l,p)=0,\end{aligned}$$

откуда $U(x,p)=H(x,p)M(p)$, где $H(x,p)$ не зависит от $M(p)$. Если $M(p)\equiv 1$, то $M(p)=\frac{1}{p}$ и $V(x,p)=\frac{1}{p}M(x,p)$. Таким образом, $U(x,p)=pM(p)V(x,p)$ и остается применить интеграл Дюамеля (3.29). При $l=\infty$ решение задачи проводится аналогично.

3.93 $u(x,t)=v_0e^{-\beta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}\eta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\omega}\sin\omega\left(t-\frac{|x|}{a}\right), & \omega^2=\frac{k}{M}-\beta^2>0,\\ t-\frac{|x|}{a}, & \frac{k}{M}=\beta^2,\ \beta=\frac{1}{M}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{T_0}{a}\right),\\ \frac{1}{\gamma}sh\,\gamma\left(t-\frac{|x|}{a}\right), & \gamma^2=\beta^2-\frac{k}{M}>0.\end{array}\right.$

3.94 $u(x,t)=$

$$=\frac{F_0}{k}\eta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\left\{\begin{array}{ll}1-\left[\frac{\beta}{\omega}\sin\omega\left(t-\frac{|x|}{a}\right)+\cos\omega\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\right]e^{-\beta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}, & \omega^2=\frac{k}{M}-\beta^2>0,\\ 1-\left[1+\beta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\right]e^{-\beta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}, & \frac{k}{M}=\beta^2,\ \beta=\frac{T_0}{Ma},\\ 1-\left[\frac{\beta}{\gamma}sh\,\gamma\left(t-\frac{|x|}{a}\right)+ch\,\gamma\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\right]e^{-\beta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}, & \gamma^2=\beta^2-\frac{k}{M}>0.\end{array}\right.$$

3.95 $u(x,t)=\frac{k}{M}\eta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a}}\mu\left(t-\tau-\frac{|x|}{f}\right)\sin\omega\tau\,e^{-\beta\tau}d\tau, & \omega^2=\frac{k}{M}-\beta^2>0,\\ \int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a}}\mu\left(t-\tau-\frac{|x|}{f}\right)\tau e^{-\beta\tau}d\tau, & \frac{k}{M}=\beta^2,\ \beta=\frac{T_0}{Ma},\\ \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a}}\mu\left(t-\tau-\frac{|x|}{f}\right)sh\,\gamma\tau e^{-\beta\tau}d\tau & \gamma^2=\beta^2-\frac{k}{M}>0.\end{array}\right.$

3.96 $i(x,t)=\sqrt{\frac{C}{L}}u(x,t)$, $u(x,t)=v(x,t)\eta(t-\sqrt{LC}x)$,

1. $v(x,t)=\frac{E(t-\sqrt{LC}x)}{1+R_0\sqrt{\frac{C}{L}}}$;
2. $v(x,t)=\frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{L}{C}}\int_{\sqrt{LC}x}^{t}E(t-\tau)e^{\frac{L}{L_0}x-\frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{L}{C}}\tau}d\tau$;
3. $v(x,t)=E(t-\sqrt{LC}x)-\frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C}{L}}\int\limits_{\sqrt{LC}x}^{t}E(t-\tau)\,e^{\frac{C}{C_0}x-\frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C}{L}}\tau}\,d\tau$.

3.97 $u(x,t)=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{C}{L}}R_0}e^{-R\sqrt{\frac{C}{L}}x}E(t-x\sqrt{LC})\,\eta(t-x\sqrt{LC})$; $i(x,t)=\sqrt{\frac{C}{L}}u(x,t)$.

3.98 $u(x,t)=u_0e^{-R\sqrt{\frac{C}{L}}x-\frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C}{L}}(t-x\sqrt{LC})}\eta(t-x\sqrt{LC})$.

3.99 $u(x,t)=\frac{mav_0}{ES}\left(1-e^{-\frac{ES}{ma}(t-\frac{x}{a})}\right)\eta(t-\frac{x}{a})$.

3.100 $u(x,t)=\frac{v_0}{h}\left(1-e^{-h(t-\frac{x}{a})}\right)\eta(t-\frac{x}{a})$, $h=\frac{\alpha+a\rho_0S}{m}$.

3.101 $u(x,t)=\frac{1}{\alpha^2}\left[2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}-1+e^{\alpha^2t}\mathcal{E}rf(\alpha\sqrt{t})\right]$, $\alpha=\frac{2\sqrt{2}\rho S\sqrt{a}}{m}$, $a^2=\frac{EJ}{\rho S}$.

3.102 $u(x,t)=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{CR}{\pi}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\frac{CRx^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}$; $u(x,t)=E_0\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{CR}{t}}\right)$.

3.103 $i(x,t)=\frac{E_0}{R_0}r^{\frac{R}{R_0}x+\frac{R}{R_0^2C}t}\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{CR}{t}}+\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{Rt}{C}}\right)$.

3.104 $i(0,t)=2k\sqrt{\frac{C}{\pi R}}(\sqrt{t}-\sqrt{t-t_0}\,\eta(t-t_0)$. **3.105** $i(0,t)=E_0\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\frac{Rt}{2L}}I_0\left(\frac{Rt}{2L}\right)$.

3.106 $u(x,t)=u_0\begin{cases}\frac{2\sqrt{L_1C_2}}{\sqrt{L_1C_2}+\sqrt{L_2C_1}}\eta(t+x\sqrt{L_1C_1})-1, & x<0,\\ -\frac{2\sqrt{L_2C_1}}{\sqrt{L_1C_2}+\sqrt{L_2C_1}}\eta(t+x\sqrt{L_2C_2})+1, & 0<x.\end{cases}$

3.107 $u(x,t)=u_0\begin{cases}\frac{2\sqrt{R_1C_2}}{\sqrt{R_1C_2}+\sqrt{R_2C_1}}erf\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{R_1C_1}{t}}\right)+\frac{\sqrt{R_1C_2}-\sqrt{R_2C_1}}{\sqrt{R_1C_2}+\sqrt{R_1C_2}}, & x<0,\\ \frac{2\sqrt{R_2C_1}}{\sqrt{R_1C_2}+\sqrt{R_2C_1}}erf\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{R_1C_1}{t}}\right)+\frac{\sqrt{R_1C_2}-\sqrt{R_2C_1}}{\sqrt{R_1C_2}+\sqrt{R_1C_2}}, & 0<x.\end{cases}$

3.108 $u(x,t)=2q_0\sqrt{\frac{t}{\pi D}}e^{-\frac{x^2}{4DT}}-\frac{q_0x}{D}\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$.

3.109 $q(t)=\frac{k}{a\sqrt{\pi}}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}-2u_0\sqrt{t}\right]$.

3.110 1) $q(t)=\frac{kA}{a}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}t^{\beta-\frac{1}{2}}$; 2) $q(t)=\frac{kA\sqrt{\alpha}}{a}u_0\left(e^{\alpha t}-e^{a^2t}\mathcal{E}rf(a\sqrt{t})\right)$.

3.111 $u(x,t)=u_0\left[\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-e^{hx+h^2a^2t}\mathcal{E}rf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ha\sqrt{t}\right)\right]$.

3.112 $\theta(t)=\mu(t)+\frac{1}{ah}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$. 1) $\theta(t)=A\left(t+\frac{2}{ah}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$; 2) $\theta(t)=A\left(\sqrt{t}+\frac{\sqrt{\pi}}{2ah}\right)$.

3.113 $u(x,t)=\frac{u_1+u_2}{2}-\frac{(u_1-u_2)x}{2|x|}\left[erf\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}}+e^{2h|x|+4h^2Dt}\mathcal{E}rf\left(\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}}+2h\sqrt{Dt}\right)\right]$.

3.114 $u(x,t)=\frac{\alpha u_1+u_2}{1+\alpha}+\frac{u_2-u_1}{1+\alpha}\begin{cases} erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), & x<0,\\ \alpha\, erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), & x>0,\end{cases}\qquad \alpha=\sqrt{\frac{k_1\rho_1C_1}{k_2\rho_2C_2}}.$

3.115 $u(x,t)=u_0\left[1-I_0(\frac{ht}{2})e^{-\frac{ht}{2}}\right],\ \ q(0,t)=\frac{ku_0}{a\sqrt{\pi t}}\left(1-e^{-ht}\right).$

3.117 Да.

3.118 $u(x,t)=\frac{2u_0k_1a_2}{k_2a_1+k_1a_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_2a_1-k_1a_2}{k_2a_1+k_1a_2}\right)^n\mathcal{E}rf\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{x-l}{a_2}+\frac{(2n+1)l}{a_1}\right)\right].$

3.119 $u(x,t)=\frac{f_0}{\rho}\sin\frac{3\pi x}{l}\begin{cases}\frac{\omega\sin\omega_0t-\omega_0\sin\omega t}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}, & \omega\neq\omega_0=\left(\frac{3\pi a}{l}\right)^2,\\ \frac{\sin\omega_0t-t\omega_0\cos\omega_0t}{2\omega_0}, & \omega=\omega_0.\end{cases}$

3.120 $u(x,t)=\frac{f_0}{C\rho}\cos\frac{\pi x}{2l}\begin{cases}\frac{e^{-\alpha_0t}-e^{-\alpha}}{\alpha-\alpha_0}, & \alpha\neq\alpha_0=\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2,\\ te^{-\alpha_0t}, & \alpha=\alpha_0.\end{cases}$

3.121 $u(l,t)=\frac{2aF_0}{ES_0+\alpha a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ES_0-\alpha a}{ES_0+\alpha a}\right)^n\left[t-\frac{l}{a}(2n+1)\right]\cdot\eta\left(t-\frac{l}{a}(2n+1)\right).$

Отраженной волны нет при $\alpha=\sqrt{\rho_0S_0E},\ u(l,t)=\frac{aF_0}{ES_0}(t-\frac{l}{a})\,\eta(t-\frac{l}{a})$.

3.122 $\zeta(x,t)=\frac{Qt}{|x|}\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x}\cdot C\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}t\right)+\sin\frac{gt^2}{4|x|}\cdot S\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}t\right)\right).$

Приближенное решение: $\zeta(x,t)=\frac{Qt}{2|x|}\sqrt{\frac{g}{\pi|x|}}\sin\left(\frac{gt^2}{4|x|}+\frac{\pi}{4}\right).$ Указание. Начальное отклонение моделировать δ-функцией.

3.123 $\zeta_0=\frac{\partial\zeta(x,t)}{\partial t}$, $\zeta(x,t)$ — решение предыдущей задачи, где $Qg\to\frac{I}{\rho}$.

Приближенное решение: $\zeta(x,t)=\frac{Igt^2}{4\rho|x|}\sqrt{\frac{g}{\pi|x|}}\cos\left(\frac{pi}{4}+\frac{gt^2}{4|x|}\right).$

Указание. Потенциал скоростей $\psi_0=\frac{\partial\psi}{\partial t}$, ψ — решение задачи

$$\psi_{xx}+\psi_{zz}=0,\ \ -\infty<x<\infty,\ \ z<0,\ \ 0<t,$$
$$\left(\psi_z+\tfrac{1}{g}\psi_{tt}\right)\Big|_{z=0}=0,$$
$$\psi|_{z=0,t=0}=0,\ \ \psi_t|_{z=0,t=0}=-\tfrac{I}{\rho}\delta(x).$$

3.124 $\zeta(0,t)=\frac{Q}{\pi a}\left(1-t\sqrt{\frac{g}{a}}e^{-\frac{gt^2}{4a}}\int\limits_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}}e^{x^2}dx\right);\qquad \zeta(0,t)=-\frac{2Q}{\pi gt^2}\left(1+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right),$

функция $\zeta(0,t)$ имеет один нуль. Указание. Использовать формулы

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin2\xi x\,dx=e^{-\xi^2}\int_0^{\xi}e^{x^2}dx,$$
$$2\xi e^{-\xi^2}\int_0^{\xi}e^{x^2}dx=1+\tfrac{1}{2\xi^2}+O\left(\tfrac{1}{\xi^4}\right),\ \ \xi\to\infty.$$

3.125 $u(x,t)=\frac{q_0}{kl}\left[\frac{(l-x)^2}{2}+a^2t-\frac{l^2}{6}\right]-\frac{2q_0l}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi nx}{l}e^{-\frac{\pi an}{l})^2t}}{n^2}.$

Указание. Постановка задачи:

$$u_t=a^2u_{xx},\ \ 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$-ku_x(0,t)=q_0,\ \ u_x(l,t)=0,\ \ u(x,0)=0.$$

Задача для изображения $U(x,p)=\mathcal{L}[\,u\,](x,p)$:

$$U_{xx}-\tfrac{p^2}{a^2}U=0,\ \ 0<x<l,$$
$$U_x(0,p)=-\tfrac{q_0}{kp},\ \ U_x(l,p)=0.$$

Изображение

$$U(x,p)=\frac{q_0 a\, ch\,\frac{(l-x)\sqrt{p}}{a}}{sh\,\frac{l\sqrt{p}}{a}}$$

— однозначная мероморфная функция с простыми полюсами $p_n=-(\frac{\pi a n}{l})^2$, $n\in\mathbf{N}$ и полюсом 2-го порядка $p_0=0$. Оригинал восстанавливается с помощью 2-й теоремы разложения:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{p_n}\Big[U(p)e^{pt}\Big].$$

Замечание. Метод Лапласа приводит к той же форме ответа, что и метод Фурье, однако при этом нет речи о собственных функциях, о вычислении коэффициентов Фурье, о переходе к задаче с однородными граничными условиями и т.п.

3.126 $u(x,t)=2\alpha u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+\alpha^2}\cos\frac{\mu_n(l-x)}{l}e^{-\frac{a\mu_n}{l})^2t}}{\mu_n^2+\alpha^2+\alpha}$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=\alpha,\ \alpha=hl$.

3.127 1) $u(x,t)=u_0\Big[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n x}{l}e^{-\frac{\pi a n}{l})^2t}}{n}\Big]$; .

2) $u(x,t)=u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\mathcal{E}rf\frac{(2n+1)l-x}{2a\sqrt{t}}-\mathcal{E}rf\frac{(2n+1)l+x}{2a\sqrt{t}}\Big]$

Указание. Для получения 1-й формы ответа применить 2-ю теорему разложения к изображению

$$U(x,p)=\frac{u_0 sh\,\frac{\sqrt{p}x}{a}}{psh\,\frac{\sqrt{p}l}{a}}.$$

Для получения 2-й формы представить функцию $U(x,p)$ в виде ряда:

$$U(x,p)=\frac{u_0}{p}\frac{e^{\frac{(x-l)\sqrt{p}}{a}}-e^{-\frac{(x+l)\sqrt{p}}{a}}}{1-e^{-\frac{2l\sqrt{p}}{a}}}=\frac{u_0}{p}\left(e^{\frac{(x-l)\sqrt{p}}{a}}-e^{-\frac{(x+l)\sqrt{p}}{a}}\right)\sum_{0}^{\infty}e^{-\frac{2nl\sqrt{p}}{a}}$$

и применить первую теорему разложения.

3.128 $u(x,t)=\frac{F_0}{ES}\Big[x-2\alpha l\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2+\alpha^2}\sin\frac{\mu_n x}{l}\cos\frac{\mu_n at}{l}}{\mu_n^2(\mu_n^2+\alpha^2+\alpha)}\Big]$, $\mu_n>0$ — корень уравнения $\mu\,tg\,\mu=\alpha,\ \alpha=\frac{m}{M}$, где m — масса стержня.

Указание. Постановка задачи:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ 0<t,$$
$$u(0,t)=0,\ \ -ESu_x(l,t)+F_0=Mu_{tt}(l,t),\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

Изображение $U(x,p)=\mathcal{L}[\,u\,](x,p)$ — решение задачи:

$$U_{xx} - \tfrac{p^2}{a^2}U = 0, \;\; 0 < x < l,$$
$$U(0,p) = 0, \quad -ESU_x(l,p) + \tfrac{F_0}{p} = Mp^2U(l,p) = 0.$$

Функция

$$U(x,p) = \tfrac{F_0\, sh\, \frac{px}{a}}{p^2(Mpsh\, \frac{pl}{a} + ESch\, \frac{pl}{a})}$$

является мероморфной с простыми полюсами $p_0 = 0$, $p_{\pm n} = \pm i\frac{a\mu_n}{l}$, $n \in \mathbf{N}^+$. Оригинал восстанавливается с помощью 2-й теоремы разложения:

$$u(x,t) = \operatorname*{res}_{p=0}\left(U(x,p)e^{pt}\right) + 2\mathbf{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{p=p_n}\left(U(x,p)e^{pt}\right).$$

3.129 $\tau = \frac{l}{2\mu a}(4\mu + 2 - e^{-\alpha\mu}) \in (\frac{2l}{a}, \frac{4l}{a})$ при $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 — корень уравнения $4\mu - e^{-2\mu} = 2$. Указание. Постановка задачи:

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t,$$
$$u(0,t) = 0, \;\; -ESu_x(l,t) = Mu_{tt}(l,t),$$
$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v, & x = l. \end{cases}$$

Для изображения $U(x,p) = \mathcal{L}[\,u\,](x,p)$ получается задача

$$U_{xx} - \tfrac{p^2}{a^2}U = 0, \;\; 0 < x < l,$$
$$U(0,p) = 0, \quad -ESU_x(l,p) = M(p^2U(l,p) + v).$$

Общее решение уравнения

$$U(x,p) = A\, sh\, \tfrac{px}{a} + B\, ch\, \tfrac{px}{a},$$

частное решение, удовлетворяющее граничным условиям, запишется в виде

$$U(x,p) = -\tfrac{Mv\, sh\, \frac{px}{a}}{p(Mpsh\, \frac{pl}{a} + \frac{ES}{a}ch\, \frac{pl}{a})}.$$

При $t < \tau$ элемент стержня, примыкающий к торцу $x{=}l$, находится в сжатом состоянии, поэтому натяжение $T(l,t) = ESu_x(l,t) < 0$; в момент $t{=}\tau$ отрыва массы M от стержня $T(l,t) = 0$. Чтобы найти производную $u_x(l,t)$ следует представить функцию $U_x(l,p)$ в виде:

$$U_x(l,p) = -\tfrac{v}{a}\tfrac{ch\, \alpha p}{p(psh\, \alpha p + \beta ch\, \alpha p)} = -\tfrac{v}{a}\tfrac{1-e^{-2\alpha p}}{(p+\beta)\left[1 - \frac{p-\beta}{p+\beta}e^{-2\alpha p}\right]} =$$

$$= -\tfrac{v}{a}\tfrac{1-e^{-2\alpha p}}{p+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{p-\beta}{p+\beta}\right)^n e^{-2\alpha np}, \text{ где } \alpha = \tfrac{l}{a}, \;\beta = \mu\tfrac{a}{l}.$$

Отсюда (см. задачу 3.60)

$$u_x(l,t) = -\tfrac{v}{a}\eta(t) - \tfrac{v}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[L_n(\tfrac{2\mu at}{l} - 4\mu(n+1)) + L_{n+1}(\tfrac{2\mu at}{l} - 4\mu(n+1))\right] \times$$
$$\times\, e^{2\mu(n+1)}\eta(t - \tfrac{2l}{a}(n+1)).$$

3.130 $\tau = \frac{l}{2\mu a}(4\mu + 2 - e^{-\alpha\mu}) \in (\frac{2l}{a}, \frac{4l}{a})$ при $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 — корень уравнения $4\mu + e^{-2\mu} = 2$.

3.131 $\tau=\frac{2}{a}min\{l_1;l_2\}$. **3.132** $\tau=\frac{2}{a}min\{\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}};\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}\}$.

3.133 Если $\rho_1E_1=\rho_2E_2$, то $\tau=\frac{2l}{a_1}$; в противном случае $\tau=\infty$.

3.134 $q(\mathbf{r},u)=\varphi(u)\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4\tau}}}{4\pi\tau}\Big[\frac{e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\tau}}-e^{-\frac{(z+z_0)^2}{4\tau}}}{4\pi\tau}-$

$$-\frac{1}{2D}e^{\frac{z+z_0}{D}+\frac{\tau}{4D^2}}\mathcal{E}rf(\tfrac{z+z_0}{2\sqrt{\tau}}+\tfrac{\sqrt{\tau}}{2D})\Big],$$

где $\varphi(u)$ имеет вид (1.146), а возраст $\tau=\tau(u)$ определен формулой (1.64).

3.135 $u(r,t)=u_1+(u_0-u_1)\frac{r_0}{r}\mathcal{E}rf\left(\frac{(r-r_0)}{2a\sqrt{t}}\right)$.

3.136 $q(t)=\frac{k}{r_0}\left(\mu(t)+\frac{r_0}{a\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right)$. 1) $q(t)=\frac{kA}{r_0}\left(t+\frac{2r_0}{a}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$;

2) $q(t)=\frac{kA}{r_0}\left(\sqrt{t}+\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2a}\right)$. **3.137** $\theta(t)=\frac{1+hr_0}{hr_0}\mu(t)+\frac{1}{ah\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$;

1) $\theta(t)=A\left(\frac{1+hr_0}{hr_0}t+\frac{2}{ah}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$; 2) $\theta(t)=A\left(\frac{1+hr_0}{hr_0}\sqrt{t}+\frac{\sqrt{\pi}}{2ah}\right)$.

3.138 $Q(t)=4\pi r_0^2kh\left[u_0(t)-ah\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}-be^{b^2\tau}\mathcal{E}rf\,b\sqrt{\tau}\right)u_0(t-\tau)d\tau\right]$,

если $u_0(t)=u_0$, то $Q(t)=\frac{4\pi r_0^2khu_0}{1+hr_0}\left(1+hr_0e^{b^2t}\mathcal{E}rf\,b\sqrt{t}\right)$, $\quad b=a\left(h+\frac{1}{r_0}\right)$.

3.139 Если $\sqrt{\alpha}\neq b=\left(h+\frac{1}{r_0}\right)\sqrt{D}$, то

$u(r,t)=4\pi r_0^2h\sqrt{D}u_0\left\{1-\frac{b}{b^2-\alpha}e^{-b^2t}\mathcal{E}rfb\sqrt{t}-\right.$

$$\left.-\frac{1}{2}e^{-\alpha t}h\sqrt{D}\left[\frac{e^{-\alpha t}\mathcal{E}rf(-\sqrt{\alpha t})}{b+\sqrt{\alpha}}+\frac{e^{\alpha t}\mathcal{E}rf(\sqrt{\alpha t})}{b-\sqrt{\alpha}}\right]\right\};$$

если $\sqrt{\alpha}=b$, то $u(r,t)=4\pi r_0^2h\sqrt{D}u_0\times$

$$\times\left\{1-\frac{h}{4}\sqrt{\frac{D}{\alpha}}e^{-\alpha t}\left[e^{-\alpha t}\mathcal{E}rf(-\sqrt{\alpha t})-(1+4\alpha t)e^{\alpha t}\mathcal{E}rf(\sqrt{\alpha t})\right]+4\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\right\}.$$

3.140 Если $3\rho C>4\rho_0C_0$, то

$u(t)=\frac{3Q}{4\pi r_0^3\rho_0C_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left[\alpha_1e^{\alpha_1^2t}\mathcal{E}rf(\alpha_1\sqrt{t}-\alpha_2e^{\alpha_2^2t}\mathcal{E}rf(\alpha_2\sqrt{t}\right]$, где

$$\alpha_{1,2}=\frac{3k}{2a\rho_0C_0r_0}\pm\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{3k}{\rho_0C_0}\left(\frac{3\rho C}{4\rho_0C_0}-1\right)},\qquad(3.75)$$

если $3\rho C=4\rho_0C_0$, то $u(t)=\frac{3Q}{4\pi r_0^3\rho_0C_0}\left[(1+2\alpha^2t)e^{\alpha^2t}\mathcal{E}rf(\alpha\sqrt{t}-2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right]$,

где $\alpha=\frac{3k}{2a\rho_0C_0r_0}$; при $t\to\infty$ функция $u(t)$ имеет в обоих случаях следующее асимптотическое представление: $u(t)=\frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}ka}\left[\frac{1}{t\sqrt{t}}+O\left(\frac{1}{t^2\sqrt{t}}\right)\right]$.

3.141 Если $r>r_0$, то $u(r,t)=u_1+\frac{r}{r_0}\frac{u_0-u_1}{\alpha_2-\alpha_1}\times$

$$\times\left[\alpha_2e^{\alpha_2^2t+\frac{\alpha_2}{a}(r-r_0)}\mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}+\alpha_2\sqrt{t}\right)-\alpha_1e^{\alpha_1^2t+\frac{\alpha_1}{a}(r-r_0)}\mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}+\alpha_1\sqrt{t}\right)\right],$$

если $r \le r_0$, то $u(t) = u(r_0, t)$, где $\alpha_{1,2}$ определены формулой (3.75).

3.142 Если $r > r_0$, то $u(r,t) = u_1 + \frac{r_0}{(\alpha_2-\alpha_1)r} \times$

$$\times \left[\left(u_0 - u_1 - \frac{q_0}{\alpha_2^2 C_0 \rho_0} \right) \alpha_2 e^{\alpha_2^2 t + \frac{\alpha_2}{a}(r-r_0)} \mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + \alpha_2\sqrt{t} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(u_0 - u_1 - \frac{q_0}{\alpha_2^2 C_0 \rho_0} \right) \alpha_1 e^{\alpha_1^2 t + \frac{\alpha_1}{a}(r-r_0)} \mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + \alpha_1\sqrt{t} \right) \right] -$$

$$- \frac{r_0}{r} \frac{q_0}{\alpha_1 \alpha_2 C_0 \rho_0} \mathcal{E}rf\left(f \frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right),$$

если $r \le r_0$, то $u(t) = u(r_0, t)$, где $\alpha_{1,2}$ определены формулой (3.75).

3.143 1) Если $r \ge r_0$, то

$$u(r,t) = u_1 + \frac{r_0}{(\alpha_2-\alpha_1)r} \left[(\alpha_1(u_0-u_1)+d) e^{\alpha_1^2 t + \frac{\alpha_1}{a}(r-r_0)} \mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + \alpha_1\sqrt{t} \right) - \right.$$

$$\left. - \alpha_2(u_0-u_1)+d) e^{\alpha_2^2 t + \frac{\alpha_2}{a}(r-r_0)} \mathcal{E}rf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + \alpha_2\sqrt{t} \right) \right],$$

если $r < r_0$, то $u(t) = u(r_0, t)$, $d = \frac{b\sqrt{\pi}}{\rho_0 C_0}$.

2) $u(t) = u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1} \left[u_0 - u_1 - \frac{q_0}{\rho_0 C_0(\alpha_2^2-\beta)} \right] e^{\alpha_2^2 t} \mathcal{E}rf(\alpha_2\sqrt{t}) -$

$$- \frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} \left[u_0 - u_1 - \frac{q_0}{\rho_0 C_0(\alpha_1^2-\beta)} \right] e^{\alpha_1^2 t} \mathcal{E}rf(\alpha_1\sqrt{t}) -$$

$$- \frac{q_0 e^{\beta t}}{\rho_0 C_0(\alpha_1^2-\beta)(\alpha_2^2-\beta)} [\beta + \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{\beta}\, erf(\sqrt{\beta}t),$$

величины $\alpha_{1,2}$ даны в ответе к задаче 3.141.

3.144 $q(r,t) = \frac{Q_0\varphi(u)}{r} \left[\frac{r_0}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4\tau}} - e^{\frac{\tau}{r_0^2} + \frac{r-r_0}{r_0}} \mathcal{E}rf\left(\frac{\sqrt{\tau}}{r_0} + \frac{r_0-r}{\sqrt{\tau}} \right) \right]$, где $\varphi(u)$ дана в ответе к задаче 1.185, а функция $u{=}u(\tau)$ определена формулой (1.63).

3.145 $i(x,t) = E_0 \sqrt{\frac{G}{\omega L}} e^{-\sqrt{\frac{LG\omega}{2}}x} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{LG\omega}{2}}x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Решение. После применения преобразования Лапласа к задаче

$$u_x + Li_t = 0, \quad i_x + Gu = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$
$$u(0,t) = E_0 \sin\omega t, \quad u(x.0) = i(x,0) = 0,$$

получается задача для $I(x,p)$

$$I_{xx} - pLGI = 0, \quad 0 < x,$$
$$I_x(0,p) = -\frac{E_0 G\omega}{p^2+\omega^2},$$

решение которой

$$I(x,p) = E_0 \sqrt{\frac{G}{L}} \frac{\omega e^{-\sqrt{pLG}x}}{\sqrt{p}(p^2+\omega^2)}.$$

По формуле (3.25)

$$i(x,t) = E_0 \sqrt{\frac{G}{L}} \frac{\omega}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} \frac{e^{\sqrt{pLG}x}}{(r^2+\omega^2)\sqrt{p}} dp \quad \sigma > 0.$$

при $t \to \infty$ (см.[40])

$$i(x,t) = E_0 \sqrt{\frac{G}{L}} \frac{\omega}{2\pi i} \sum_k res \frac{e^{-\sqrt{p_k LG}x + p_k t}}{(p_k^2+\omega^2)\sqrt{p_k}}, \quad \mathbf{Re}p > 0,$$

откуда следует выражение, приведенное в ответе.

3.146 $i(0,t) = E_0 \sqrt{\frac{2G}{\omega L}} \cos\delta \cdot \sin(\omega t - \delta), \quad tg\delta = 1 + L_0 \sqrt{\frac{2\omega G}{L}}$.

3.147 $i(x,t) = E_0\sqrt{\frac{\omega C}{R}}e^{-\sqrt{\frac{\omega CR}{2}}x}\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.148 $i(0,t) = E_0\sqrt{\frac{2\omega C}{R}}\sin\delta\cdot\cos(\omega t-\delta)\quad ctg\,\delta = 1 + \frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{2C}{\omega R}}$.

3.149 $u(x,t) = u_0 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\sin\left(\omega t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)$.

3.150 $u(r,t) = u_0\Big[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n)}\Big]$, $\mu_n > 0$ — нуль $J_0(\mu)$.

Решение. Так как температура боковой поверхности не зависит ни от φ, ни от z, то тепловые потоки вдоль $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_z$ отсутствуют. Таким образом, температура зависит от r, t и определяется условиями

$$u_t = a^2\Delta u,\ \ 0 < r < r_0,\ \ 0 < t,$$
$$u(r_0,t) = u_0,$$
$$|u(r,t)| < \infty,\ \ u(r,0) = 0.$$

Для изображения $U(r,p)$ получается задача

$$\tfrac{1}{r}\tfrac{d}{dr}r\tfrac{dU}{dr} - \tfrac{p}{a^2}U = 0,\ \ 0 < r < r_0,$$
$$U(r_0,p) = \tfrac{u_0}{p},\ \ |U(0,p)| < \infty.$$

Ее решение

$$U(r,p) = \tfrac{u_0}{p}\frac{I_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a}r\right)}{I_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a}r_0\right)}$$

— однозначная аналитическая функция, особыми точками которой являются простые полюсы $p_0 = 0$, $p_n = -\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2$, $n \in \mathbf{N}$. Оригинал восстанавливается с помощью 2-й теоремы разложения

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{p=p_n}\left(U(r,p)\,e^{p_n t}\right),$$

что эквивалентно выражению, приведенному в ответе.

3.151 $u(r,t) = u_0\Big[1 - 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{(\alpha^2+\mu_n^2)J_0(\mu_n)}\Big]$, $\mu_n > 0$ — корень уравнения $\alpha J_0(\mu) - \mu J_1(\mu) = 0$, $\alpha = r_0 h$.

3.152 $u(r,z) = 2u_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_{2n}r}{r_0}\right) - J_0(\mu_{2n})}{\mu_{2n}^2 J_0(\mu_{2n})}e^{-\frac{\nu\mu_{2n}^2}{u_0 r_0^2}}\right)$, $\mu_{2n} > 0$ — нуль функции $J_2(\mu)$.

3.153 $u(r,t) = u_0(t) - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t u_0(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{\infty} f(\xi)e^{-\left(\frac{a\xi}{r_0}\right)^2(t-\tau)}d\xi$, если $u_0(t) = u_0$, то $u(r,t) = u_0\left[1 - \int\limits_0^{\infty} f(\xi)e^{-\left(\frac{a\xi}{r_0}\right)^2 t}d\xi\right]$, $f(\xi) = \frac{2}{\pi\xi}\frac{J_0(\xi)Y_0(\frac{r}{r_0}\xi) - Y_0(\xi)J_0(\frac{r}{r_0}\xi)}{J_0^2(\xi)+Y_0^2(\xi)}$.

Указание. Использовать соответствие (3.46).

3.154 $u(r,t)=u_0-\frac{2h}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(hJ_0(\xi r_0)+\xi J_1(\xi r_0))Y_0(\xi r)-(hY_0(\xi r_0)+\xi Y_1(\xi r_0))J_0(\xi r)}{(hJ_0(\xi r_0)+\xi J_1(\xi r_0))^2+(hY_0(\xi r_0)+\xi Y_1(\xi r_0))^2}\,\frac{e^{-D\xi^2 t}}{\xi}d\xi.$

3.155 $u(t)=\frac{8ku_0}{a^2C_0}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-a^2\xi^2 t}}{(\xi Y_0(\xi r_0)-\alpha Y_1(\xi r_0))^2+(\xi J_0(\xi r_0)-\alpha J_1(\xi r_0))^2}\,\frac{d\xi}{\xi},\quad \alpha=\frac{2\pi k r_0}{a^2C_0}.$

3.156 $u(r,t)=u_0\left[1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\xi)Y_0(\frac{r}{r_0}\xi)-Y_0(\xi)J_0(\frac{r}{r_0}\xi)}{J_0^2(\xi)+Y_0^2(\xi)}\,\frac{e^{-\left(\frac{a\xi}{r_0}\right)^2 t}}{\xi}d\xi\right].$

3.157 $u(r,z,t)=\frac{8r_0q_0}{k\pi^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\cos\frac{\alpha_n z}{l}}{2n+1}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\left(\frac{a}{r_0}\right)^2\left(\xi^2+\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)^2\right)t}}{\xi^2+\left(\frac{\alpha_n r_0}{l}\right)^2}f(\xi)d\xi,$
$f(\xi)=\frac{J_1(\xi)Y_0(\frac{r}{r_0}\xi)-Y_1(\xi)J_0(\frac{r}{r_0}\xi)}{J_1^2(\xi)+Y_1^2(\xi)},\qquad \alpha_n=\frac{2n+1}{2}.$ Указание. Применить преобразование Лапласа и полученную задачу решать методом Фурье. Для восстановления оригинала воспользоваться соответствием (3.47).

3.160 1) $\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi p}{2}}$, $0<\mathbf{Re}\,p<1$; 2) $\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}$, $-1<\mathbf{Re}\,p<1$.

3.162 1) $\frac{r_0^{\alpha+p}}{\alpha+p}$, $\mathbf{Re}\,p>-\alpha$; 2) $-\frac{r_0^{\alpha+p}}{\alpha+p}$, $\mathbf{Re}\,p<-\alpha$;
3) $\frac{\pi}{p\sin\pi(p+\alpha)}$, $-\alpha<\mathbf{Re}\,p<1-\alpha$; 4) $\Gamma(p)$, $\mathbf{Re}\,p>0$;
5) $\frac{\Gamma(p)}{a^p}\sin\frac{\pi p}{2}$, $-1<\mathbf{Re}\,p<1$; 6) $\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos\frac{\pi p}{2}$, $0<\mathbf{Re}\,p<1$

3.163 1) $\frac{\pi}{p\sin\pi p}$, $-1<\mathbf{Re}\,p<0$; 2) $\frac{\pi}{p}\,ctg\,\pi p$, $-1<\mathbf{Re}\,p<0$;
3) $\frac{\pi}{p}\,tg\,\pi p$, $-\frac{1}{2}<\mathbf{Re}\,p<0$.

3.166 1) $\frac{\pi U(p)}{2\sin\frac{\pi p}{2}}$, $0<\mathbf{Re}\,p<2$; 2) $\frac{\pi}{p}\,tg\,\pi p\,U(p)$, $-\frac{1}{2}<\mathbf{Re}\,p<0$.

3.168 1) $\Gamma(p)U(1-p)$; 2. $\frac{\pi ctg\,\pi p}{p}U(1-p)$; 3) $\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}U(1-p)$;
4) $\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}U(2-p)$.

3.171 1) $\frac{1}{p^2}$, $\mathbf{Re}p>0$; 2) $\frac{2}{p^3}$, $\mathbf{Re}p<0$; 3) $\frac{U(p)}{p^2}$, $\mathbf{Re}p<0$. Указание к п.3. Записать интеграл в виде $\int_0^\infty \eta(1-\frac{r}{\rho})\ln\frac{r}{\rho}\frac{u(\rho}{\rho}d\rho$.

3.172 1) $\frac{r^2}{1+r}$; 2) $\frac{\sqrt{r}}{1+r}$; 3) $\frac{(-1)^n}{n!}\ln^n r\,\eta(1-r)$; 4) $r\ln|1-r|$, 5) $\frac{1}{4}re^{-\sqrt{r}}$; 6) $\ln(r^2+1)$.

3.173 $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}\,arcctg\,\frac{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}}{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}}.$

3.174 $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}arctg\,\frac{r^{\frac{\pi}{\alpha}}-r_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{2r_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}r^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}$. **3.175** $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}arctg\,\frac{r^{\frac{\pi}{\alpha}}-r_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{2r_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}r^{\frac{\pi}{2\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}$.

3.176 $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}\,arcctg\,\frac{r-r_0}{2\sqrt{rr_0}\cos\frac{\varphi}{2}}$. **3.177** $u(r,\varphi)=\frac{u_0}{\pi}\,arcctg\,\frac{r_0-r}{2\sqrt{rr_0}\cos\frac{\varphi}{2}}$.

3.178 Указание. Для восстановления прообраза применить теорему умножения (3.58) и соответствие (3.55).

3.179 $u(r,\varphi)=\frac{q_0 l}{\pi k}\left[\frac{1}{2}(1-\frac{r}{l}\cos\varphi)\ln\frac{1+\frac{l}{r}+2\sqrt{\frac{l}{r}}\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\frac{l}{r}-2\sqrt{\frac{l}{r}}\cos\frac{\varphi}{2}}-\right.$
$\left.-\frac{r}{l}\sin\varphi\cdot arcctg\,\frac{1-\frac{r}{l}}{2\sqrt{\frac{l}{r}}\sin\frac{\varphi}{2}}+2\sqrt{\frac{r}{l}}\cos\frac{\varphi}{2}\right].$

3.180 $u(0,y)=\frac{q_0 l}{\pi k}\left[(1-\frac{y}{l})\ln\frac{1+\frac{y}{l}}{|1-\frac{y}{l}|}-\frac{y}{l}\ln\frac{y}{l}\right]$.

3.181 $q(r,\frac{\pi}{4})=\frac{q_0}{\pi\sqrt{2}}\left(\ln\frac{r_0 2+\sqrt{2}r_0 r+r^2}{r_0^2-\sqrt{2}r_0 r+r^2}+2\,arctg\,\frac{\sqrt{2}r_0 r}{r_0^2-r^2}\right)$.

3.182 $u(r,\varphi)=\frac{q_0}{4\pi k}\ln\frac{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2pi}{\alpha}}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\varphi+\varphi_0)}{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2pi}{\alpha}}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\varphi-\varphi_0)}$.

3.183 $u(r,\varphi)=\frac{q_0}{2\pi k}\ln\frac{1+\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{pi}{\alpha}}+2\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}{1+\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{pi}{\alpha}}-2\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}$.

3.184 $\psi(r,\varphi)=\frac{q_0}{4\pi}\ln\rho_1\rho_2,\qquad \rho_{1,2}=r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(r_0 r)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\varphi\pm\varphi_0)$.

3.185 $u(r,\varphi)=q\ln\frac{r+r_0-2\sqrt{rr_0}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}}{r+r_0-2\sqrt{rr_0}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}}$. **3.186** $\sigma_{1,2}(r)=-\frac{q}{\alpha r}\frac{1}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}+\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}$.

3.187 $\sigma(r)=-\frac{\pi p}{2\alpha^2}\frac{(rr_0)^{\frac{\pi}{2\alpha}-1}(r^{\frac{\pi}{\alpha}}-r_0^{\frac{\pi}{\alpha}})}{(r^{\frac{\pi}{\alpha}}+r_0^{\frac{\pi}{\alpha}})^2}$. **3.188** $\sigma(r)=\frac{\pi p}{2\alpha^2}\frac{(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}{(r^{\frac{\pi}{\alpha}}+r_0^{\frac{\pi}{\alpha}})^2}$.

3.189 $A(r,\varphi)=-\frac{J}{c}\ln\rho_1\rho_2+C$, где $\rho_{1,2}$ те же, что в ответе к задаче 3.184. Указание. См. задачу 1.332.

3.192 $\mathcal{H}_0[f](\lambda)=e^{-r_0\lambda}$. Указание. См. соответствие из задачи 3.74 п.1.

3.193 $\mathcal{H}_1[f](\lambda)=e^{-r_0\lambda}$. Указание. См. соответствие из задачи 3.74 п.3.

3.194

$$\mathcal{H}_0[f](\lambda)\equiv\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}J_0(\lambda r)\,dr=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\lambda^2}{8\alpha}}I_0\left(\frac{\lambda^2}{8\alpha}\right);\qquad(3.76)$$

$$\mathcal{H}_0[f](\lambda)\equiv\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}J_0(\lambda r)\,r\,dr=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}.$$

Указания. п.1. В силу четности подынтегральной функции интегрирование по λ можно распространить на всю числовую ось $(-\infty,\infty)$, затем представить $J_0(\lambda r)$ в интегральной форме, проинтегрировать по λ и снова применить интегральное представление для $J_0(z)$; п.2. Разложить произведение $J_0(\lambda r)\,r$ в степенной ряд и проинтегрировать почленно.

3.195 $f(r)=\frac{1}{2a^2t}I_0\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\,e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}$. Решение. Вычисление интеграла

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)\,e^{-a^2\lambda^2 t}\lambda\,d\lambda=\frac{1}{2a^2t}I_0\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\,e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}\qquad(3.77)$$

сводится к суммированию ряда

$$\frac{1}{2a^2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n1}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2\alpha^k\beta^{n-k},\quad\alpha=\frac{r^2}{4a^2t},\ \beta=\frac{\rho^2}{4a^2t},$$

получающегося интегрированием разложения произведения $J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)$ в степенной ряд. Из сравнения коэффициентов при x^k в тождестве

$$(1+\alpha x)^n(1+\beta x)^n=(1+\mu x+\nu x^2)^n,\ \ \mu=\alpha+\beta,\ \nu=\alpha\beta$$

вытекает соотношение

$$\tfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2\alpha^k\beta^{n-k}\sum_{k=0}^{2k\le n}\tfrac{\mu^{n-2k}\nu^k}{(k!)^2(n-2k)!},$$

подстановка которого в двойной ряд и изменение порядка суммирования дают

$$\tfrac{1}{2a^2t}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2k\le n}\tfrac{(-1)^n\mu^{n-2k}\nu^k}{(n-2k)!(k!)^2}=\tfrac{1}{2a^2t}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\nu^k\mu^{n-2k}}{(k!)^2(n-2k)!}=$$
$$=\tfrac{1}{2a^2t}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\nu^k}{(k!)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^m\mu^m}{m!}=\tfrac{1}{2a^2t}I_0(2\sqrt{\nu})e^{-\mu}.$$

3.196

$$1)\quad\int_0^\infty J_0(\lambda r)\sin kr\,dr\,\frac{\eta(k-\lambda)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\,; \tag{3.78}$$

$$2)\quad\int_0^\infty J_0(\lambda r)\cos kr\,dr\,\frac{\eta(\lambda-k)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,; \tag{3.79}$$

$$3)\quad\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\sin kr}{r}\,dr=\begin{cases}\arcsin\frac{k}{\lambda}, & k<\lambda,\\ \frac{\pi}{2}, & k>\lambda.\end{cases} \tag{3.80}$$

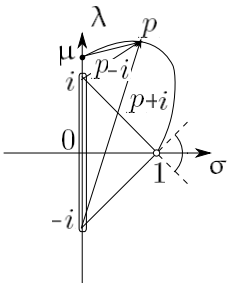

Рис. 3.4

Решение. Исходной является формула (3.34), в которой $p=+0+i\,\mu$. Чтобы находить значения выбранной ветви корня $\sqrt{p^2+1}=\sqrt{(p+i)(p-i)}$ в различных точках, можно множителям $p+i$ и $p-i$ при $p=1$ приписать соответственно аргументы $\pi/4$ и $-\pi/4$ (рис. 3.4). При движении конца вектора p из точки $p{=}1$ в точку $p{=}i\mu$, например, вдоль пути L аргументы, меняясь непрерывно, становятся равными $\pi/2$. Следовательно, если $\mu{>}1$, то корень $\sqrt{p^2+1}|_{p=i\mu}=\sqrt{|-\mu^2+1|e^{i\pi}}{=}i\sqrt{\mu^2-1}$. Такие же рассуждения показывают, что корень $\sqrt{p^2-1}|_{p=-i\,\mu}=-i\sqrt{\mu^2-1}$, где $\mu{>}1$. Если же $p{=}\pm i\,\mu$ и

$0\le\mu<1$, то значения корня $\sqrt{p^2+1}|_{p=\pm i\,\mu}= = \sqrt{1-\mu^2}$. Почленная разность двух выражений, получающихся при подстановке в (3.34) значений $p=\pm i\,\mu$, дает

$$\int_\tau^\infty J_0\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\sin\mu t\,dt=\frac{\cos\tau\sqrt{\mu^2-1}}{\sqrt{\mu^2-1}},\quad 0\le\mu, \tag{3.81}$$

что совпадает с (3.81) при $\tau=0$, $t=\lambda r$, а почленная сумма приводит к соотношению (3.79). Формула (3.80) получается интегрированием тождества (3.79) по k. **3.199** $u(r,z)=\frac{u_0r_0^2(r_0+z)}{r^2+(r_0+z)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Указание. См. соответствие из задачи 3.192. **3.200** $u(r,\varphi,z)=\frac{u_0r_0^2r\cos\varphi}{r^2+(r_0+z)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Указание. Использовать соответствие из задачи 3.193. **3.201** $u(r,\varphi,z)=\frac{A}{r^2+(r_0+z)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Указание. Применить соответствие из задачи 3.192.

3.202 $u(r,\varphi,z)=\frac{A}{r}\left(1-\frac{r_0+z}{\sqrt{r^2+(z+r_0)^2}}\right)\cos\varphi$. Указание. Применить соответствие из задачи 3.193. **3.203** $u(\mathbf{r})=\frac{Q}{(\varepsilon+1)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3.204 $u(r,z)=u_0\left(1-r_0\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-D\lambda^2t}d\lambda\right)$.

3.205 $u(r,z)=\frac{J}{2\pi\sigma}\int\limits_0^\infty\frac{sh\,\lambda z}{ch\,\lambda l}J_0(\lambda r)\,d\lambda$, $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u$.

3.206 $u(r,z)=u_0r_0\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda r_0)J_0(\lambda r)\,d\lambda$. **3.207** $u(r,z)=\frac{Q_0}{2\pi k}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\lambda d\lambda}{\lambda+h}$.

3.208 Плотность тока $\mathbf{j}=-\sigma\nabla u$;

1) $u(r,z)=\frac{I}{\pi r_0\sigma}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda r_0)J_0(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda}$;

2) $u(r,z)=\frac{J}{2\pi\sigma}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r)\,d\lambda$;

3.209 $u(r,l)=\frac{Q_0}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\lambda r)d\lambda}{k_1sh\,\lambda l+k_2ch\,\lambda l}$; если $k_1=k_2$, то $u(r,z)=\frac{Q_0}{2\pi\sqrt{r^2+z^2}}$.

3.210 $q(r,0)=ku_0\sqrt{\pi\alpha}\,e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}\left[\alpha r^2I_1\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right)-(\alpha r^2-1)I_0\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right)\right]$.

Асимптотические представления решения:

$q(r,0)=-\frac{ku_0}{2\alpha r^3}\left(1+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$, $r\to\infty$,

$q(r,0)=ku_0\sqrt{\pi\alpha}\left(1-\frac{3\alpha r^2}{2}+O(r^4)\right)$, $r\to0$.

Указание. Применить формулы (3.77), (3.76).

3.212 $u(r,z)=\frac{Q_0}{4\pi k}\int\limits_0^\infty\frac{sh\,\lambda(l-|z-\frac{l}{2}|)+sh\,\lambda(z-\frac{l}{2})}{ch\,\lambda l}J_0(\lambda r)d\lambda$.

3.213 $\sigma=\frac{u_0}{2\pi^2}\frac{1}{\sqrt{r_0^2-r^2}}$. Указание. Потенциал u(r,z) электростатического

поля диска является решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r, \ \ 0 < z,$$
$$u(r,0) = u_0, \ \ 0 \le r < r_0, \quad u_r(r,0) = 0, \ \ r_0 < r,$$
$$|u(0,z)| < \infty, \quad u(r,\infty) = u(\infty,z) = 0.$$

Решение задачи для изображения имеет вид $\mathcal{H}_0[\,u\,](\lambda)A(\lambda)e^{-\lambda z}$, где функция $A(\lambda)$ определяется условиями:

$$\int\limits_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda = u_0, \quad 0 \le r < r_0,$$
$$\int\limits_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda r)\lambda^2 d\lambda = 0, \quad r_0 < r.$$

Из соотношений (3.80) и (3.78) следует, что этим условиям удовлетворяет функция $A(\lambda) = \frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda^2}$. **3.214** Потенциал скоростей

$$\psi(r,z,t) = -\tfrac{Q\sqrt{g}}{2\pi}\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{g\lambda}t\right) J_0(\lambda r)e^{\lambda z}\sqrt{\lambda}\,d\lambda.$$

Форма поверхности

$$\zeta(r,t) = -\,\tfrac{1}{g}\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{z-0}\tfrac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \cos\left(\sqrt{g\lambda}t\right) J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda.$$

Приближенное решение

$$\zeta(r,t) = \tfrac{Qgt^2}{4\sqrt{2}\pi r}\cos\tfrac{gt^2}{4r}.$$

Указание. Начальную форму поверхности следует представить с помощью δ-функции. Для построения решения последовательно применить интегральные преобразования Фурье и Ганкеля. При исследовании решения для больших r и t воспользоваться асимптотикой функций Бесселя и асимптотической формулой

$$\textstyle\int_a^b f(\lambda)\,e^{-ih(\lambda)t}d\lambda = f(\lambda_0)\sqrt{\frac{2\pi}{t|h''(\lambda_0)|}}\,e^{-i[h(\lambda_0)t+\frac{\pi}{4}sign\,h''(\lambda_0)]}, \quad t\to\infty,$$

где λ_0 — стационарная точка вида: $h'(\lambda_0) = 0, \ h''(\lambda_0) \ne 0 \ \ \lambda \in [\,a\,,\,b\,]$.

3.215 $\zeta(r,t) = -\frac{I}{2\pi\rho g}\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{\lambda g}t\right) J_0(\lambda r)\lambda\sqrt{\lambda}\,d\lambda$. Приближенное решение $\zeta(r,t) = -\frac{Igt^3}{8\sqrt{2}\pi\rho r^4}\cos\frac{gt^2}{4r}$.

3.216 $u(r,z,t) = \frac{Q}{16\pi klt}\left(erf\frac{l+z}{2a\sqrt{t}} + erf\frac{l-z}{2a\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$.

Указание. Применить преобразования Фурье, Ганкеля, Лапласа.

3.217 $u(r,\varphi,z,t) = \frac{Q}{16\pi klt}\left(erf\frac{l+z}{2a\sqrt{t}} + erf\frac{l-z}{2a\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{r^2}{4a^2t}-\frac{v^2t}{4a^2}+\frac{vr\cos\varphi}{2a^2}}$.

3.218 $u(r,t) = \frac{I\eta(at-r)}{2\pi\rho\sqrt{a^2t^2-r^2}}$. **3.221** $\Phi(r,u_T) = \frac{Q_0\varphi_T}{4\pi r}e^{\frac{\tau_T}{L^2}}\int\limits_{\frac{\tau_T}{L^2}}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{r^2}{4L_2x}\right)}\frac{dx}{x}$,

где $\varphi_T = \varphi(u_T)$ (см. (1.146)), $\tau_T = \tau(u_T)$ (см. (1.64)), u_T — летаргия

теплового нейтрона. Указание. Постановка задачи (см. задачу 1.189):

$$\Delta\Phi(r,u)-\tfrac{1}{L^2}\Phi(r,u)=-\tfrac{Q_0\varphi(u)\,e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{4piD\tau},\quad 0<r,\ \ 0\le u\le u_T,$$
$$\lim_{r\to\infty}\Phi(r,u)=0.$$

В результате применения преобразования Ганкеля, в котором участвует формула (3.70), решение запишется в виде

$$\Phi(r,u)=\tfrac{Q_0\varphi(u)}{2\pi D}\int\limits_0^\infty \tfrac{J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda^2\tau}\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+\frac{1}{L^2}}.$$

Отсюда и из интегральных соотношений (3.69) и (3.70) вытекает, что функция $\chi=\frac{2\pi D\Phi(r,u)}{Q_0\varphi(u)}$ является решением задачи Коши

$$\chi_\tau-\tfrac{1}{L^2}\chi=-\tfrac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{2\tau},\quad 0<\tau,$$
$$\chi(r,0)=K_0(\tfrac{r}{L}).$$

Следовательно,

$$\chi(r,u)=e^{\frac{\tau}{L^2}}\Big[K_0(\tfrac{r}{L})-\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\tau}{L^2}} e^{-\left(x+\frac{r^2}{4L^2x}\right)}\tfrac{dx}{x}\Big].$$

Остается применить интегральное представление

$$K_0(r)=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\left(x+\frac{r^2}{4L^2x}\right)}\tfrac{dx}{x},$$

которое получается из интегрального представления

$$K_\nu(z)=\int\limits_0^\infty e^{-z\,ch\,t}ch\,\nu t\,dt$$

независимыми заменами $x=e^t$ и $x=e^{-t}$ и объединением двух интегралов в один с пределами 0 и ∞.

Глава 4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейный оператор

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy \tag{4.1}$$

или

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_a^x K(x,y)u(y)dy \tag{4.2}$$

определяет линейное интегральное уравнение

$$u = \mu\mathcal{K}u + f, \tag{4.3}$$

где ядро $K(x,y)$ оператора $\mathcal{K}$ и $f(x)$ — известные функции, μ — комплексный параметр. Уравнение (4.3) называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода в случае оператора (4.1) или интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода в случае оператора (4.2). Возможна еще одна конструкция линейного интегрального уравнения: $\mathcal{K}u{=}f$; оно называется в зависимости от

вида оператора интегральным уравнением Фредгольма или Вольтерра 1-го рода.

Во многих случаях определение количественных характеристик различных физических процессов приводит к решению интегральных уравнений. Они встречаются при моделировании задач механики, теплопроводности, электродинамики и в других областях, применяются в исследовании дифракции электромагнитных волн, для решения геофизических задач ([21]). Широкий класс обратных задач, решение которых не обладает свойством устойчивости, связан с уравнением Фредгольма 1-го рода. Это уравнение приобретает все большее значение благодаря развитию методов решения некорректных задач.

Использование интегральных уравнений в математической физике обусловлено также возможностью сведения задачи для дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному уравнению. Соответствующая процедура основана на применении потенциалов, функции Грина, характеристик и других средств. Аппарат интегральных уравнений позволяет устанавливать свойства решения исходной дифференциальной задачи, строить точное или приближенное решение, получать различные оценки. Важную роль здесь играет однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$u = \mu \mathcal{K} u. \tag{4.4}$$

Значение параметра μ, при котором уравнение имеет нетривиальное решение, называется характеристическим числом ядра (уравнения), а соответствующие нетривиальные решения — собственными функциями ядра. Уравнение (4.4) непосредственно связано с задачей на собственные значения, которая является основной в методе Фурье. Линейные интегральные уравнения используются для построения и обоснования метода обратной задачи рассеяния, посредством которого получаются солитонные решения ряда нелинейных дифференциальных уравнений математической физики.

Данная глава содержит набор упражнений по решению интегральных уравнений и служит основой для их последующих приложений.

Литература к главе: [11], [14], [33], [60].

4.1. Вывод интегральных уравнений

Пример 4.1. Однородная струна ($0<x<l$) с жестко закрепленными концами находится в равновесии под действием статической нагрузки $F(x)\,\mathbf{e}_u$. Функция $v(x)$, характеризующая отклонение струны от положения равновесия, является решением задачи

$$\begin{array}{l} v_{xx} = -\frac{F(x)}{T_0}, \quad 0 < x < l, \\ v(0) = v(l) = 0. \end{array} \tag{4.5}$$

Для определения $v(x)$ достаточно найти отклонение $G(x,\xi)$ струны, вызванное единичной силой, приложенной в точке $x=\xi$:

$$\begin{array}{l} G_{xx} = -\frac{1}{T_0}\delta(x-\xi), \quad 0 < x < l, \\ G(0,\xi) = G(l,\xi) = 0. \end{array} \tag{4.6}$$

Действительно, $F(x)$ может быть представлена суперпозицией сосредоточенных сил

$$F(x) = \int\limits_0^l F(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi,$$

результирующее отклонение от действия которых

$$v(x) = \int\limits_0^l F(\xi)\,G(x,\xi)\,d\xi. \tag{4.7}$$

Утверждение, что $v(x)$ — решение задачи (4.5) проверяется непосредственно. Для построения функции $G(x,\xi)$ задачу (4.6) удоб-

нее поставить в эквивалентной форме (см.10.15)):

$$G_{xx} = 0, \quad 0 < x < \xi, \quad \xi < x < l,$$
$$G(0,\xi) = G(l,\xi) = 0,$$
$$[\,G\,]_\xi = 0, \quad [\,G_x\,]_\xi = -\tfrac{1}{T_0}.$$

Отсюда следует, что $G{=}Ax$ при $x{<}\xi$; и $G{=}B(l-x)$ при $\xi{<}x$, где A и B удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A\xi - B(l-\xi) = 0, \\ A + B = \frac{1}{T_0}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$G(x,\xi) = \frac{1}{T_0 l} \begin{cases} (l-\xi)\,x, & 0 \le x \le \xi, \\ \xi\,(l-x), & \xi \le x \le l. \end{cases}$$

Пусть в струне возбуждено одно из собственных колебаний с частотой ω. Уравнение колебаний струны $\rho(x)u_{tt} = T_0 u_{xx}$ посредством подстановки $u(x,t) = v(x)\sin(\omega t{+}\alpha)$ сводится к уравнению

$$v_{xx} = -\frac{\omega^2 \rho(x)}{T_0} v(x), \quad 0 < x < l,$$

которое нужно решать при условиях $v(0){=}v(l){=}0$, т.е. функция $v(x)$ — решение задачи (4.5). По формуле (4.7)

$$v(x) = \mu \int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)v(\xi)\,d\xi, \quad \mu = \omega^2. \tag{4.8}$$

Если ввести новые функции

$$w(x) = \sqrt{\rho(x)}\,v(x), \quad K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\,G(x,\xi),$$

то получится уравнение

$$w(x) = \mu \int_0^l K(x,\xi)w(\xi)\,d\xi \tag{4.9}$$

с симметричным ядром. Известно, что собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны на промежутке $(0, l)$, характеристические числа вещественны, имеют конечную кратность, образуют не более чем счетное множество без конечных предельных точек.

Итак, задача определения амплитуд (с точностью до постоянного множителя) и частот собственных колебаний струны сведена к однородному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.

4.1. Пусть $G(x, \xi)$ — статическое отклонение сечения с координатой x упругого стержня, вызванное поперечной единичной силой, приложенной в сечении с координатой ξ. Получить интегральное уравнение для определения собственных частот поперечных колебаний стержня. Плотность стержня $\rho(x)$, площадь поперечного сечения $S(x)$.

4.2. С возрастанием скорости вращения вала возникают поперечные колебания. Вывести интегральное уравнение для определения критической угловой скорости, если поперечная единичная сила, приложенная в сечении с координатой ξ, вызывает статическое отклонение $G(x, \xi)$ сечения с координатой x от горизонтального положения равновесия. Плотность стержня $\rho(x)$, площадь поперечного сечения $S(x)$.

4.3. Существуют физические системы, реакция $v(t)$ которых на внешнее воздействие $u(t)$ зависит не только от значения функции $u(t)$ в данный момент времени t, но и от значений во все предыдущие моменты, то есть система обладает памятью об истории развития процесса. В приложениях применяется следующая форма линейной зависимости между $v(t)$ и $u(t)$:

$$v(t) = k\,u(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t, \tau) u(\tau)\, d\tau, \tag{4.10}$$

где первое слагаемое представляет собой мгновенную (линейную) зависимость v от t в момент времени t, а второе — выражает

свойство системы помнить о воздействии $u(t)$ в моменты времени, предшествующие моменту t; наследственное ядро $K(t,\tau)$ определено при $\tau < t$.

В прикладных задачах применяются ядра, удовлетворяющие принципу затухающей памяти [58]:

$$\begin{aligned} &K(t,\tau) > 0, \quad K(t,\tau) \text{ — монотонно убывает с ростом t,} \\ &\forall\, \tau \in \mathbf{R} : \lim_{t\to+\infty} K(t,\tau) = 0 \\ &\forall\, t \in \mathbf{R} : \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\, d\tau < \infty. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Второе условие означает, что при $t \to +\infty$ система полностью забывает о внешнем воздействии. Последнее условие обеспечивает сходимость интеграла в (4.10) для любой ограниченной интегрируемой функции $u(t)$. При условиях (4.11)

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau = 0.$$

Доказательство. Для любого $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{0} K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{-T} K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau + \int_{-T}^{0} K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau.$$

Так как несобственный интеграл в правой части равенства сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют t_1 и $T_0{>}0$ такие, что

$$\left| \int_{-\infty}^{-T_0} K(t_1,\tau)u(\tau)\, d\tau \right| \le M \int_{-\infty}^{-T_0} K(t_1,\tau)\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу монотонности ядра по переменой t для любого $t \ge t_1$

$$\left| \int_{-\infty}^{-T_0} K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau \right| \le M \int_{-\infty}^{-T_0} K(t,\tau)\, d\tau \le M \int_{-\infty}^{-T_0} K(t_1,\tau)\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для оценки второго интеграла нужно воспользоваться интегральной теоремой о среднем и поведением ядра при $t \to +\infty$: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого положительного T, например для $T > T_0$, существует t_2, такое, что

$$\left| \int_{-T_0}^{0} K(t_2, \tau) u(\tau) \right| \le M \int_{-T_0}^{0} K(t_2, \tau)\, d\tau = M\, K(t_2, \tau^*) T_0 < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\tau^* \in [-T_0; 0]$. Таким образом, для $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$ выполняются оба неравенства, так что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, t_0 \quad \forall\, t \ge t_0 : \quad \left| \int_{-\infty}^{0} K(t, \tau) u(\tau)\, d\tau \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось установить. Итак, при $t \ge t_0$

$$\int_{-\infty}^{t} K(t, \tau) u(\tau) d\tau = \int_{0}^{t} K(t, \tau) u(\tau) d\tau, \tag{4.12}$$

то есть к моменту $t = t_0$ система полностью забывает предысторию процесса. Чем быстрее затухает память, тем меньше t_0. Если $t_0 \le 0$, то равенство (4.12) выполняется для $t \ge 0$, и соотношение (4.10) принимает вид:

$$v = ku + \mathcal{K}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}u = \int_{0}^{t} K(t, \tau)\, d\tau. \tag{4.13}$$

В данной ситуации можно принять $t = 0$ за начало отсчета времени, полагая, что внешнее воздействие включается в момент времени $t = 0$, а при $t < 0$ функции $v(t) = u(t) = 0$.

Если свойства системы не изменяются со временем, то память от внешнего воздействия в течение времени $t - \tau$ зависит только

от длины $t-\tau$ интервала $(\tau;t)$ и не зависит от его положения на оси $0t$; в этом случае естественно считать, что наследственное ядро является разностным: $K(t,\tau)=K(t-\tau)$.

Примером системы с памятью служит катушка с индуктивностью L, в которую введен однородный магнитный сердечник. Из-за гистерезиса в сердечнике поток $\Phi(t)$ магнитной индукции в катушке в момент времени t зависит от значений тока во все предыдущие моменты времени. Эта зависимость (в практической системе единиц) имеет вид:

$$\Phi(t)=Li(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}M(t-\tau)\,i(\tau)\,d\tau,$$

где первое слагаемое представляет собой мгновенную зависимость Φ от t в момент времени t, а второе — выражает свойство системы помнить о предшествующем воздействии.

Конденсатор с емкостью C, сопротивление R и катушка с индуктивностью L, в которую введен магнитный сердечник, образуют цепь квазистационарного тока (рис.**??**). В момент времени t=0 разность потенциалов между точками A и B равна u_0, а токи i, i_1, i_2 равны нулю. Для сердечника с достаточно быстро затухающей памятью поток $\Phi(t)$ магнитной индукции в катушке в момент времени t определяется формулой:

$$\Phi(t)=Li(t)+\int\limits_{0}^{t}M(t-\tau)i(\tau)\,d\tau,$$

где функция $M(t)$ известна. Показать, что ток через катушку удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$i(t)=\int\limits_{0}^{t}K(t-\tau)i(\tau)\,d\tau+f(t),$$

где

$$K(t)=-\frac{1}{l}[u(t)+R(1-e^{-\frac{t}{RC}})],\quad f(t)=\frac{u_0RC}{L}(1-e^{-\frac{t}{RC}}).$$

4.4. В упругом стержне деформация $\varepsilon(t)$ некоторого элемента при малых деформациях зависит от напряжения / $\sigma(t)$ линейно: $\varepsilon(t) = \sigma(t)/E$, где E — модуль Юнга. Если деформации не малы, то ε и σ связаны нелинейной зависимостью: $\varepsilon(t) = a(\sigma(t))$. Для однородного стержня, изготовленного из нестареющего (свойства не зависят от времени) наследственно-упругого материала с быстро затухающей памятью применяется следующая форма зависимости между ε и σ (см. предыдущую задачу):

$$\varepsilon(t) = a(\sigma(t)) + \int_0^t K(t-\tau)a(\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра относительно функции $a(\sigma)$, решение которого можно записать в виде (см. задачу 4.185)

$$\varepsilon = \frac{a(\sigma)}{1-\mathcal{R}}. \tag{4.14}$$

В случае малой квадратичной нелинейности в книге [47] рассмотрена зависимость ε от σ типа (4.14)

$$\varepsilon = \frac{A\sigma + \gamma B\sigma^2}{1-\mathcal{R}}, \qquad \gamma \ll 1, \tag{4.15}$$

где $A > 0$, и B — константы, $|B| \le A^2$, $\int_0^\infty R(t)\,dt < \infty$.

Показать, что 1) функция $\sigma(x,t)$ является решением нелинейного уравнения с памятью:

$$\frac{\partial^2(A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}(1-\gamma\,\mathcal{R})\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = 0;$$

2) полученное уравнение может быть асимптотически факторизовано (т.е. представлено в виде произведения нескольких сомножителей):

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\sqrt{A+2\gamma B\sigma} \quad \mp \quad \sqrt{\tfrac{1-\gamma\mathcal{R}}{\rho}}\tfrac{\partial}{\partial x}\right) \times \tag{4.16}$$

$$\times \left(\sqrt{A+2\gamma B\sigma}\tfrac{\partial}{\partial t} \quad \pm \quad \sqrt{\tfrac{1-\gamma\mathcal{R}}{\rho}}\tfrac{\partial}{\partial x}\right)\sigma = \mathcal{O}(\gamma^2) \qquad \gamma \to 0;$$

3) прямой волне соответствует уравнение:

$$\sqrt{A\rho}\left(1+\gamma\frac{B}{A}\sigma\right)\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\left(1-\frac{\gamma}{2}\mathcal{R}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right). \tag{4.17}$$

4.5. Уравнение (4.17) заменами $x\sqrt{A\rho}\to x,\ k=-\frac{B}{A}$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma-\frac{k\gamma}{2})+(1-\frac{\gamma}{2}\mathcal{R})\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0, \tag{4.18}$$

где выбрано $k>0$, а ядро R оператора $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям $R(t)\ge 0,\ R'(t)\le 0,\ \int_0^\infty R(t)\,dt<\infty$. Пусть $\sigma=f(t-x)$ — волна, распространяющаяся без изменения формы, $f(z)=0$ при $z<0$. Показать, что функция $f(t)$ — решение интегрального уравнения (см. [47])

$$k\,f^2(t)-\int_0^t R(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau=0. \tag{4.19}$$

4.6. В электроразведке для изучения свойств подземных структур измеряют потенциал на поверхности $z{=}0$ земли, обусловленный постоянным током, поступающим в землю ($z{>}0$) через электроды. Если имеется пласт ($0{<}z{<}l$), то желательно знать потенциал (его измерить невозможно) на границе $z{=}l$ пласта. Показать, что потенциал $u(x,y,l)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\frac{l}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,u(\xi,\eta,l)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}u(x,y,0).$$

4.7. В книге [11] рассмотрена задача восстановления размытого фотоизображения и приведен результат ее решения — восстановленный текст. Вот эта задача. При фотографировании объекта его изображение оказалось не в плоскости α фотопленки, а в некоторой плоскости β, отстоящей от плоскости α на расстоянии h (h мало по сравнению с расстоянием от плоскости α

до линзы в плоскости β). Известны величины: R — радиус линзы, b — расстояние от линзы до плоскости β, S — поверхность фотокадра, $v(x,y)$ — освещенность (ее можно измерить) в точке (x,y) плоскости α. Показать, что функция $u(x,y)$ — освещенность изображения в точке (x,y) плоскости β — является решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$v(x,y) = \int\limits_S E\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right) u(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

где

$$E(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & 0 \le \sigma < r^2, \\ 0 & r^2 < \sigma, \end{cases}$$

r — радиус круга, являющегося изображением точки объекта в плоскости α.

4.8. Частица, масса которой m, колеблется в поле с неизвестной потенциальной энергией $U(x)$, где $U(x)$ четная, монотонно возрастающая при $x > 0$ функция и $U(0) = 0$. Зная зависимость $T(E)$ периода колебаний T от полной энергии T частицы, показать (см.[11]), что $U(x)$ — решение задачи $\frac{dU}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)}$, $U(0) = 0$,
где $\Phi(x)$ — решение уравнения Вольтерра 1-го рода

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int\limits_0^E \frac{dU}{\sqrt{E - U}}.$$

4.9. Плоская электромагнитная волна с компонентами электрического поля $E_x{=}E_y{=}0$, $E_z{=}f(z - ct)$ падает на металлическую полубесконечную иглу, расположенную на положительной части оси $0z$. Пусть результирующее поле $-f(z - ct){+}u$, где u— рассеянная волна. Показать,что

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_\eta^\infty \frac{v(s)\,ds}{s - \xi}, \quad \xi = z - ct,\ \eta = r - ct,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$v(s)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{v(s)\,ds}{\xi - s} = f(\xi).$$

4.10. Звуковая волна, потенциал скоростей в которой $f(x-ct)$, падает на параболический цилиндр $y^2 = 2ax+a^2$, $a>0$. Пусть $f(x-ct)+u$ — потенциал скоростей результирующей волны. Показать, что

$$u(\xi,\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{v(s)\,ds}{\sqrt{s-\xi}},$$

где $v(s)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$v(\xi) = -\frac{\sqrt{a}}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{v(s)\,ds}{(s-\eta+a)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{a} f'(\eta - a).$$

4.11. В бесконечной однородной среде без поглощения (Σ_c=0) действует источник нейтронов с летаргией u=0; мощность источников в единице объема постоянна и равна Q_0. При упругом рассеянии на свободных неподвижных ядрах среды (сечение Σ_s) происходит замедление нейтронов. При условии, что упругое рассеяние нейтрона на ядре в системе центра инерции изотропно, получить следующее интегральное уравнение (уравнение замедления) для плотности потока нейтронов $\Phi(u)$:

$$\Phi(u)\Sigma_s(u) = \int_{\max(u-\ln\frac{1}{\varepsilon},0)}^{u} \Phi(u')\Sigma_s(u')\frac{e^{-(u-u')}}{1-\varepsilon}du' - Q_0\delta(u), \quad (4.20)$$

где $\varepsilon = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$, A — массовое число ядер среды.

4.12. Нейтроны движутся в однородной среде, занимающей ограниченную выпуклую область Ω. При взаимодействии с ядрами происходит либо изотропное (т.е. равномерное по направлениям) рассеяние нейтронов, либо их поглощение ядрами. Макроскопическое сечение (величина, обратная средней длине свободного пробега) рассеяния — Σ_s, поглощения — Σ_c, $\Sigma{=}\Sigma_s{+}\Sigma_c$, плотность источников нейтронов — $F(\mathbf{r},t)$. Показать, что при условиях 1–3 задачи 1.191 плотность потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Пайерлса:

$$\Phi(\mathbf{r},t){=}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\Sigma_s\Phi\left(\mathbf{r}',t{-}\frac{|\mathbf{r}'{-}\mathbf{r}|}{v}\right){+}F\left(\mathbf{r}',t{-}\frac{|\mathbf{r}'{-}\mathbf{r}|}{v}\right)\right]\frac{e^{-\Sigma|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'{-}\mathbf{r}|^2}d\mathbf{r}'.$$

4.13. Решить предыдущую задачу в случае неоднородной среды с характеристиками $\Sigma_s(\mathbf{r})$ и $\Sigma_c(\mathbf{r})$.

4.14. В однородном слое ($-\infty \le a < x < b \le \infty$) движутся нейтроны; плотность нейтронов и плотность источников зависят только от x. Показать, что стационарное уравнение Пайерлса (см. задачу 4.12) может быть преобразовано к виду:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b[\Sigma_s\Phi(\xi)+F(\xi)]E_1(\Sigma|\xi-x|)\,d\xi.$$

4.15. Показать, что уравнение Пайерлса, описывающее движение нейтронов в неоднородном слое (см. предыдущую задачу), может быть приведено к виду:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b[\Sigma_s(\xi)\Phi(\xi)+F(\xi)]E_1(\overline{\Sigma}(x,\xi)|\xi-x|)\,d\xi,$$

где

$$\overline{\Sigma}_s = \frac{1}{\xi-x}\int\limits_x^{\xi}\Sigma(\eta)\,d\eta$$

— среднее значение сечения на промежутке (x, ξ).

4.16. В однородном слое $(0<x<H)$ движутся нейтроны, столкновение которых с ядрами сопровождается изотропным (т.е. равномерным по направлениям) рассеянием, и выполнены условия 1–3 задачи 1.191. Распределение нейтронов не зависит от времени и описывается функцией $\Phi(x, \mu)$ (см. задачу 1.196). Поток нейтронов, поступающих в слой через поверхность $x=l$, определяет функцию $\Phi(l, \mu)=\chi(\mu)$, а поверхность $x=0$ граничит с вакуумом. Показать, что плотность нейтронов $n(\xi)$, где $\xi=x\alpha_s$ — безразмерная переменная, удовлетворяет уравнению Милна:

$$n(\xi) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\Delta} K(\xi - \eta)\, n(\eta)\, d\eta + f(\xi), \tag{4.21}$$

$$K(s) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-\frac{|s|}{\mu}}\, d\mu, \quad f(\xi) = \int_{-1}^{0} \chi(\mu) e^{\frac{\Delta - \xi}{\mu}}\, d\mu, \quad \Delta = H\alpha_s.$$

4.17. Решить задачу 4.16 для полупространства $(0<x)$, если на бесконечности задан поток нейтронов постоянной плотности в отрицательном направлении оси $0x$.

4.18. Точечный изотропный источник света силы I расположен между двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = l$ с коэффициентами отражения α_1 и α_2 (осветительная бомба между земной поверхностью и облаками), расстояние источника от плоскостей l_1 и l_2, $l_1+l_2 = l$. Считая, что плоскости отражают свет по закону Ламберта (плотность излучения не зависит от направления), показать, что освещенности E_1 и E_2 плоскостей удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$E_1(r) = \frac{\alpha_2 l^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(\rho)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + \eta - y)^2 + l^2]^2} + \frac{I l_1}{(r^2 + l_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_2(r) = \frac{\alpha_1 l^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_1(\rho)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + \eta - y)^2 + l^2]^2} + \frac{I l_2}{(r^2 + l_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

4.19. Математический маятник (масса m, длина l), подвешенный в поле тяжести, совершает колебания конечной амплитуды под действием силы $F(t)=F_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$. Функция $F(t)$ — четная периодическая (с периодом T) и нечетная относительно $t=\frac{T}{4}$. Имеет ли нелинейное уравнение колебаний решение $u(t)$ ($u(t)$ — угловое отклонение маятника от положения равновесия) с такими же свойствами? Если на промежутке $(0,\ \frac{T}{4})$ существует решение $u(t)$, удовлетворяющее граничным условиям $u'(0)=u(\frac{T}{4})=0$, то посредством четного продолжения на промежуток $(-\frac{T}{4},\ \frac{T}{4})$, нечетного — на промежуток $(-\frac{T}{4},\ \frac{3T}{4})$ и периодического продолжения (с периодом T) на ось $0t$ получается решение с требуемыми свойствами. С другой стороны, если решение $u(t)$ обладает указанными свойствами, то оно удовлетворяет граничным условиям. Таким образом, для нелинейного уравнения колебаний ставится краевая задача

$$u''(t) + \frac{g}{l} \sin u(t) = \frac{F_0}{ml} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad 0 < t < \frac{T}{4},$$
$$u'(t) = u(\tfrac{T}{4}) = 0.$$

Показать, что эта задача сводится (с помощью метода из примера 4.1) к нелинейному интегральному уравнению (уравнению Гаммерштейна)

$$v(t) = \int_0^{\frac{T}{4}} G(t,\tau) \sin[v(\tau) - h(\tau)]\, d\tau,$$

где

$$v(t) = u(t) + h(t), \quad h(t) = \frac{F_0 T^2}{4\pi^2 ml} \cos \frac{2\pi t}{T},$$
$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \tau, & 0 \le t \le \tau, \\ \frac{T}{4} - t, & \tau \le t \le \frac{T}{4}. \end{cases}$$

4.20. Решить предыдущую задачу, если на маятник действует сила $F_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$.

4.21. В однородном полупространстве ($x>0$) диффундируют частицы двух сортов; коэффициенты диффузии D_1 и D_2, начальные концентрации $u_1(x,0)=u_{10}$ и $u_2(x,0)=u_{20}$ — константы, плотность потока через границу $x=0$ частиц каждого сорта пропорциональна произведению их концентраций на границе (коэффициенты пропорциональности α_1 и α_2 известны). Показать, что концентрация на границе

$$u_i(0,t)=\tfrac{u_{i0}}{2\gamma_i}\,(v(t)-\gamma_1-\gamma_2)\,,\qquad \gamma_i=\tfrac{u_{i0}\,\alpha_{3-i}}{2\sqrt{\pi D_{3-i}}},\qquad i=1,2,$$

где $v(t)$ — решение нелинейного интегрального уравнения

$$v(t)=\int\limits_0^t \frac{v^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}-2(\gamma_1-\gamma_2)^2\sqrt{t}+\gamma_1+\gamma_2.$$

4.22. Задача о таутохроне. Точечная масса M движется в плоскости $X0Y$ под действием силы тяжести ($\mathbf{e}_g=-\mathbf{e}_y$) без начальной скорости из точки $A(\xi,\eta)$, $\xi>0$ до точки $B(\xi_0,0)$, $\xi_0>\xi$. Траектория точки M выбрана так, что время t движения из A в B есть заданная функция ординаты η : $t=f(\eta)$. Показать, что траектория определяется уравнением

$$x=\int\limits_0^y \sqrt{\phi^2(z)+1}\,dz,$$

где $\phi(z)$ — решение интегрального уравнения Абеля

$$\int\limits_0^\eta \frac{\phi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta-y}}=-\sqrt{2g}f(y).$$

4.23. Показать, что задача Коши

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x),\quad x<0,$$
$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x)=\int\limits_0^x K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где

$$u(x)=y^{(n)}(x),\quad K(x,\xi)=-\textstyle\sum_{m=1}^n a_m(x)\frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

4.2. Решение интегральных уравнений

Пример 4.2. В уравнении Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

ядро $K(x,y)$ и правая часть $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции. Из уравнения следует: если

$$K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K_x^{(n-1)}(a,a) = 0,\ 0 < K_x^{(n)}(a,a) < \infty,$$

то $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$; если

$$K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K_x^{(n-1)}(a,a) = 0,\ K_x^{(n)}(a,a) = \infty,$$

то $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Если ядро имеет интегрируемую степенную или логарифмическую особенность при $x = y$, то $f(x)$ — непрерывная функция.

Один из методов решения уравнения данного типа — дифференцирование уравнения (точнее, тождества, полученного подстановкой в уравнение решения $u(x)$). Решение уравнения

$$\int_a^x (x^2y - xy^2)u(y)dy = f(x),\quad f(a) = f'(a) = 0$$

достигается делением обеих частей на x

$$\int_a^x (xy - y^2)u(y)dy = \tfrac{f(x)}{x}$$

с последующим двукратным дифференцированием:

$$\int_a^x yudy = \tfrac{d}{dx}\Big(\tfrac{f(x)}{x}\Big),\quad xu(x) = \tfrac{d^2}{dx^2}\Big(\tfrac{f(x)}{x}\Big).$$

Решение: $u(x) = \frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}\big(\frac{f(x)}{x}\big)$.

Решить методом дифференцирования интегральные уравнения 4.24 – 4.41.

4.24. $\int\limits_0^x (x^2 - y^2)u(y)dy = A\,erf(x^2)$.

4.25. $\int\limits_a^x (\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta(x-y) - \beta\,\mathrm{sh}\,\alpha(x-y))u(y)dy = f(x)$,
$f(a) = f'(a) = 0$.

4.26. $\int\limits_a^x (\operatorname{sh}\alpha(x-y)\operatorname{sh}\alpha(x+y))u(y)dy = f(x)$,
$f(a) = f'(a) = 0$.

4.27. $\int\limits_a^x (\operatorname{sh}^\alpha x - \operatorname{sh}^\alpha y)u(y)dy = f(x),\ f(a) = f'(a) = 0$.

4.28. $\int\limits_a^x \left(\ln\frac{x}{y}\right)^n u(y)dy = f(x),\ f(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,\ n \in \mathbf{N}$.

4.29. $\int\limits_a^x (\ln^2 x - \ln^2 y)^n u(y)dy = f(x)$,
$f(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,\ n \in \mathbf{N}$.

4.30. $\int\limits_a^x \ln\frac{x+b}{y+b}u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0$.

4.31. $\int\limits_a^x (ctg\alpha x - ctg\alpha y)^n u(y)dy = f(x)$,
$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,\ n \in \mathbf{N}$.

4.32. $\int\limits_a^x (Y_0(kx) - Y_0(ky))u(y)dy = A(x-a)^2$.

4.33. $\int\limits_a^x (J_\nu(\alpha x) - J_\nu(\alpha y))u(y)dy = f(x),\ f(a) = f'(a) = 0$.

4.34. $\int\limits_a^x (K_\nu(\alpha x) - K_\nu(\alpha y))u(y)dy = f(x),\ f(a) = f'(a) = 0$.

4.35. $\int\limits_1^x (x + y - 1)u(y)dy = A(x^2 - 1)$.

4.36. $\int\limits_a^x (Ae^{\alpha x^2} + Be^{\alpha y^2})u(y)dy = C(x^2 - a^2)$.

4.37. $\int\limits_a^x (Ae^{\alpha x+\beta y} + Be^{\beta x+\alpha y})u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0$.

4.38. $\int\limits_a^x (A\ln x + B\ln y)u(y)dy = C\ln\frac{x}{a}$.

4.39. $\int\limits_a^x (A\ln^2 \alpha x + B\ln^2 \alpha y)u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0.$

4.40. $\int\limits_a^x \cos^2 \alpha(x-y)u(y)dy = f(x),\ f(a)=0;$
рассмотреть случай $f(x) = A(x^2 - a^2)$.

4.41. $\int\limits_a^x (AJ_\nu^2(\alpha x) + BJ_\nu^2(\alpha y))u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0.$

Пример 4.3. Уравнение Вольтерра второго рода
$$u(x) = \mu\int_a^x (x-a)u(y)dy + A\sin kx$$
посредством двукратного дифференцирования сводится к эквивалентной задаче Коши
$$\begin{cases} u'' - \mu u = -Ak^2\sin kx, \\ u(a) = A\sin ka, \\ u'(a) = Ak\cos ka. \end{cases}$$
Если $\mu = \alpha^2 > 0$ то общее решение неоднородного уравнения
$$u(x) = C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha(x-a) + C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha(x-a) + M\sin kx.$$
Константа M в частном решении определяется подстановкой частного решения в дифференциальное уравнение, а постоянные C_1 и C_2 удовлетворяют системе алгебраических уравнений, реализующих начальные условия в задаче Коши:
$$\begin{cases} C_1 + MC_2\sin ka = A\sin ka, \\ C_1\alpha + Mk\cos ka = Ak\cos ka, \end{cases} \qquad M = \tfrac{Ak^2}{k^2+\alpha^2}\ .$$
В результате решение интегрального уравнения
$$u(x)=\tfrac{A}{k^2+\alpha^2}[\alpha^2\sin ka\,\mathrm{ch}\,\alpha(x-a)+\alpha k\cos ka\,\mathrm{sh}\,\alpha(x-a)+k^2\sin kx];$$
если $-\mu = \alpha^2 > 0$, $\alpha^2 \neq k^2$, то построение решения проводится аналогично:
$$u(x)=\tfrac{A}{\alpha^2-k^2}[\alpha^2\sin ka\cos\alpha(x-a)+\alpha k\cos ka\sin\alpha(x-a)-k^2\sin kx];$$
если $-\mu = k^2$, то
$$u(x) = \tfrac{A}{2}(\sin ka\cos k(x-a)+k(x-a)\cos kx + \sin kx).$$

Решить уравнения 4.42 – 4.64 посредством сведения их к эквивалентной задаче Коши.

4.42. $u(x) = \mu \int\limits_a^x u(y)dy + f(x).$

4.43. $u(x) = \mu \int\limits_a^x xu(y)\,dy + Ax.$

4.44. $u(x) = \int\limits_0^x xu(y)\,dy + x^2\cos x.$

4.45. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x-y)^2 u(y)dy + A.$

4.46. $u(x) = 4\int\limits_0^x (x-y)^2 u(y)\,dy + 5\sin x.$

4.47. $u(x) = \int\limits_0^x \left(y - \frac{x^2+x+2}{x+1}\right) u(y)\,dy + 1.$

4.48. $u(x) = \int\limits_0^x \left(y - \frac{x^2+x+1}{x+1}\right) u(y)\,dy - 1.$

4.49. $u(x) = \mu \int\limits_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy + Ae^{\beta x}.$

4.50. $u(x) = 2\int\limits_a^x (5e^{x-y} - 9e^{2(x-y)})u(y)\,dy + A.$

4.51. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (1 - e^{\alpha(x-y)})u(y)\,dy + A.$

4.52. $u(x) = \lambda \int\limits_0^x \frac{k(x)}{k(y)}u(y)\,dy + f(x).$

Рассмотреть случаи: 1) $f(x) = J_1(x)$, $k(x) = e^{-x}$, $\lambda = 1$;
2) $f(x) = \sin x$, $k(x) = e^x$;
3) $f(x) = x$, $k(x) = e^{x^2}$.

4.53. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x^2 - y^2)u(y)\,dy + A.$

4.54. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x^2 - xy)u(y)\,dy + f(x);$
рассмотреть частный случай $f(x) = Ax.$

4.55. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (xy - y^2)u(y)\,dy + A.$

4.56. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x - y)y^{\alpha}u(y)\,dy + f(x);$
рассмотреть частный случай $f(x) = Ax.$

4.57. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x^{\alpha} - y^{\alpha})u(y)\,dy + f(x);$
рассмотреть частный случай $f(x) = Ax.$

4.58. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x - y)e^{\alpha xy}u(y)\,dy + f(x);$ рассмотреть частный случай $f(x) = Ax.$

4.59. $u(x) = \mu \int\limits_a^x \operatorname{sh} \alpha(x - y)yu(y)\,dy + f(x).$

4.60. $u(x) = \mu \int\limits_a^x x \operatorname{sh} \alpha(x - y)u(y)\,dy + f(x).$

4.61. $u(x) = \mu \int\limits_a^x \sin \alpha(x - y)yu(y)\,dy + f(x).$

4.62. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (x + y + 2)u(y)\,dy + A.$

4.63. $u(x) = \mu \int\limits_a^x (3x^2 - 3y^2 + x + y - 1)u(y)\,dy + f(x).$

4.64. $u(x) = \mu \int\limits_a^x [Ax + B + (Cx + D)(x - y)]u(y)\,dy + f(x).$

Пример 4.4. Метод дифференцирования применим к некоторому классу уравнений Фредгольма первого рода. Для решения уравнения

$$\int_a^b |x-y|u(y)dy = f(x)$$

следует раскрыть модуль

$$\int_a^x (x-y)u(y)dy + \int_x^b (y-x)u(y)dy = f(x)$$

и выполнить двукратное дифференцирование

$$\int_a^x u(y)dy - \int_x^b u(y)dy = f'(x)\ \text{(1-й раз)},\ 2u(x) = f''(x)\ \text{(2-й раз)}.$$

Следовательно, $u(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ — решение уравнения. Для разрешимости уравнения функция $f(x)$ должна удовлетворять определенным граничным условиям. Действительно, при $x = a$ и $x = b$ из уравнения следуют равенства

$$\int_a^b yu(y)dy - a\int_a^b u(y)dy = f(a),\quad b\int_a^b u(y)dy - \int_a^b yu(y)dy = f(b).$$

Подстановка решения $u(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ в эти равенства и интегрирование по частям приводят к соотношениям

$$(b-a)f'(b) = f(a) + f(b),\quad (a-b)f'(a) = f(a) - f(b),$$

откуда

$$f'(a) + f'(b) = 0,\quad f(a) + f(b) = (a-b)f'(a).$$

Правая часть $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = F(x) + Ax + B,$$

где

$$A = -\tfrac{1}{2}(F'(a) + F'(b)),\quad B = \tfrac{1}{2}[aF'(a) + bF'(b) - F(a) - F(b)],$$

а $F(x)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, ограниченная вместе с первой производной (ограниченность следует из уравнения).

Решить методом дифференцирования интегральные уравнения 4.65 – 4.80.

4.65. $\int\limits_0^a |kx-y|u(y)\,dy = f(x),\ \ k > 0.$

4.66. $\int\limits_0^a |x-ky|u(y)\,dy = f(x),\ \ k > 0.$

4.67. $\int\limits_0^a |x^\alpha - y^\alpha| u(y)\,dy = f(x).$

4.68. $\int\limits_0^a |ctg^\alpha x - cth^\alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ 0 < \alpha.$

4.69. $\int\limits_0^a |x - k\sin \alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ k > 0\ \alpha > 0.$

4.70. $\int\limits_0^a |x - k\,\mathrm{tg}\,\alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ k > 0\ \alpha > 0.$

4.71. $\int\limits_0^a |x - k\,\mathrm{sh}\,\alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ k > 0,\ \alpha > 0.$

4.72. $\int\limits_0^a |x - k\ln(1 + \alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ k > 0,\ \alpha > 0,\ a > 0.$

4.73. $\int\limits_0^a |k\,\mathrm{sh}\,\alpha x - y| u(y)\,dy = f(x),\ \alpha > 0,\ k > 0,\ a > 0.$

4.74. $\int\limits_0^a |k\arcsin \alpha x - y| u(y)\,dy = f(x),\ \alpha > 0,\ k > 0,\ \alpha a < 1.$

4.75. $\int\limits_0^a |\,\mathrm{sh}\,\alpha x - \mathrm{sh}\,\alpha y| u(y)\,dy = f(x),\ \alpha > 0,\ a > 0.$

4.76. $\int\limits_0^1 u(xy)\,dy = f(x).$

4.77. $\int\limits_0^1 y^\alpha u(xy)\,dy = f(x).$

4.78. $u(x) = \int\limits_0^1 |x - y| u(y) dy + Ax.$

4.79. $u(x) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|x - y| u(y) dy = A\sin x.$

4.80. $u(x) = \int\limits_0^a e^{|x-y|}u(y)dy + A\,e^x.$

Пример 4.5. Метод дифференцирования применим к некоторым нелинейным интегральным уравнениям. Результатом дифференцирования уравнения

$$u(x) = k\int_a^x e^{\alpha y}u^2(y)dy + Ae^{\alpha x} + B$$

является дифференциальное уравнение

$$u'(x) = ke^{\alpha x}u^2(x) + A\alpha e^{\alpha x},\ \ a < x,$$

с разделяющимися переменными, которое нужно решать при условии $u(a) = e^{\alpha a} + B$, вытекающим из интегрального уравнения (задача Коши). Отсюда

$$\int_{u(a)}^{u(x)} \frac{du}{u^2+\frac{\alpha A}{k}} = \frac{k}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha a}).$$

Если $\frac{\alpha A}{k} = p^2 > 0,$ то

$$\frac{1}{p}\,arctg\frac{u}{p}\Big|_{u(a)}^{u(x)} = \frac{k}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha a}),$$

следовательно,

$$u(x) = p\,tg\left[\frac{pa}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha a}) + arctg\frac{u(a)}{p}\right];$$

если $-\frac{\alpha A}{k} = p^2 > 0,$ то

$$\ln\left|\frac{u-p}{u+p}\right|\Big|_{u(a)}^{u(x)} = \frac{2pk}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha a}),$$

откуда

$$u(x) = p\frac{u(a)-p\,th\varphi}{p-u(a)\,th\varphi},\ \ \varphi = \frac{pk}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha a}),$$

или

$$u(x) = p\frac{p(a)-u(a)\,th\varphi}{u(a)-p\,th\varphi};$$

если $A = 0,$ то

$$u(x) = \frac{\alpha u(a)}{\alpha - ku(a)(e^{\alpha x}-e^{\alpha a})};$$

если $\alpha = 0,$ то

$$u(x) = \frac{A+B}{1-k(A+B)(x-a)}.$$

Применяя метод дифференцирования, решить уравнения 4.81 – 4.97.

4.81. $u(x) = \int\limits_a^x K(y)u(x)u(y)\,dy + f(x).$

4.82. $u(x) = \int\limits_a^x f(x)g(y)u^{\alpha}(y)\,dy.$

4.83. $u(x) + \int\limits_a^x f(y)u^{\alpha}(y)\,dy = A,\ 0 < \alpha < 1.$

4.84. $u(x) + k\int\limits_a^x e^{\alpha u(y)}\,dy = Ax + B.$

4.85. $u(x) = \int\limits_a^x f(y)\,\mathrm{ch}(\alpha u(y))\,dy + A.$

4.86. $u(x) = k\int\limits_a^x ctg\alpha y \cdot e^{\beta u(y)}\,dy + A\ln|\sin\alpha x| + B.$

4.87. $u(x) = k\int\limits_a^x \mathrm{sh}\,\alpha y\,\mathrm{sh}(\beta u(y))\,dy + A.$

4.88. $u(x) = k\int\limits_a^x \sin(\alpha u(y))\,dy + A.$

4.89. $u(x) = k\int\limits_a^x \sin\alpha y\cos(\beta u(y))\,dy + A.$

4.90. $u(x) = k\int\limits_a^x \sin\alpha y\,u^2(y)\,dy + A\cos\alpha x + B.$

4.91. $u(x) = k\int\limits_a^x \mathrm{ch}\,\alpha y\,u^2(y)\,dy + A\,\mathrm{sh}\,\alpha x.$

4.92. $u(x) = k\int\limits_a^x e^{\alpha(x-y)}u^2(y)\,dy + A.$

4.93. $u(x) = k\int\limits_a^x e^{\alpha(x-y)}u^2(y)\,dy + Ae^{\alpha x} + B.$

4.94. $u(x) = k\int\limits_a^x \mathrm{sh}\,\alpha y\,\mathrm{ch}(\beta u(y))\,dy + A.$

4.95. $u(x) = k\int\limits_a^x \ln(\alpha u(y))\,dy + A.$

4.96. $u(x) = k\int\limits_a^x y^{\alpha}u^{\beta}(y)\,dy + Ax^{\alpha+1} + B.$

4.97. $u^2(x) + A\int\limits_a^x u(y)\,dy = Bx + C.$

Пример 4.6. Какое-либо решение (их может быть несколько) интегрального уравнения называется точным. Иногда вид возможного решения определяется конструкцией самого уравнения.

Решить уравнение

$$\int_0^x \frac{u(y)dy}{x+y} = f(x)$$

где функция $f(x)$ равна 1)Ax^n, $n \in \mathbf{N_0}$; 2)$A\ln^n x$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение 1) Посредством замены $y = \xi x$ получается уравнение

$$\int_0^1 \frac{u(\xi x)d\xi}{1+\xi} = Ax^n,$$

структура которого подсказывает форму решения $u(x) = Bx^n$. Постоянный множитель B можно определить методом неопределенных коэффициентов: подстановка решения в уравнение превращает его в тождество

$$\int_0^1 \frac{B\xi^n x^n d\xi}{1+\xi} = Ax^n, \text{ откуда } \frac{A}{B} = \int_0^1 \frac{\xi^n d\xi}{1+\xi}$$

На основании формулы суммы членов геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}, \quad n \geq 1$$

подынтегральная функция преобразуется к виду

$$\frac{\xi^n}{1+\xi}=\frac{(-1)^{n+1}(xi)^n}{1-(-\xi)}=(-1)^{n+1}\frac{1-(-\xi)^n-1}{1-(-\xi)}=$$
$$=(-1)^{n+1}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\xi^k-\frac{1}{1+\xi}\Big].$$

Следовательно, интеграл

$$I(n)=\int\limits_0^1\frac{\xi^n d\xi}{1+\xi}=(-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}-\ln 2\Big)=(-1)^n\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}+\ln 2\Big).$$

Итак, решение $u(x)=\frac{A}{I(n)}x^n$.

Решение 2) Пусть линейные операторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ коммутируют, причем $\mathcal{L}$ действует только на переменную x функции $f(x,\lambda)$, а $\mathcal{M}$— только на переменную λ этой функции. Если применить оператор $\mathcal{M}$ к обеим частям уравнения $\mathcal{L}v=h(x,\lambda)$, то оно преобразуется в $\mathcal{L}\mathcal{M}v=\mathcal{M}h$, или $\mathcal{L}u=f$, где $u=\mathcal{M}v,\ f=\mathcal{M}h$. Таким образом, если $v(x)$ — решение уравнения $\mathcal{L}v=h$, то $u=\mathcal{M}v$ — решение уравнения $\mathcal{L}u=f$ с тем же оператором $\mathcal{L}$, но с другой правой частью.

Для решения 2) следует исходить из уравнения

$$\int_0^x\frac{v(y)dy}{x+y}=ax^\lambda.$$

После замены $y=\xi x$ получается уравнение

$$\int_0^1\frac{v(\xi x)d\xi}{1+\xi}=Ax^\lambda,$$

решение которого имеет вид $v(x)=Bx^\lambda$. Как и в предыдущем случае

$$v(x)=\frac{A}{I(\lambda)}x^\lambda,\quad I(\lambda)=\int\limits_0^1\frac{\xi^\lambda d\xi}{1+\xi}.$$

Результат достигается применением оператора $\mathcal{M} = \frac{d^n}{d\lambda^n}$:

$$u(x) = A\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\frac{x^\lambda}{I(\lambda)}\Big)\Big|_{\lambda=0}.$$

Найти точные решения уравнений 4.98 – 4.114.

4.98. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{x+y} = f(x)$, где функция $f(x)$ равна
1) $Ax^{n+\lambda}$, $n \in \mathbf{N_0}$, $a.\lambda{=}\frac{1}{2}$, $b.\lambda{=}\frac{1}{3}$, $c.\lambda{=}\frac{1}{4}$; 2) $Ax^n \ln x$; 3) $A\cos(\ln x)$.

4.99. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = f(x)$, где функция $f(x)$ равна
1) Ax^α, $\alpha > -1$; 2) $A\ln x$.

4.100. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(x)$, где функция $f(x)$ равна
1) Ax^α, $\alpha > -1$; дать решение для $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; 2) $A\ln^n x$.

4.101. $\int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}u(y)dy = Ax^n$, $n \in \mathbf{N}$.

4.102. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{x^2+y^2} = Ax^n$, $n \in \mathbf{N}$.

4.103. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{ax^m+by^m} = f(x)$, $m \in \mathbf{N}$, $a > 0$, $a + b > 0$, где функция $f(x)$ равна 1) Ax^α, $\alpha > -1$; 2) $Ax^\alpha \ln x$, $\alpha > -1$.

4.104. $\int_0^x \frac{u(y)dy}{(ax^\alpha+by^\alpha)^\beta} = f(x)$, $\alpha\beta > 1$, $a > 0$, $a + b > 0$, где функция $f(x)$ равна 1) Ax^γ, $\gamma \geq 0$, 2) $Ax^\gamma \ln x$, $\gamma \geq 0$, 3) $A\ln^n x\, n \in \mathbf{N}$.

4.105. $u(x) = k\int\limits_0^x K(\frac{y}{x})u(y))\,dy = f(x)$, где функция $f(x)$ равна 1) Ax^α; 2) $Ax^\alpha \ln x$.

4.106. $u(x) = k\int\limits_0^x K(x-y)u(y))\,dy = f(x)$, где функция $f(x)$ равна 1) Ax^n, $n = 0, 1, 2$; 2) $Ae^{\lambda x}$; 3) Ax^n, $n = 2, 3, \ldots, .$

4.107. $k\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-y)}u(y))\,dy{=}f(x)$, $\alpha{>}0$, где функция $f(x)$ равна
1) $Ae^{\beta x}$; 2) $A\sin\beta x$; 3) $A\,\mathrm{ch}\,\beta x$; 4) $Ae^{\beta x}\cos\gamma x$;
5) $Ax^nAe^{\beta x}$, $n \in \mathbf{N}$; 6) $Ax^n\sin\beta x$, $n \in \mathbf{N}$; 7) $Ax^n\,\mathrm{ch}\,\beta x$, $n \in \mathbf{N}$.

4.108. $k\int\limits_x^\infty e^{-\alpha(y-x)}u(y))\,dy=f(x)$, $\alpha>0$, где функция $f(x)$ равна 1) $Ae^{\beta x}$; 2) $A\cos\beta x$; 3) $A\,\mathrm{sh}\,\beta x$; 4) Ax^n; 5) $Ae^{\beta x}\sin\gamma x$; 6) $Ax^n\cos\beta x$; 7) $Ax^n\,\mathrm{sh}\,\beta x$, $n\in\mathbf{N}$.

4.109. $u(x)=\mu\int\limits_x^\infty \frac{\ln(y-x)}{\sqrt{y-x}}u(y)\,dy+Ae^{-\alpha x}$, $\alpha>0$.

4.110. $k\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|x-y|}u(y)\,dy=f(x)$, $\alpha>0$, где функция $f(x)$ равна 1) $Ae^{\beta x}$; 2) $A\sin\beta x$; 3) Ax^n; 4) $Ae^{\beta x}\cos\gamma x$; 5) $A\,\mathrm{ch}\,\beta x$; 6) $Ax^n\cos\beta x$; 7) $Ax^n\,\mathrm{sh}\,\beta x$, $n\in\mathbf{N}$.

4.111. $u(x)=\mu\int\limits_0^x \frac{u(y)dy}{x+y}+f(x)$,
где $1.f(x)=0$; $2.f(x)=Ax^n$, $n=0,1,2,\ldots$; $3.f(x)=Ax^n\ln x$.

4.112. $u(x)=\mu\int\limits_0^x \frac{u(y)dy}{x^\alpha(x-y)^{1-\alpha}}+f(x)$,
где 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)=Ax^n$; 3) $f(x)=Ax^n\ln x$; $n\in\mathbf{N_0}$.

4.113. $u(x)+\lambda\int_0^x \frac{1}{x}e^{-\alpha\frac{y}{x}}u(y)dy=Ax^n$, $\lambda>0$, $n\in\mathbf{N_0}$.

4.114. $\int_0^\pi \sin yu(xy)dy=f(x)$,
где $1.f(x)=Ax+B$; $2.f(x)=Ax^n$, $n\in\mathbf{N_0}$.

Пример 4.7. Метод построения точных решений, рассмотренный в предыдущем примере, распространяется на некоторые нелинейные уравнения. Решение уравнения

$$u(x)=k\int_0^\infty e^{-\alpha y}u(x)u(y)dy=A\ln x+B,\ \alpha>0,$$

можно отыскивать в виде $u(x)=p\ln x+q$. Подстановка в уравнение

$$p\ln x+q=k(p\ln x+q)\int_0^\infty(p\ln y+q)e^{-\alpha y}dy+Alnx+q$$

и интегрирование

$$p\ln x+q=\frac{k}{\alpha}(p\ln x+q)(p\varphi+q)+Alnx+q,\ \varphi=\psi(1)-\ln\alpha$$

приводят в результате сравнения коэффициентов при $\ln x$ и x к системе уравненияй:

$$\begin{cases} p=\frac{kp}{\alpha}(p\varphi+q)+B,\\ q=\frac{Aq}{\alpha}(p\varphi+q)+C. \end{cases}$$

Отсюда $Bq=Cp$, так что q — корень квадратного уравнения

$$\frac{A}{\alpha}\Big(\frac{B\varphi}{C}+1\Big)q^2-q+C=0.$$

В зависимости от количества корней этого уравнения интегральное уравнение имеет два, либо одно, либо ни одного решения вида $u(x)=p\ln x+q$.

Найти точные решения нелинейных интегральных уравнений 4.115 – 4.136.

4.115. $\int\limits_0^1 u(x)u(y)dy=Ax.$

4.116. $\int\limits_0^1 e^{\alpha xy}u(x)u(y)dy=Ae^{\beta x}.$

4.117. $\int\limits_0^1 g(y)u(x)u(y)dy=f(x).$

4.118. $\int\limits_0^1 u(y)u(f(x)y)dy=A.$

4.119. $u(x)+k\int\limits_a^b e^{\alpha x}u(x)u(y)dy=Ae^{\beta x}.$

4.120. $u(x) + k\int\limits_a^b g(x)u(x)u^{\alpha}(y)dy = f(x).$

4.121. $u(x) + k\int\limits_0^{\infty} y^{\alpha}e^{-\frac{\beta y}{x}}u^{\gamma}dy = 0, \alpha > -1,\ \beta > 0.$

4.122. $\int\limits_0^{\pi} \sin y u(y)u(x-y)dy = Ax.$

4.123. $\int\limits_0^{x} y^k u(y)u(x-y)dy = Ax^{\alpha}e^{\beta x},\ \alpha > -1,\ k \geq 0.$

4.124. $\int\limits_0^{1} u(y)u(x+3y)dy = Ax.$

4.125. $\int\limits_0^{1} u(y)u(x+6y)dy = Axe^{-\alpha x}, \alpha > 0.$

4.126. $\int\limits_0^{x} u(y)u(ax-y)dy = Ax^{\alpha}e^{\beta x},\ \alpha > -1.$

4.127. $u(x) + A\int\limits_0^{1} u(xy)u(y)dy = B\ln x.$

4.128. $u(x) + A\int\limits_0^{1} u(xy)u(y)dy = Bx\ln x.$

4.129. $u(x) = A\int\limits_0^{1} x^{\alpha}e^{-\beta y}u^2(y)dy,\ \alpha > -1,\ \beta > 0.$

4.130. $u(x) = A\int\limits_0^{1} e^{-\beta x}y^{\alpha}u^2(y)dy,\ \alpha > -1,\ \beta > 0.$

4.131. $u(x) = k\int\limits_0^{x} x^{\alpha-1}u^2(y)dy + Ax^{\alpha},\ \alpha > -1.$

4.132. $u(x) = k\int\limits_0^{x} \frac{u^2(y))dy}{x^2+y^2} + Ax.$

4.133. $u(x) = k\int\limits_{-\infty}^{1} e^{\alpha x+\beta y}(x-y)^m u^n(y)dy$, $n \neq 1$.

4.134. $u(x) + k\int\limits_{a}^{b} e^{\beta u(y)} = g(x)$.

4.135. $u(x) + Ak\int\limits_{a}^{b} e^{\alpha(x-y)+\beta u(y)} = f(x)$.

4.136. $u(x) = k\int\limits_{0}^{x} \frac{e^{\alpha u(y)}dy}{ax+by} + A$, $a > 0$, $a + b > 0$.

Пример 4.8. Решение уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_a^x \frac{u(y(dy}{\sqrt{g(x)-g(y)}} = f(x),\ f(a) = 0,\ g'(x) > 0$$

получается заменой x на s и интегрированием от a до x с множителем $g'(s)(g(x)-g(s))^{-\frac{1}{2}}$:

$$\int_a^x \frac{g'(s)ds}{\sqrt{g(x)-g(s)}}\int_a^s \frac{u(y)dy}{\sqrt{g(s)-g(y)}} = \int_a^x \frac{f(s)g'(s)ds}{\sqrt{g(x)-g(s)}}.$$

Изменение порядка интегрирования с последующей заменой переменной $g(s) = g(y) + t(g(x)-g(y)$ преобразуют интеграл слева к виду

$$\int_a^x u(y)dy\int_y^x \frac{g'(s)ds}{\sqrt{(g(x)-g(s))(g)s)-g(y))}} =$$

$$= \int_a^x u(y)dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\int_a^x u(y)dy,$$

откуда

$$\int_a^x u(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_a^x \frac{f(s)g'(s)ds}{\sqrt{g(x)-g(s)}}$$

и, следовательно,

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(y)g'(y)dy}{\sqrt{g(x)-g(y)}}.$$

Решить уравнения Вольтерра первого рода 4.137 – 4.157 методом, изложенным в примере 4.8.

4.137. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = f(x).$

4.138. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{x-y}} = f(x).$

4.139. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{\ln\frac{x}{y}}} = f(x).$

4.140. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{\sqrt{I_0(x)-I_0(y)}} = f(x).$

4.141. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(g(x)-g(y))^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1,\ g'(x)>0.$

4.142. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(x-y)^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1.$

4.143. $\int_a^x \frac{e^{\beta(x^2-y^2)}u(y)dy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1.$

4.144. $\int_a^x \frac{y^\gamma u(y)dy}{(x^\beta-y^\beta)^\alpha} = f(x),\ \gamma>-1,\ \beta>0,\ 0<\alpha<1.$

4.145. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(e^{\beta x}-e^{\beta y})^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1,\ \beta>0.$

4.146. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y)^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1.$

4.147. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(th\,kx-th\,ky)^\alpha} = f(x),\ k>0,\ 0<\alpha<1.$

4.148. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{(\ln\frac{x}{y})^\alpha} = f(x),\ 0<\alpha<1.$

4.149. $\int_a^x \frac{u(y)dy}{K_0(y)-K_0(x))^\alpha} = f(x).$

4.150. $\int_a^x (g(x)-g(y))^\alpha u(y)dy = f(x),\ f(a)=0,\ g'(x)>0,\ 0<\alpha<1.$

4.151. $\int_a^x \sqrt{x-y}\,u(y)dy = f(x),\ f(a)=0.$

4.152. $\int_a^x e^{\beta(x^2-y^2)}\sqrt{x-y}\,u(y)dy = f(x),\ f(a)=0.$

4.153. $\int_a^x \sqrt{x^3y^2 - x^2y^3}u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0.$

4.154. $\int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\alpha}u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$

4.155. $\int_a^x (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y)^{\alpha}u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$

4.156. $\int_a^x (\sin x - \sin y)^{\alpha}u(y)dy = f(x),\ f(a) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$

4.157. $\int_a^x (I_0(x) - I_0(y))^{\alpha}u(y)dy = f(x),\ 0 < \alpha < 1.$

Пример 4.9. Метод последовательных приближений. Произведением $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ операторов называется оператор $\mathcal{K}u = \mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2u)$. Так как произведение ассоциативно, то определена целая степень оператора $\mathcal{K}^n$. Метод последовательных приближений решения уравнения

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x),$$

в котором $f(x)\in C(\overline{\Delta})$, $K(x,y)\in C(\overline{Q})$, $Q=\{x,y\colon x\in\Delta, y\in\Delta\}$, состоит в построении последовательности

$$u_0 = u_0(x), \quad u_n = \mu\mathcal{K}u_{n-1} + u_0, \quad n \in \mathbf{N},$$

где $u_0(x)$ — произвольная непрерывная функция на $\overline{\Delta}$. Если $u_0=f$, то

$$u_n = \sum_{m=0}^{n} \mu^m\mathcal{K}^m f, \quad \mathcal{K}^0 f = f.$$

При достаточно малых значениях $|\mu|$ последовательность сходится к решению, которое является единственным и выражается рядом Неймана

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m(\mathcal{K}^m f)(x). \tag{4.22}$$

Члены ряда Неймана, соответствующие уравнению

$$u(x) = \mu\int_0^1 \frac{xu(y)\,dy}{1+y^2} - 1,$$

имеют вид

$$\mu^0(\mathcal{K}^0 1)(x) = 1, \quad \mu^m(\mathcal{K}^m 1)(x) = \frac{\pi x}{4}\left(\frac{\mu \ln 2}{2}\right)^{m-1}, \ m \geq 1.$$

Следовательно,

$$u(x) = 1 + \frac{\pi x}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mu \ln 2}{2}\right)^{m-1}.$$

Ряд сходится в круге $|\mu| < \frac{2}{\ln 2}$, сумма ряда

$$u(x) = 1 + \frac{\mu \pi x}{2(2 - \mu \ln 2)}. \tag{4.23}$$

Полученное решение можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость (μ). Итак, при $\mu \neq \frac{2}{\ln 2}$ уравнение имеет единственное решение (4.23); если $\mu = \frac{2}{\ln 2}$, то решений нет.

Методом последовательных приближений решить интегральные уравнения 4.158 – 4.169.

4.158. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \frac{u(y)}{1+y^2} - 1.$

4.159. $u(x) = 3 \int\limits_{0}^{1} \frac{x\, u(y)}{1+y^2} + x.$

4.160. $u(x) = 7 \int\limits_{0}^{1} x^3 \sqrt[3]{y^2} u(y)\, dy + x^3.$

4.161. $u(x) = \mu \int\limits_{0}^{1} xy^3 u(y)\, dy + 4.$

4.162. $u(x) = \mu \int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} - \sqrt{y}) u(y)\, dy + 1.$

4.163. $u(x) = \int\limits_0^x e^{x-y} u(y)\, dy + 1.$

4.164. $u(x) = \mu \int\limits_0^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, u(y)\, dy + \sqrt{x}.$

4.165. $u(x) = \mu \int\limits_0^x x^2 u(y)\, dy + x^2.$

4.166. $u(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{xyu^3(y)\, dy}{1+y^2} + \sin^2 x.$

4.167. $u(x) = \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x| u(y)\, dy}{1+x^2y^2}^{\frac{3}{2}} + 1.$

4.168. $u(x) = \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 u(y)\, dy}{1+x^2y^2}^{\frac{3}{2}} + x.$

4.169. $\begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{xu(y)\, dy}{x^2+y^2} + \pi v(x) = V_1 \\ \int\limits_0^\infty \frac{xv(y)\, dy}{x^2+y^2} + \pi u(x) = V_2. \end{cases}$

4.170. Пусть $K_1(x,y)$ и $K_2(x,y)$ — ядра операторов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соответственно; показать, что ядро оператора $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ имеет вид

$$K(x,y) = \int\limits_a^b K_1(x,t) K_2(t,y)\, dt,$$

если операторы действуют по правилу (4.1), или

$$K(x,y) = \int\limits_y^x K_1(x,t) K_2(t,y)\, dt, \tag{4.24}$$

если операторы определены формулой (4.2).

Пример 4.10. Ряду Неймана (4.22) можно придать форму

$$u = \mu \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathcal{K}^{m+1} f + f$$

и преобразовать решение интегрального уравнения (4.3) к виду

$$u = \mu \mathcal{R} f + f, \tag{4.25}$$

где $\mathcal{R}$ — линейный оператор с ядром

$$R(x, y, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m K_{m+1}(x, y), \tag{4.26}$$

K_{m+1} — ядро оператора $\mathcal{K}^{m+1}$. Функция $R(x, y, \mu)$ называется резольвентой ядра K(x,y).

Уравнение

$$u(x) = \int_0^x \frac{1 + e^x}{1 + e^y} u(y)\, dy + e^{2x}$$

порождено ядром $K(x, y) = (1 + e^x)/(1 + e^y)$. Согласно формуле (4.24)

$$K_2(x, y) = (x - y)K(x, y), \ldots, K_{m+1}(x, y) \frac{(x - y)^m}{m!} K(x, y).$$

Резольвента (4.26) имеет вид

$$R(x, y, \mu) = K(x, y) \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \frac{(x - y)^m}{m!} = K(x, y) e^{\mu(x-y)},$$

а решение дается формулой (4.25):

$$u(x) = \int_0^x R(x, y, 1)\, e^{2y} dy + e^{2x} =$$

$$= \int_0^x \frac{1 + e^x}{1 + e^y} e^{x-y} e^{2y} dy + e^{2x} e^x (1 + e^x) \ln \frac{1 + e^x}{2} + e^{2x}.$$

Определив резольвенту, решить интегральные уравнения 4.171 – 4.179.

4.171. $u(x) = -3\int\limits_0^1 \sqrt[4]{xy^3}u(y)\,dy + x\sqrt[4]{x}.$

4.172. $u(x) = 4\int\limits_0^1 y\sqrt{xy}u(y)\,dy - x\sqrt{x}.$

4.173. $u(x) = \mu\int\limits_0^1 e^{x-y}u0(y)\,dy + e^x.$

4.174. $u(x) = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^5 yu(y)\,dy + \sin^2 x.$

4.175. $u(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(x-y)\,u(y)\,dy + 1.$

4.176. $u(x) = \mu\int\limits_0^x e^{x^2-y^2}u(y)\,dy + 1.$

4.177. $u(x) = \int\limits_0^x \frac{5-3\cos x}{5-3\cos y}u(y)\,dy + e^x.$

4.178. $u(x) = \int\limits_0^x (x-y)u(y)\,dy + 2e^x.$

4.179. $u(x) = \mu\int\limits_0^{\infty} xe^{-\frac{y^2}{2}}u(y)\,dy + J_0(2x).$

4.180. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{1}{1-\varepsilon}\int\limits_{x+\ln\varepsilon}^x e^{-(x-y)}u(y)\,dy,$$

встречающееся в теории замедления нейтронов (см. (1.55)).

4.181. Внешнее воздействие $u(t)$ на систему с памятью является периодической функцией и связано с реакцией системы линейной зависимостью 4.10. Какому условию должно удовлетворять ядро $K(t,\tau)$, чтобы реакция $v(t)$ была также периодической функцией?[1]

4.182. Оператор Вольтерра с разностным ядром $K(t-\tau)$ действует по правилу:

$$\mathcal{K}u = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{4.27}$$

Показать, что 1) ядро $K(t,\tau)$ произведения $\mathcal{K}_{\mathbf{1}}\mathcal{K}_{\mathbf{2}}$ операторов Вольтерра выражается формулой

$$[K(t,\tau) = \int_\tau^t K_1(t-s)K_2(s-\tau)\,ds; \tag{4.28}$$

2) ядро $K(t,\tau)$ является разностным; 3) произведение операторов коммутативно: $\mathcal{K}_{\mathbf{1}}\mathcal{K}_{\mathbf{2}} = \mathcal{K}_{\mathbf{2}}\mathcal{K}_{\mathbf{1}}$.

4.183. Определение 1. Операторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathcal{K}^n$$

называется сходящимся на отрезке $[-r;r]$, если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nK_n(t-\tau)$$

регулярно (т.е. абсолютно и равномерно) сходится для $|t-\tau| \le r$.

[1] Источник задач 4.181–4.183 и 4.185 — монография [58].

Определение 2. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в точке $z = 0$, ряд Тейлора которой

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \tag{4.29}$$

сходится в круге $|z| < r$, где $r > 0$. Функцией $f(\mathcal{K})$ от оператора $\mathcal{K}$ называется ряд

$$f(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \mathcal{K}^n. \tag{4.30}$$

Доказать теорему Вольтерра: если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится в круге $|z| < r$, где $r > 0$, то для любого $R > 0$ операторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{K}^n,$$

где $\mathcal{K}$ — разностный оператор с непрерывным ядром, сходится для $|t - \tau| \le R$.

4.184. Для функций $u(x)$, непрерывных на отрезке $\overline{h} = [a; b]$, вводится понятие нормы

$$\| u \| = \max_{\overline{h}} |u(x)|$$

и сходящейся последовательности

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \| u_n(x) - u(x) \| = 0.$$

Оператор $\mathcal{K}$, определенный на множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} = C(\overline{h})$, называется ограниченным, если

$$\exists\, A > 0 \qquad \forall\, u \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}} : \qquad |\mathcal{K}u| \le A \| u \| .$$

Так как существует множество α подобных констант (например, $k\,A$, где $k > 1$), то вводится понятие нормы оператора:

$$\| \mathcal{K} \| = \inf \alpha.$$

Оператор $\mathcal{K}$ называется фредгольмовым, если он линеен, отображает $C(\overline{h})$ в $C(\overline{h})$ и ограничен. Оператор $C(\overline{h})$ называется непрерывным на функции $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$, если

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}u_n = \mathcal{K}u.$$

Пусть t_0 — любое число; доказать, что оператор (4.27) с непрерывным ядром, определенный на множестве $C[0;t_0]$, 1) фредгольмов; 2) удовлетворяет неравенству

$$\| \mathcal{K}u \| \le \| \mathcal{K} \| \, \| u \|; \tag{4.31}$$

3) непрерывен на $C[0;t_0]$.

4.185. Пусть t_0 — любое положительное число, $\overline{h} = [0;t_0]$, функции $u(t)$ и $K(t)$ непрерывны на $\overline{h}$; 1) доказать, что при любом $\mu \in \mathbf{C}$ интегральное уравнение Вольтерра

$$v(t) = u(t) + \mu \int_0^t K(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

имеет единственное решение $u(t) \in C(\overline{h})$, непрерывно зависящее от функции $u(t)$; 2) это решение

$$v(t) = \frac{u(t)}{1 - \mu\,\mathcal{K}};$$

3) Резольвентный оператор $\mathcal{R}$ (см. пример 4.10) связан с оператором $\mathcal{K}$ соотношением:

$$1 + \mu\mathcal{R} = \frac{1}{1 - \mu\,\mathcal{K}}.$$

Пример 4.11. Ядро вида

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

где системы функций $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ линейно независимы, называется вырожденным. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, уравнение

$$u(x)=\mu\int\limits_{-1}^{1}(x\,ch\,y+y\,sh\,x)u(y)\,dy+3x+a\,sh\,x$$

можно представить в виде

$$u(x)=\mu\,C_1\,x+\mu\,C_2\,sh\,x+3x+a\,sh\,x, \tag{4.32}$$

где

$$C_1=\int\limits_{-1}^{1}ch\,y\,u(y)\,dy,\qquad C_2=\int\limits_{-1}^{1}y\,u(y)\,dy-$$

неизвестные константы. Так как функция $u(x)$ — решение интегрального уравнения, то соотношение (4.32) представляет собой тождество. Умножение его сначала на ch, затем на x и интегрирование каждый раз в пределах от -1 до 1 приводит к системе

$$\begin{aligned}&C_1=0,\\&C_2(1-\tfrac{2\mu}{e})=2(1+\tfrac{a}{e}).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&u(x)=\tfrac{a+2\mu}{e-2\mu}\,e\,sh\,x+3x, && \mu\neq\tfrac{e}{2},\\&u(x)=C\,sh\,x+3x, && \mu=\tfrac{e}{2},\ \ a=-e,\\&\text{нет решений,} && \text{если}\quad \mu=\tfrac{e}{2},\ \ a\neq-e.\end{aligned}$$

Решить уравнения 4.186 – 4.206 с вырожденным ядром.

4.186. $u(x) = 1 + 3x^2 - 4\int\limits_0^1 x\, arctg\, x\, u(y)\, dy.$

4.187. $u(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x-y} u(y)\, dy + \sin x.$

4.188. $u(x) = \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, y^3 u(y)\, dy + \cos 5x.$

4.189. $u(x) = \mu \int\limits_0^1 u(y)\, dy + f(x).$

4.190. $u(x) = \int\limits_0^1 arctg\, x\, yu(y)\, dy + x^2 + a.$

4.191. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 arcsin\, x\, u(y)\, dy + ax + 1.$

4.192. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, u(y)\, dy + 4x + a.$

4.193. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\, u(y)\, dy + x + a.$

4.194. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 e^{-x^2} u(y)\, dy + x^5.$

4.195. $u(x) = \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} |y| \cos x\, u(y)\, dy + \sin x.$

4.196. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 (1 + xy - 5x^2y^2) u(y)\, dy + 1 - \frac{5}{2}x^2.$

4.197. $u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x-y)^3 u(y)\,dy + 1 - x - x^3.$

4.198. $u(x) = 9\int\limits_{0}^{1}(y^2 \ln x + 5x^2 \ln y)u(y)\,dy + 50x.$

4.199. $u(x) = \int\limits_{0}^{1}(x^2 \ln y - \frac{10}{11} y\, \ln^2 x)u(y)\,dy - 4x + a.$

4.200. $u(x) = \int\limits_{0}^{1}\ln^2(xy)u(y)\,dy + x.$

4.201. $u(x) = \mu\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\, \sin y + \sin 3x\, \sin 3y)u(y)\,dy +$
$+1 - \frac{4}{\pi}\sin x - \frac{4}{3\pi}\sin 3x.$

4.202. $u(x) = \mu\int\limits_{0}^{\pi}(x\, \cos y - \frac{y}{\pi}\sin x)u(y)\,dy + \sin x.$

4.203. $u(x) = \mu\int\limits_{-1}^{1}(1 + 2xy)u^2(y)\,dy.$

4.204. $u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin y\, u^3(y)\,dy + \frac{3}{5}\cos x.$

4.205. $u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin y\, u^3(y)\,dy + \frac{3}{5}\cos x.$

4.206. $u(x) = \mu\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{E}rf\, y\, u(y)\,dy + \sqrt{\pi}.$

4.207. $u(x) = \mu\int\limits_{0}^{\infty}\sin x\, \mathcal{E}rf\, y\, u(y)\,dy + 2x.$

4.208. Пусть при любом $a \in R$ линейно независимые комплекснозначные функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$ принадлежат $L_2(a, \infty)$, ядро $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, g_j(y)$. Решить уравнения:

$$1)\ u(x,y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(y,s)\, u(x,s)\, ds = 0; \tag{4.33}$$

$$2)\ u(x,y) - \overline{K(x,y)} + \int_x^\infty \int_x^\infty K(s,t)\, \overline{K(t,y)} u(x,s)\, ds\, dt = 0; \tag{4.34}$$

$$3)\ u(x,y) + \int_x^\infty K(x,s)\, \overline{K(s,y)}\, ds + \int_x^\infty \int_x^\infty K(s,t) \overline{K(t,y)} u(x,s) ds\, dt = 0. \tag{4.35}$$

Доказать единственность решения и вычислить $u(x,x)$.

4.209. Пусть S — окружность, радиус которой r_0, M и P — точки на S, $f(P) \in C(S)$ — заданная функция, φ_{PM} — угол между внешней нормалью к S в точке P и $\mathbf{r}_{PM} = \overline{PM}$. Решить уравнения:

$$1)\quad f(M) = \int_S \frac{\nu(P)\, \cos\, \varphi_{PM}}{r_{MP}}\, ds_P - \pi\nu(M);$$

$$2)\quad f(M) = \int_S \frac{\nu(P)\, \cos\, \varphi_{PM}}{r_{MP}} ds_P + \pi\nu(M)$$

при условии $\int_S f(P)\, ds_P = 0$.

В задачах 4.210 – 4.223 найти собственные функции и характеристические числа.

4.210. $u(x) = \mu \int_0^{2\pi} \sin(x+y)\, u(y)\, dy.$

4.211. $u(x) = \mu \int\limits_0^1 (2xy - x^2)\, u(y)\, dy.$

4.212. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\pi} (\frac{x}{\pi} \sin y + y \cos x)\, u(y)\, dy.$

4.213. $u(x) = \mu \int\limits_0^1 (\frac{9}{5} x^2 \ln y + 2y \ln x)\, u(y)\, dy.$

4.214. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cos y + \cos 3x \cos 3y)\, u(y)\, dy.$

4.215. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 (x - y)^2\, u(y)\, dy.$

4.216. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 (2x^2 - xy + 5y^2)\, u(y)\, dy.$

4.217. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\pi} \cos^2(x + y)\, u(y)\, dy.$

4.218. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^2(2x + y) \right] u(y)\, dy.$

4.219. $u(x) = \mu \int\limits_{-1}^1 (sh\, x\, ch\, y + 2xy + 3)\, u(y)\, dy.$

4.220. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u(y)\, dy}{1 + \cos 2y}.$

4.221. $u(x) = \mu \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{\pi^2} y + \frac{2}{3\pi} x \cos y + \cos x\ \sin\ y)\, u(y)\, dy.$

4.222. $u(x) = \mu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x\ \sin y + 2 \cos 2x\ \cos 2y)\, u(y)\, dy.$

4.223. $u(x) = \mu \int\limits_0^\pi (9 \sin x \cos y - 18 \sin 2x \cos 3y + 8 \sin 3x \cos 3y)\, u(y)\, dy.$

Пример 4.12. Характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x,y) = \begin{cases} \cos x \sin y, & 0 \le x \le y, \\ \sin x \cos y, & y \le x \le \pi \end{cases} \tag{4.36}$$

можно определить, решая задачу Штурма-Лиувилля. Из уравнения

$$u(x) = \mu \sin x \int\limits_0^x \cos y\, u(y)\, dy + \mu \cos x \int\limits_x^\pi \sin y\, u(y)\, dy$$

и результатов дифференцирования

$$u'(x) = \mu \cos x \int\limits_0^x \cos y\, u(y)\, dy - \mu \sin x \int\limits_x^\pi \sin y\, u(y)\, dy,$$

$$u''(x) = -\mu \sin x \int\limits_0^x \cos y\, u(y)\, dy - \mu \cos x \int\limits_x^\pi \sin y\, u(y)\, dy + \mu \cos^2 x\, u(x) + \mu \sin^2 x\, u(x)$$

следует, что

$$u'' + (1-\mu)u = 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u'(0) = u(\pi) = 0.$$

Общее решение $u(x) = A \sin \sqrt{1-\mu}x + B \cos \sqrt{1-\mu}x$ дифференциального уравнения удовлетворяет граничным условиям, если

$$1 - \mu A = 0, \quad B\sqrt{1-\mu} \sin \sqrt{1-\mu}\pi = 0,$$

откуда

$$\mu_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad u_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

В задачах 4.224 – 4.228 найти характеристические числа и собственные функции ядра $K(x,y)$.

4.224. $K(x,y) = \begin{cases} sh\, x\, ch\,(y-1), & 0 \le x \le y, \\ ch\,(x-1)\, sh\, y, & y \le x \le 1. \end{cases}$

4.225. $K(x,y)=\begin{cases}\cos x\,\cos(y-1), & 0\le x\le y,\\ \cos(x-1)\,\cos y, & y\le x\le 1.\end{cases}$

4.226. $K(x,y)=\begin{cases}e^{-y}\,ch\,x, & 0\le x\le y,\\ e^{-x}\,ch\,y & y\le x\le 1.\end{cases}$

4.227. $K(x,y)=\begin{cases}(\pi+x)(\pi-y), & -\pi\le x\le y,\\ (\pi-x)(\pi+y), & y\le x\le \pi.\end{cases}$

4.228. $K(x,y)=\begin{cases}(\pi+x)y, & 0\le x\le y,\\ x(\pi+y), & y\le x\le \pi.\end{cases}$

4.229. $K(x,y)=e^{-(x+y)}\begin{cases}\sin x(\sin y+\cos y), & 0\le x\le y,\\ \sin y(\sin x+\cos x), & x\le y\le \pi.\end{cases}$

4.230. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$u(\mathbf{s})=\mu\int\limits_{S_1}\frac{u(\mathbf{s}')\,ds'}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\,\cos\gamma}},\quad 0\le|\alpha|\le 1,$$

$\mathbf{s}=(1,\theta,\varphi)$, $\mathbf{s}'=(1,\theta',\varphi')$, $\cos\gamma=(\mathbf{s},\mathbf{s}')$, $u(\mathbf{s})\in C(S_1)$, S_1 — единичная сфера.

4.231. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$u(\mathbf{s})=\mu\int\limits_{S_1}\frac{u(\mathbf{s}')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}};$$

обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

Пример 4.13. Если характеристические числа μ_1, μ_2, μ_3, ... и собственные функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ ..., симметричного ядра $K(x,y)$ известны, то из теоремы Гильберта-Шмидта вытекает, что решение интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x)=\mu\int\limits_a^b K(x,y)u(y)\,dy+f(x)$$

может быть представлено посредством ряда

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) + f(x), \tag{4.37}$$

коэффициенты которого определяются из уравнения

$$a_n = \frac{\mu}{\mu_n}(a_n + f_n), \qquad f_n = (f,\, u_n).$$

Интегральное уравнение

$$u(x) = \int_0^{\pi} K(x,y)\, u(y)\, dy + 1$$

с ядром (4.36) имеет решение вида (4.37)

$$u(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x.$$

Так как $f_n = (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)}$, то $a_n = \frac{f_n}{\mu_n - 1} = \frac{(-1)^n 16}{\pi(2n+1)}$. Следовательно,

$$u(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n + \frac{1}{2})x}{(n + \frac{1}{2})^3}.$$

В задачах 4.232 – 4.236 решить уравнение

$$u(x) = \mu \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy + f(x).$$

4.232. $K(x,y) = \begin{cases} (\pi + x)(\pi - y), & -\pi \le x \le y, \quad -a = b = \pi, \\ (\pi - x)(\pi + y), & y \le x \le \pi, \quad f(x) = \sin x. \end{cases}$

4.233. $K(x,y) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le y, \quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}, \\ y, & y \le x \le \frac{\pi}{2} \quad f(x) = \sin 3x. \end{cases}$

4.234. $K(x,y)=\begin{cases}(\pi+x)y, & 0\le x\le y, \quad a=0,\ b=\pi,\\ x(\pi+y), & y\le x\le\pi, \quad f(x)=\sin x+\pi\cos x.\end{cases}$

4.235. $K(x,y)=\begin{cases}\sin x\,\cos y, & 0\le x\le y, \quad a=0,\ b=\frac{\pi}{2},\\ \sin y\,\cos x, & y\le x\le\frac{\pi}{2}, \quad \mu=-1,\ \ f(x)=x.\end{cases}$

4.236. $K(x,y)=\begin{cases}-y\ln y, & 0\le x\le y, \quad a=0,\ b=1,\\ -y\ln x, & y\le x\le 1, \quad \mu=-1,\ f(x)=1.\end{cases}$

4.237. Доказать, что при любой $f(x)\in C(S_1)$ интегральное уравнение

$$u(s)=\frac{1-2a}{4\sqrt{2}\pi}\int\limits_{S_1}\frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}}+f(s),$$

где $a\ne 0,-1,-2,\ldots$ разрешимо и решить его; обозначения те же, что и в задаче 4.230.

4.238. Решить уравнение (в обозначениях из задачи 4.230)

$$u(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}-\frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\int\limits_{S_1}\frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}}, \quad |t|<1.$$

4.239. Решить уравнение

$$u(s)=u_0Y_n^m(s)-\frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\int\limits_{S_1}\frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}};$$

обозначения те же, что и в задаче 4.230.

4.240. Решить уравнение

$$u(s)=u_0\sin^2 2\theta\sin 2\varphi-\frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\int\limits_{S_1}\frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}};$$

обозначения те же, что и в задаче 4.230.

4.241. Указать условие разрешимости интегрального уравнения

$$u(s) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \int\limits_{S_1} \frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}} + f(s), \quad f(s) \in C(S_1)$$

и решить его; обозначения те же, что и в задаче 4.230.

4.242. Решить уравнение (в обозначениях из задачи 4.230)

$$\int\limits_{S_1} \frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}} = f(s), \quad f(s) \in C(S_1).$$

4.243. Решить уравнение

$$\int\limits_{S_1} \frac{u(s')\,ds'}{\sqrt{1-\cos\gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}, \quad |t| < 1;$$

обозначения те же, что и в задаче 4.230.

Пример 4.14. Если действие интегрального оператора (4.2) представляет собой свертку

$$\int\limits_0^x K(x-y)\,u(y)\,dy,$$

то соответствующее интегральное уравнение целесообразно решать с помощью интегрального преобразования Лапласа. Уравнению

$$u(x) = \sqrt{x}e^{-x} + \int\limits_0^x e^{-(x-y)}\,u(y)\,dy$$

соответствует изображение

$$U(p) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(p+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{U(p)}{p+1},$$

откуда

$$U(p) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p\sqrt{p+1}}.$$

Так как $\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{p+1}} \leftrightarrow \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$, то

$$u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,erf(\sqrt{x}).$$

Решить уравнения 4.244 – 4.282 и систему уравнений 4.283 методом Лапласа.

4.244. $u(x) = \sqrt{x} + \int\limits_0^x \sin(x-y)\,u(y)\,dy.$

4.245. $u(x) = x\,\sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-y)\,u(y)\,dy.$

4.246. $u(x) = \sqrt{x} + \int\limits_0^x e^{-(x-y)}u(y)\,dy.$

4.247. $u(x) = e^{-x} + \int\limits_0^x \cos(x-y)u(y)\,dy.$

4.248. $u(x) = \sqrt{x}e^{-x} - 2\int\limits_0^x e^{x-y}\,u(y)\,dy.$

4.249. $\int\limits_0^x \frac{u(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{1}{3}}} = 1 - 2x.$

4.250. $\int\limits_0^x (x-y)^{\frac{1}{4}}\,u(y)\,dy = \frac{x}{2} + x^{\frac{5}{4}}.$

4.251. $u(x) = x\,J_0(x) + \int\limits_0^x J_1(x-y)\,u(y)\,dy.$

4.252. $u(x) = \sqrt{x} + \int\limits_0^x u(y)\,dy.$

4.253. $u(x) = \sqrt{x}e^{-x} + 2\int\limits_0^x e^{-(x-y)}\,u(y)\,dy.$

4.254. $u(x) = \sqrt{x}e^{-x} + \int\limits_0^x e^{-(x-y)}\,u(y)\,dy.$

4.255. $u(x) = \sqrt{x} + 2\int\limits_0^x e^{-(x-y)}\,u(y)\,dy.$

4.256. $u(x) = e^{-x^2} - erf\,x + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x u(y)\,dy.$

4.257. $\int\limits_0^x erf(\sqrt{x-y})\,u(y)\,dy = x^2.$

4.258. $u(x) = \int\limits_0^x x\,u(y)\,dy + x^2\cos x.$

4.259. $u(x) = -2\int\limits_0^x x\,u(y)\,dy + 4x.$

4.260. $u(x) = \int\limits_0^x J_0(x-y)\,u(y)\,dy + \frac{1}{2}(\sin x + x\,\cos x).$

4.261. $u(x) = \int\limits_0^x J_1(x-y)\,u(y)\,dy + \cos x - \frac{1}{2}x\,\sin x.$

4.262. $\int\limits_0^x yI_0(y)\,u(x-y)\,dy = x^2I_2(x).$

4.263. $\int\limits_0^x Y_0(x-y)u(y)\,dy = \cos x + xY_1(x).$

4.264. $\int\limits_0^x K_0(x-y)u(y)\,dy = shx + xK_0(x).$

4.265. $u(x) = +\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[5\left(1+\frac{xy}{4}\right)+\frac{x}{2}\left(1-\frac{5}{4}x\right)-\frac{y}{2}\left(1+\frac{5}{4}y\right)\right] u(y)\,dy + 9e^x.$

4.266. Решить уравнение замедления нейтронов 4.20, если замедлителем является водород.

4.267. $\int\limits_0^x J_0\left(2\sqrt{y(x-y)}\right) u(y)\,dy = x.$

4.268. $\int\limits_0^x J_0(\sqrt{x^2-y^2})u(y)\,dy = \sin x.$

4.269. $u(x) = \int\limits_0^x J_0(\sqrt{x^2-y^2})u(y)\,dy + x^2 + x\cos x - \sin x.$

4.270. $u(x) = \int\limits_0^x I_0(\sqrt{x^2-y^2})u(y)\,dy + x - sh\,x.$

4.271. $u(x) = \int\limits_0^x I_0(\sqrt{x^2-y^2})u(y)\,dy + x^2 + x\sin x - \frac{x^3}{3}.$

4.272. $\int\limits_a^x \frac{\cos\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}u(y)dy = f(x).$

4.273. $\int\limits_a^x \operatorname{sh}\alpha\sqrt{x-y}u(y)dy = f(x).$

4.274. $\int\limits_a^x \frac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}u(y)dy = f(x).$

4.275. $\int\limits_a^x \sin\alpha\sqrt{x-y}u(y)dy = f(x).$

4.276. $\int\limits_a^x e^{\beta(x-y)}\operatorname{sh}\alpha\sqrt{x-y}u(y)dy = f(x).$

4.277. $\int\limits_a^x e^{\beta(x-y)}\sin\alpha\sqrt{x-y}u(y)dy = f(x).$

4.278. $\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))u(y)dy = f(x).$

4.279. $\int\limits_a^x I_0(\alpha(x-y))u(y)dy = f(x).$

4.280. $\int\limits_a^x (x-y)J_0(\alpha(x-y))u(y)dy = f(x).$

4.281. $\int\limits_a^x (x-y)J_1(\alpha(x-y))u(y)dy = f(x).$

4.282. $\int\limits_a^x (x-y)^2 J_1(\alpha(x-y))u(y)dy = f(x).$

4.283. $\begin{cases} u(x) = \int\limits_0^x J_0(\sqrt{x^2-y^2})v(y)\,dy + 1 + x, \\ v(x) = \int\limits_0^x I_0(\sqrt{x^2-y^2})u(y)\,dy - e^{-x}. \end{cases}$

Решить уравнения 4.284 – 4.288 при условии $u(0) = 0$.

4.284. $\int\limits_0^x (2y-x)u(y)\,dy = x\sqrt{x}\,I_3(2\sqrt{x}).$

4.285. $\int\limits_0^x (4xy - x^2 - 3y^2)u(y)\,dy = 2x^2 J_4(2\sqrt{x}).$

4.286. $\int\limits_0^x \frac{2y-x}{\sqrt{x-y}}u(y)\,dy = xJ_2(2\sqrt{x}).$

4.287. $\int\limits_0^x (x-4y)\sqrt{x-y}\,u(y)\,dy = x^2 I_4(2\sqrt{x}).$

4.288. $\int\limits_0^x (x-6y)\sqrt[3]{(x-y)^2}\,u(y)\,dy = x\sqrt{x}\,J_3(2\sqrt{x}).$

Пример 4.15. Интегральное преобразование Лапласа применимо к нелинейным уравнениям вида:

$$\int_a^x u(y)u(x-y)dy = f(x).$$

В случае $f(x) = Ax + B$, $A > 0$, $B > 0$ изображение решения

$$U^2(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p},$$

откуда

$$U(p) = \pm\sqrt{B}\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p},\ \alpha = \frac{A}{B}.$$

Решение интегрального уравнения получается применением соответствия из задачи 3.83 п.8:

.

4.289. $u(x) = \frac{1}{4}\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy - 2 - x.$

4.290. $u(x) = 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.291. $u(x) = (1-x)e^x + \int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.292. $u(x) = x\,\cos x + 2\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.293. $u(x) = \cos x - \frac{1}{2}(\sin x + x\,\cos x) + \int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.294. $u(x) = x\,ch\,x - 2\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.295. $u(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.296. $u(x) = \frac{1}{2}\int_0^x u(y)\,u(x-y)\,dy - \frac{1}{2}\,sh\,x.$

4.297. $2\int_0^x y\,u(y)\,u(x-y)\,dy = x^2\sqrt{x}e^x.$

4.298. $\int\limits_0^x x\,u(y)\,u(x-y)\,dy = I_1(x).$

4.299. $u(x) = 1 + 3\int\limits_0^x (1-u(y))\,u(x-y)\,dy.$

4.300. $u(x) = \left(1+\frac{x^3}{6}\right)e^x - 1 + \int\limits_0^x (1-u(y))\,u(x-y)\,dy.$

4.301. $u(x) = x + \int\limits_0^x (u(y)-y)\,u(x-y)\,dy.$

4.302. $\int\limits_0^x (2-u(y))\,u(x-y)\,dy = 1 - e^{-x}.$

4.303. $u(x) = e^{-2x} - \int\limits_0^x u'(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.304. $u(x) = 4 + \mu\int\limits_0^x u'(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.305. $u(x) = 1 + x + x^2 + 2\int\limits_0^x u'(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.306. $u(x) = x\,e^x - \int\limits_0^x u'(y)\,u(x-y)\,dy.$

4.307. $u(x) = J_0(x) - x\sin x + 2\int\limits_0^x y\,u(y)\,u'(x-y)\,dy.$

4.308. $\int\limits_a^x u(y)u(x-y)dy = f(x)$, где $f(x)$ равна $1)Ax^{\alpha}$; $2)Ae^{\beta x}$; $3)Ax^{\alpha}e^{\beta x}$, $4)A\sin\alpha x$; $5)A\,\mathrm{sh}\,\alpha x$; $6)A\cos\alpha x$; $7)A\,\mathrm{ch}\,\alpha x$; $8)A\sin\alpha xe^{\beta x}$; $9)A\,\mathrm{sh}\,\alpha xe^{\beta x}$; $10)A\cos\alpha xe^{\beta x}$; $11)A\,\mathrm{ch}\,\alpha xe^{\beta x}$; $12)A\sin\alpha\sqrt{x}$; $13)A\,\mathrm{sh}\,\alpha\sqrt{x}$; $14)(Ax+B)e^{\beta x}$, $A>0$, $B>0$; $15)(Ax^{\alpha-1}+Bx^{\alpha})$; $16)(Ax^{\alpha-1}+Bx^{\alpha})e^{\beta x}$, $\alpha>0$.

Пример 4.16. Интегральное уравнение, содержащее несобственный интеграл, называется сингулярным. Некоторые уравнения этого типа могут быть решены с помощью интегральных преобразований. Сингулярное уравнение

$$u(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 2\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{\pi y}}\, u(y)\, dy$$

посредством преобразования Лапласа трансформируется в функциональное уравнение (см. пример 3.7)

$$U(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{2}{p\sqrt{p}} U\left(\frac{1}{p}\right). \tag{4.38}$$

Замена $p \to 1/p$ преобразует это уравнение в

$$U\left(\frac{1}{p}\right) = 2p + \sqrt{p} - 2p\sqrt{p}U(p). \tag{4.39}$$

Из (4.38) и (4.39) следует, что

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \;\leftrightarrow\; u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Решить уравнения 4.309 – 4.321, применяя интегральное преобразование Лапласа.

4.309. $\int\limits_x^\infty \frac{u(y)\, dy}{\sqrt{y-x}} = f(x).$

4.310. $\int\limits_x^\infty \frac{u(y)\, dy}{\sqrt{y^2-x^2}} = f(x).$

4.311. $\int\limits_{-\infty}^\infty u(\sqrt{y^2+x^2})\, dy = f(x).$

4.312. $u(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{\pi y}}\, u(y)\, dy.$

4.313. $u(x) = arctg\,\sqrt{x} - \sqrt{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{\pi y}}\,u(y)\,dy.$

4.314. $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{\pi x}}\,u(y)\,dy.$

4.315. $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\int\limits_0^\infty J_0(2\sqrt{xy})\,u(y)\,dy.$

4.316. $u(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty J_0(2\sqrt{xy})\,u(y)\,dy.$

4.317. $u(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{x}{y}}J_1(2\sqrt{xy})\,u(y)\,dy.$

4.318. $u(x) = 1 - 2x + 2\int\limits_0^\infty \frac{x}{y}J_2(2\sqrt{xy})\,u(y)\,dy.$

4.319. $u(x) = J_0(x) + \mu\int\limits_0^\infty J_0(2\sqrt{xy})\,u(y)\,dy, \quad |\mu| \neq 1.$

4.320. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}}\,u(y)\,dy = (\sqrt{x}+1)^2.$

4.321. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}}\,u(y)\,dy = \mathcal{E}rf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\right), \quad \alpha > 0.$

Решить уравнения 4.322 – 4.334, применяя интегральное преобразование Меллина.

4.322. $\int\limits_0^\infty \ln\left|\frac{x}{y} - 1\right| u(y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \eta(x-a)\,\ln\frac{a}{x}, \quad a > 0, \quad x > 0.$

4.323. $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x(\ln x - \ln y)}{y(x+y)}u(y)\,dy = \ln(x+1).$

4.324. $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln\sqrt{y}+\sqrt{x}}{|\sqrt{y}-\sqrt{x}|}u(y)\,dy = \eta(1-x)lx.$

4.325. $u(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{xu(y)\,dy}{x^2+y^2}+\ln\frac{|x-1|}{x+1}$.

4.326. $u(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln|x^2-1|-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{u(y)\,dy}{x+y}$.

4.327. $u(x)=\int\limits_x^\infty \ln\frac{y}{x}u(y)\frac{dy}{y}+(1-\frac{1}{6}\ln^2 x)\ln x\,\eta(1-x)$.

4.328. $u(x)=\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \sqrt{\frac{y}{x}}u(y)\frac{dy}{y}+\frac{x}{x+1}$.

4.329. $\int\limits_0^\infty xe^{-xy}u(y)\,dy=e^{-x}$.

4.330. $\int\limits_0^\infty \ln|xy-|u(y)\,dy=\ln(x+1)$.

4.331. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos xyu(y)\,dy=e^{-x}$.

4.332. $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin\sqrt{xy}u(y)\frac{dy}{y}=e^{-\sqrt{x}}$.

4.333. $u(x)=e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos xy\,u(y)\,dy$.

4.334. $u(x)=\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \sin xy\,u(y)\,dy$.

4.335. Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^\infty \ln|y-x|\,u(y)\,dy=A\ln(a+x),\quad a>0,\ \ x>0$$

при условии $\int_0^\infty u(x)\,dx<\infty$.

4.336. Показать, что при условиях задачи 4.18 освещенность плоскости $z=0$ равна

$$E_1(r)=\frac{I}{l^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{l_1}{l}t}+\alpha_2 t\,K_1(t)e^{-\frac{l_2}{l}t}}{1-\alpha_1\alpha_2 t^2K_1^2(t)}J_0\left(\frac{rt}{l}\right)t\,dt.$$

4.337. В нелинейных упругих средах с памятью может распространяться волна $f(t-x)$ с постоянным профилем; функция $f(t)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению с нулевым начальным условием (задача 4.5)

$$k\,f^2(t) - \int_0^t R(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau = 0, \qquad f(0) = 0.$$

Найти нетривиальное решение уравнения
1) в форме степенной функции для степенного ядра $R(t)=Ct^{\alpha-1}$, $0 < t,\ 0 < \alpha \le 1 <\ C > 0$;
2) для экспоненциального ядра $R(t)=Ce^{-\alpha t},\ t\ge 0,\ \alpha > 0,\ C > 0$;
3) для осциллирующего ядра $R(t)=C\sin \omega t,\ t \ge 0,\ \omega > 0,\ C > 0$.

4.3. Ответы

4.1. $v(x)=\mu \int\limits_0^l K(x,\xi)\,v(\xi)\,d\xi$, $\mu=\omega^2$, $K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)S(x)\rho(\xi)S(\xi)}\,G(x,\xi)$.
4.2. $\omega = \sqrt{\mu_1}$, где μ_1 — наименьшее характеристическое число симметричного ядра $K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)S(x)S(\xi)}\,G(x,\xi)$.
4.3. Решение. Разность потенциалов между точками A и B (рис. **??**)

$$u(t) = \Phi'(t) = i_L(t)R = \tfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau), d\tau,$$

следовательно, $i_1 = \frac{u}{R}$, $i_2 = Cu'$. Так как $i + i_1 + i_2 = 0$, то функция $u(t)$ является решением задачи Коши:

$$u' + \tfrac{1}{CR}u = -\tfrac{1}{C}i, \ \ u(0) = u_0.$$

Исходя из решения $Const \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ однородного уравнения $u' + \frac{1}{CR}u = 0$, решение неоднородного уравнения можно отыскивать в виде (метод вариации постоянной)

$$u(t) = A(t)\,e^{\frac{t}{CR}}, \ \ A(0) = u_0.$$

В результате

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}} - \tfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau.$$

Таким образом, поток магнитной индукции

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t u(s)\,ds = e^{-\frac{s}{RC}}\,ds - \tfrac{1}{C}\int\limits_0^t ds \int\limits_0^s i(\tau)\,e^{-\frac{s-\tau}{RC}}\,d\tau =$$

$$= u_0 RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) - \tfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^t e^{-\frac{s-\tau}{RC}}\,ds.$$

Равенство двух выражений для $\Phi(t)$ представляет собой интегральное уравнение для $i(t)$.

4.4. Указание к п.1. Из системы (1.9) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0$$

в которое нужно подставить ε в форме (4.15). Решение п.2. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} = \sqrt{A}\left(1 + \gamma\frac{B}{A}\sigma\right) + \mathcal{O}(\gamma^2), \\ \Psi(t) &= \frac{\sqrt{1-\gamma\mathcal{R}}}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma\mathcal{R}}{2}\right) + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned} \quad , \quad r \to \infty$$

Левая часть равенства (4.16) представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi \mp \Psi\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\Phi\frac{\partial}{\partial t} \pm \Psi\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) - \Psi\Phi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} \mp \left(\Psi\frac{\partial}{\partial x}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\Phi\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right).$$

Второе слагаемое можно преобразовать с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

и это слагаемое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\Phi\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Phi - \Phi\Psi\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x} = -\frac{B\gamma^2}{2\sqrt{A}\rho}(\mathcal{R}\sigma - \sigma\mathcal{R})\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \mathcal{O}(\gamma^2).$$

4.5. Решение. Если $f(t-x)$ — решение уравнения (4.18), то

$$\left(f - \tfrac{k\gamma}{2}f^2\right)' - f' = \tfrac{\gamma}{2}\mathcal{R}f' = 0$$

или

$$(k\gamma f^2)' - \gamma\mathcal{R}f' = 0,$$

откуда

$$rf^2(t-x) - \int_0^t R(t-\tau)f(t-\tau)\,d\tau = C.$$

Если заменить $t - x \to t$ и учесть, что из условия $f(0) = 0$ следует $C = 0$, то получится уравнение (4.19).

4.6. Указание. См. задачу 3.28.

4.7. На рис. 4.1 показано построение изображения C' точки C объекта, F — положение фокуса линзы L. В плоскости α изображение точки C пред-

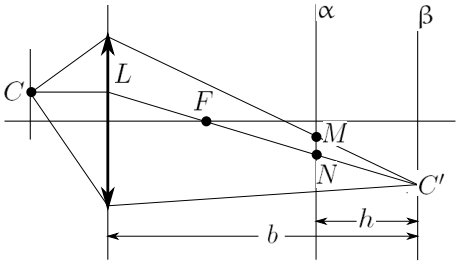

Рис. 4.1

ставляет собой (из-за размытости) круг, диаметр которого $MN{=}2r$. Так как

$\triangle ABC' \sim \triangle MNC'$, то

$$\tfrac{2r}{h} = \tfrac{2R}{b} \quad \Longrightarrow \quad r = \tfrac{Rh}{b}.$$

Освещенности изображений в точке (x,y) плоскости β и в точке (x,y) плоскости α соответственно равны: от единичного потока из точки C объекта — $\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)$, где (ξ,η) — координаты точки C', и $E(\sigma)$, от полного потока из точки C объекта — $u(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)$ и $E(\sigma)\,u(\xi,\eta)$, от потока из всех точек C объекта — $\int\limits_S \delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)\,u(\xi,\eta)d\xi\,d\eta = u(x,y)$ и

$$v(x,y) = \int\limits_S E\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\,u(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

4.9. Указание. Из закона сохранения энергии $\dot{x}^2 + U(x) = E$ получить уравнение

$$T(E) = 2\sqrt{2m}\int\limits_0^{x_0(E)} \tfrac{dx}{\sqrt{E_U(x)}},$$

где $x_0(E)$ — корень уравнения $U(x) - E = 0$, и перейти к переменной интегрирования U.

4.9. Решение. Функция $u(x,y,z,t)$ удовлетворяет уравнению $u_{tt} = c^2\Delta u$, граничному условию $u(0,0,z,t)|_{z>0} = -f(z-ct)$ и (при любом t) условиям излучения (1.80). В переменных $\xi = z-ct$, $\eta = r-ct$ (они выбраны с учетом расходящейся волны) задача примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi-\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \eta > \xi, \tag{4.40}$$

$$u|_{\xi=\eta} = -f(\xi), \quad u|_{\eta=\infty} = 0. \tag{4.41}$$

Решение уравнения (4.40)

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_\eta^\infty \tfrac{v(s)\,ds}{s-\xi} + w(\xi)$$

удовлетворяет условиям (4.41), если

$$w(\xi) = 0, \quad f(\xi) = \int\limits_\xi^\infty \tfrac{v(s)\,ds}{\xi-s}.$$

4.12. Указание. В момент времени t в элементе объема $d\mathbf{r}$ с координатой $\mathbf{r}$ содержится $n(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{l}} n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)\,d\mathbf{l}d\mathbf{r}$ нейтронов, где $n(\mathbf{r},t)$ — их плотность, $n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)$ — функция распределения (см. пример 1.11). Полагая $d\mathbf{r} = ds\,v\,dt$, можно сказать, что $n(\mathbf{r},\mathbf{l},t)d\mathbf{r}d\mathbf{l} = dN$ — число нейтронов со скоростями в интервале от $v\mathbf{l}$ до $v\mathbf{l}+vd\mathbf{l}$, которые пересекают элемент площади $d\mathbf{S} = dS\mathbf{l}$ за время от t до $t+dt$ и поступают из конуса с вершиной в точке $\mathbf{r}$, осью $-\mathbf{l}$, раствором $d\mathbf{l}$. Нейтроны, выходящие из элемента $d\mathbf{r}_1 = r_1^2 dr_1 d\mathbf{l}$ конуса, где $\mathbf{r_1} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — координата элемента, могут достичь площадки dS в момент t, если они испытали рассеяние или были испущены источниками в момент $t - \frac{r_1}{v}$. Если dN_1 — их число, то

$$dN = \textstyle\int_0^{R(r,-\mathbf{l})} dN_1 \frac{dS}{4\pi r_1^2} e^{-\Sigma r_1},$$

где интегрирование осуществляется по переменной r_1, точка $R(r,-\mathbf{l})\in\Omega$.

4.13. $\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\Sigma_s\Phi\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{v}\right)+\right.$

$\left.+F\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{v}\right)\right]\exp\left[-\int\limits_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\Sigma\left(\mathbf{r}'-\eta\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\right)\,d\eta\right]\frac{dr'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2}.$

4.14. Указание. В уравнении Пайерлса

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_a^b[\Sigma_s\Phi(\xi)+F(\xi)]\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{\Sigma\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}d\eta\,d\zeta$$

перейти к полярным координатам $\eta=\rho\cos\varphi$, $\zeta=\rho\sin\varphi$ и ввести новую переменную

$$\chi^2=\frac{(\xi-x)^2+\rho^2}{(\xi-x)^2}.$$

4.15. Указание. Проделав те же выкладки, что и в указании к предыдущей задаче, получить уравнение

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b[\Sigma_s(\xi)\Phi(\xi)+F(\xi)]\,d\xi\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{\chi}\exp[-\int\limits_0^{\chi|\xi-x|}\Sigma\left(\xi-\frac{\tau(\xi-x)}{\chi|\xi-x|}\right)\,d\tau]\,d\chi,$$

в котором сделать замену $\kappa=\xi-\frac{\tau(\xi-x)}{\chi|\xi-x|}$.

4.16. Указание. Функция $\Phi(\xi,\mu)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}&\mu\Phi_\xi+\Phi=\tfrac{1}{2}vn,\quad 0<\xi<\Delta,\\&\Phi(0,\mu)=0,\quad \mu>0,\\&\Phi(\delta,\mu)=v\chi(\mu),\quad \mu<0.\end{aligned}$$

Решение уравнения относительно Φ

$$\Phi(\xi,\mu)=\frac{v}{2\mu}\begin{cases}\int_0^{\xi}n(\eta)e^{\frac{\eta-\xi}{\mu}}d\eta, & \mu>0,\\ \int_{\Delta}^{\xi}n(\eta)\,e^{\frac{\eta-\xi}{\mu}}d\eta+\chi(\mu)e^{\frac{\Delta-\xi}{\mu}}, & \mu<0,\end{cases}$$

проинтегрировать по μ.

4.17. $n(\xi)=\int_0^{\infty}K(\xi-\eta)\,n(\eta)\,d\eta$, где $K(s)$ имеет вид (4.21). Указание. Функция распределения — решение задачи:

$$\begin{aligned}&\mu\psi_\xi+\psi=\tfrac{1}{2}u,\quad 0<\xi,\\&\psi(0,\mu)=0,\quad \mu>0,\\&\psi(\infty,\mu)=0,\quad -1<\mu<0.\end{aligned}$$

4.19. Указание. Задача

$$\begin{aligned}&u''(t)=-H(u(t),t),\quad 0<t<\tfrac{T}{4},\\&u'(0)=u\big(\tfrac{T}{2}\big)=0\end{aligned}$$

сводится к уравнению

$$u(t)=\int\limits_0^{\frac{T}{4}}G(t,\tau)H(u(\tau),\tau)\,d\tau,$$

где функция $G(t,\tau)$ удовлетворяет условиям

$$G_{tt} = -\delta(t-\tau), \quad 0 < t < \tfrac{T}{4},$$
$$G_t|_{t=0} = G|_{t=\frac{T}{4}} = 0.$$

4.20. $v(t) = \frac{q}{l}\int_0^{\frac{T}{2}} G(t,\tau)\sin[v(\tau) - h(\tau)]d\tau$, где $v(t) = u(t) + h(t)$, $h(t) = \frac{F_0 T^2}{4\pi^2 ml}\sin\frac{2\pi t}{T}$, $G(t\tau) = \begin{cases} \frac{T-2\tau}{T}t, & 0 \le t \le \tau, \\ \frac{T-2\tau}{T}\tau, & \tau \le t \le \frac{T}{2}. \end{cases}$ Указание. Решать краевую задачу:

$$u''(t) + \frac{G}{l}\sin u(t) = \tfrac{F_0}{ml}\sin\tfrac{2\pi t}{T},\ 0 < t < \tfrac{T}{2},$$
$$u(0) = u(\tfrac{T}{2}) = 0$$

4.24. $u(x) = \frac{16x^2}{\sqrt{\pi}}(4x^4 - 5)e^{-x^4}$. **4.25.** $u(x) = \frac{f^{iv}(x) - (\alpha^2+\beta^2)f''(x) + \alpha^2\beta^2 f(x)}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}$.

4.26. $u(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\big(\frac{f'(x)}{\operatorname{sh} 2\alpha x}\big)$.

4.27. $u(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\big(\frac{f'(x)}{ch x\,\operatorname{sh}^{\alpha-1} x}\big)$. **4.28.** $u(x) = \frac{1}{n!x}\big(x\frac{d}{dx}\big)^{n+1} f(x)$.

4.29. $u(x) = \frac{\ln x}{2^n n! x}\big(\frac{x}{\ln x}\frac{d}{dx}\big)^{n+1} f(x)$. **4.30.** $u(x) = (x+b)f''(x) + f'(x)$.

4.31. $u(x) = \frac{(-1)^n}{n!\alpha^n \sin^2\alpha x}\big(\sin^2\alpha x\frac{d}{dx}\big)^{n+1} f(x)$.

4.32. $u(x) = 2A\frac{kx(x-a)Y_0(kx) - (2x-a)Y_1(kx)}{kxY_1^2(rx)}$. **4.33.** $u(x) = \frac{d}{dx}\big(\frac{xf'(x)}{\nu J_\nu(\alpha x) - \alpha x J_{\nu+1}(\alpha x)}\big)$.

4.34. $u(x) = \frac{d}{dx}\big(\frac{xf'(x)}{\nu K_\nu(\alpha x) - \alpha x K_{\nu+1}(\alpha x)}\big)$. **4.35.** $u(x) = \frac{2A}{3}\big(1 + \frac{2}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}\big)$.

Указание. Посредством дифференцирования интегральное уравнение сводится к задаче Коши

$$(2x-1)v' + v = 2Ax,\ 1 < x,\ v(1) = 0, \text{ где } v(x) = \int_1^x u(y)dy.$$

4.36. $u(x) = \frac{2C}{A+B}xe^{-\frac{B\alpha x^2}{A+B}}\big(2e^{-\frac{B\alpha x^2}{A+B}} - e^{\frac{B\alpha a^2}{A+B}}\big)$.

4.37. $u(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{A+B}\frac{d}{dx}\big[e^{\frac{B(\alpha-\beta)x}{A+B}}\int_a^x e^{\frac{A(\alpha-\beta)y}{A+B}}\big(f(y)e^{-\alpha y}\big)'dy\big]$.

4.38. $u(x) = \frac{C}{A+B}\big|\frac{\ln a}{\ln x}\big|^{\frac{A}{A+B}}\frac{1}{x\ln x}$.

4.39. $u(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\big[|\ln\alpha x|^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \ln\alpha y|^{-\frac{2B}{A+B}} f'(y)dy\big]$.

4.40. $u(x) = f'(x) + \alpha\int_a^x f'(y)\sin(x-y)dy$,

$$u(x) = 4Aa - 2A(a\cos k(x-a) - \tfrac{1}{k}\sin k(x-a),\ k^2 = 2\alpha^2.$$

Указание. После трехкратного дифференцирования и исключения интегрального слагаемого для решения $u(x)$ получается задача Коши:

$$\begin{cases} u'' + 2\alpha^2 u = f''' + 4\alpha^2 f', \\ u(a) = f'(a),\ u'(a) = f'(a). \end{cases}$$

4.41. $u(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\big[|J_\nu(\alpha x)|^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x |J_\nu(\alpha y)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'(y)dy\big]$.

4.42. $u(x) = f(x) + \mu\int_a^x f(y)e^{\mu(x-y)}dy$. **4.43.** $u(x) = Axe^{\frac{\mu}{2}(x^2-a^2)}$.

4.44. $u(x) = x\sin x$. **4.45.** $u(x) = \frac{A}{3}e^{-2k(x-a)} + \frac{2A}{3}e^{-k(x-a)}\cos k\sqrt{3}(x-a)$, $k = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4}}$.

Указание. Интегральное уравнение последовательным дифференцированием сводится к эквивалентной задаче Коши:

$$\begin{cases} u'' - 2\mu = 0, \\ u(a) = A,\ u'(a) = u''(a) = 0. \end{cases}$$

4.46. $u(x)=\frac{1}{13}\left(\sin x+8\cos x+\frac{4\sqrt{3}}{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x-8e^{x}\cos\sqrt{3}x\right)$.

4.47. $u(x)=\frac{(x^2-3)\,\sin x+(x^2+4x+1)\,\cos x}{(x+1)^3}$.

4.48. $u(x)=\frac{\pi}{2}[\,Y_1(1)J_1'(x+1)-J_1(1)Y_1'(x+1)\,]$.

4.49. Если $\beta-\alpha-\mu\neq 0$, то $u(x)=\frac{Ae^{\beta x}}{\beta-\alpha-\mu}\big(\beta-\alpha-\mu e^{(\beta-\alpha-\mu)(a-x)}\big)$,
если $\beta-\alpha-\mu=0$, то $u(x)=Ae^{\beta x}(1+\mu(x-a))$.

4.50. $u(x)=\frac{A}{2}\big(5e^{4(a-x)}-4e^{a-x}+1\big)$. Указание. В результате двукратного дифференцирования и исключения каждый раз интегрального слагаемого для решения $u(x)$ получается задача Коши:

$$\begin{cases} u''+5u'+10u=2A,\\ u(a)=A,\ u'(a)=-8A. \end{cases}$$

4.51. Если $D=\alpha(\alpha-4\mu)>0$, то

$u(x)=Ae^{\frac{\alpha(x-a)}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{D}(x-a)}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{D}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{D}(x-a)}{2}\right]$, если $D<0$, то

$u(x)=Ae^{\frac{\alpha(x-a)}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{|D|}(x-a)}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{|D|}}\sin\frac{\sqrt{|D|}(x-a)}{2}\right]$, если $D=0$, то

$u(x)=Ae^{\frac{\alpha(x-a)}{2}}(1-\frac{\alpha}{2}(x-a))$. **4.52** $u=\lambda\int\limits_0^x\frac{k(x)}{k(y)}f(y)e^{\lambda(x-y)}dy+f$.

1) $u(x)=1-J_0(x)+J_1(x)$; 2) $u(x)=\frac{(\lambda+2)\sin x-\lambda\cos x+\lambda e^{(\lambda+1)x}}{(\lambda+1)^2+1}$;

3) $u(x)=x+\frac{\lambda}{2}\left(e^{x^2+x}-1\right)-\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4}e^{\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2}[erf\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)-erf\frac{\lambda}{2}]$. **4.53.** Если $\mu<0$, то $u(x)=-\frac{A\pi k\sqrt{a}}{2}x(Y_{\frac{1}{3}}(ka\sqrt{a})J_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x})-J_{\frac{1}{3}}(ka\sqrt{a})Y_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{-2\mu}$, если $\mu>0$, то $u(x)=Ak\sqrt{ax}(K_{\frac{1}{3}}(ka\sqrt{a})I_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x})+I_{\frac{1}{3}}(ka\sqrt{a})K_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{2\mu}$. Указание. В результате дифференцирования интегральное уравнение сводится к задаче Коши

$$v''-2\mu xv=0,\ v(0)=0,\ v'(0)=A,\ \text{ где } v'=u.$$

Если $\mu<0$, то замена $\xi=\frac{2}{3}\sqrt{-2\mu}$, $w=x^{-\frac{1}{2}}v$ преобразует уравнение для v в уравнение Бесселя (см.решение задачи 2.316.)

$$w''+\tfrac{1}{\xi}w'+(1-\tfrac{1}{9\xi^2})w=0.$$

Таким образом, функции

$$v_1(x)=\sqrt{x}J_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x}),\ \ v_2(x)=\sqrt{x}Y_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x}),\ k=\tfrac{2}{3}\sqrt{-2\mu},$$

представляют собой фундаментальную систему решений уравнения для v. Вычисление производных этих решений проще всего проделать с помощью рекуррентных формул для цилиндрических функций, в результате

$$v_1'(x)=\tfrac{3kx}{2}J_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x}),\ \ v_2'(x)=\tfrac{3kx}{2}Y_{-\frac{2}{3}}(kx\sqrt{x}),$$

так что определитель Вронского $W(v_1,v_2)=3/\pi$. Константы C_1 и C_2 определяются начальными условиями. Ситуация при $\mu>0$ аналогична.

4.54. $u(x)=f(x)-\frac{\mu x}{W}\int_a^x(u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))f(y)dy$; если $\mu<0$, то $u_1(x)=\sqrt{x}J_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $u_2(x)=\sqrt{x}Y_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{-\mu}$, $W=\frac{3}{\pi}$, если $\mu>0$ то $u_1(x)=\sqrt{x}I_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $u_2(x)=\sqrt{x}K_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{\mu}$, $W=-\frac{3}{2}$.

Частный случай. Если $\mu<0$, то
$u(x)=\frac{Ak a\pi x\sqrt{x}}{2}(Y_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})J_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})-J_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})Y_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{-\mu}$, если $\mu>0$, то $u(x)=Akax\sqrt{x}(K_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})I_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})+I_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})K_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{\mu}$.
Указание. Интегральное уравнение сводится к задаче Коши

$$\begin{cases} v''-\mu xv=f, \\ v(a)=v'(a)=0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad v(x)=\int_a^x (x-y)u(y)dy.$$

4.55. Если $\mu<0$, то $u(x)=\frac{A\pi ak\sqrt{x}}{2}\big[Y_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})J_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})-J_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})Y_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})\big]$, где $k=\frac{2}{3}\sqrt{-\mu}$, если $\mu>0$, то
$u(x)=Aka\sqrt{x}\big[K_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})I_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x})+I_{-\frac{2}{3}}(ka\sqrt{a})K_{\frac{1}{3}}(kx\sqrt{x}\big]$, где $k=\frac{2}{3}\sqrt{\mu}$.
4.56. $u(x)=f(x)-\frac{\mu}{W}\int_a^x (u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))y^\alpha f(y)dy$; если $\mu<0$, то $u_1(x)=\sqrt{x}J_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $u_2(x)=\sqrt{x}Y_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $k=\sqrt{-\mu}$, $\beta=\frac{\alpha+2}{2}$, $W=\frac{2\beta}{\pi}$, если $\mu>0$, то $u_1(x)=\sqrt{x}I_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $u_2(x)=\sqrt{x}K_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $k=\sqrt{\mu}$, $\beta=\frac{\alpha+2}{2}$, $W=-\beta$.
Частный случай. Если $\mu<0$, то
$u(x)=\frac{A\pi k a^{\beta-\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{2\beta}\big[Y_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{\sqrt{-\mu}}{\beta}a^\beta)J_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{\sqrt{-\mu}}{\beta}x^\beta)-J_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{\sqrt{-\mu}}{\beta}a^\beta)Y_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{\sqrt{-\mu}}{\beta}x^\beta)\big]$,
если $\mu>0$, то
$u(x)=\frac{ka^{\beta-\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{\beta}\big[Y_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}a^\beta)J_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}x^\beta)-J_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}a^\beta)Y_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}x^\beta)\big]$.
Указание. В результате дифференцирования интегральное уравнение сводится к задаче Коши $u''-\mu x^\alpha u=f''$, $u(a)=f(a)$, $u'(a)=f'(a)$, решение которой, построенное методом вариации постоянных, содержит интегралы $\int_a^x u_i(y)f''(y)dy$, $i=1,2$. После двукратного интегрирования по частям производные $u_i''(y)$ следует заменить на $\mu x^\alpha u_i$, исходя из дифференциального уравнения, которому они удовлетворяют.
4.57. $u(x)=f(x)+\frac{1}{W}\int_a^x (u_1'(x)u_2'(y)-u_2'(x)u_1'(y))y^\alpha f(y)dy$; если $\alpha\mu<0$, то $u_1(x)=\sqrt{x}J_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $u_2(x)=\sqrt{x}Y_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $k=\sqrt{-\mu\alpha}$, $\beta=\frac{\alpha+1}{2}$, $W=\frac{2\beta}{\pi}$, если $\alpha\mu>0$, то $u_1(x)=\sqrt{x}I_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $u_2(x)=\sqrt{x}K_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)$, $k=\sqrt{\mu\alpha}$, $\beta=\frac{\alpha+1}{2}$, $W=-\beta$; Частный случай. Если $\alpha\mu<0$, то
$u(x)=-\frac{A\pi k\sqrt{a}x^{\beta-\frac{1}{2}}}{2\beta}\big[J_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}a^\beta)Y_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{k}{\beta}x^\beta)-Y_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}x^\beta)J_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{k}{\beta}x^\beta)\big]$,
если $\alpha\mu>0$, то
$u(x)=\frac{Ak\sqrt{a}x^{\beta-\frac{1}{2}}}{\beta}\big[K_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}a^\beta)I_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{k}{\beta}x^\beta)+I_{\frac{1}{2\beta}}(\frac{k}{\beta}a^\beta)K_{\frac{1}{2\beta}-1}(\frac{k}{\beta}x^\beta)\big]$.
Указание. В результате дифференцирования интегральное уравнение сводится к задаче Коши

$$\begin{cases} v''-\mu\alpha x^{\alpha-1}v=f', \\ v(a)=0,\ v'(a)=f(a), \end{cases} \qquad \text{где} \quad v(x)=\int_a^x u(y)dy.$$

Если $\alpha\mu<0$, то замена $\xi=\frac{\sqrt{-\mu\alpha}}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{2}}$, $w=\frac{1}{\sqrt{x}}v$ приводит к уравнению Бесселя, так что функции

$$v_1(x)=\sqrt{x}J_{\frac{1}{2\beta}}(\tfrac{k}{\beta}x^\beta), \quad v_2(x)=\sqrt{x}Y_{\frac{1}{2\beta}}(\tfrac{k}{\beta}x^\beta),\ \beta=\tfrac{\alpha+1}{2},\ k=\sqrt{-\alpha\mu},$$

представляют собой фундаментальную систему решений однородного уравнения для $v(x)$. Вычисление производных $v_1'(x)$, $v_2'(x)$ проводится с помощью рекуррентных формул для цилиндрических функций. Пусть $t=\frac{k}{\beta}x^{\beta}$, тогда

$$v_1'(x)=\tfrac{d}{dt}\big(\tfrac{\beta}{k}\big)^{\frac{1}{2\beta}}\cdot\tfrac{d}{dt}t^{\frac{1}{2\beta}}J_{\frac{1}{2\beta}}(t)=\big(\tfrac{\beta}{k}\big)^{1-\frac{1}{2\beta}}t^{1-\frac{1}{2\beta}}J_{\frac{1}{2\beta}-1}(t)k.$$

Аналогично $v_2'(x)=k\big(\frac{\beta}{k}\big)^{1-\frac{1}{2\beta}}Y_{\frac{1}{2\beta}-1}(t)$. Отсюда на основании соотношения $J_\nu(x)Y_{\nu-1}x-Y_\nu(x)J_{\nu-1}x=\frac{2}{\pi x}$ следует, что определитель Вронского фундаментальной системы решений $W=W(v_1,v_2)=\frac{2\beta}{\pi}$. Решение задачи Коши получается методом вариации постоянных: $u(x)=C_1(x)v_1(x)+C_2(x)v_2(x)$, где $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} C_1'v_1+C_2'v_2=0,\\ C_1'v_1'+C_2'v_2'=f'(x).\end{cases}$$

Решение этой системы

$C_1(x)=-\frac{1}{W}\int_a^x v_2(y)f'(y)dy+C_{10}$, $C_2(x)=\frac{1}{W}\int_a^x v_1(y)f'(y)dy+C_{20}$;

для определения констант C_{10} и C_{20} нужно применить начальные условия. Решение интегрального уравнения $u(x)=v'(x)$ содержит интегральное слагаемое; окончательный вид решения получается после преобразования интеграла интегрированием по частям. **4.58.** $u(x)=f(x)-\frac{\mu}{W}\int_a^x(u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))e^{\alpha y}f(y)dy$; если $\mu<0$, то $u_1(x)=J_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})$, $u_2(x)=Y_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})$, $k=\frac{2\sqrt{-\mu}}{\alpha}$, $W=\frac{\alpha}{\pi}$,

если $\mu>0$, то $u_1(x)=I_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})$, $u_2(x)=K_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})$, $k=\frac{2\sqrt{\mu}}{\alpha}$, $W=-\frac{\alpha}{2}$,

Частный случай. Если $\mu<0$, то

$u(x)=-A\pi ke^{\frac{\alpha a}{2}}\big[J_1(ke^{\frac{\alpha a}{2}})Y_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})-Y_1(ke^{\frac{\alpha a}{2}})J_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})\big]$, $k=\frac{2\sqrt{-\mu}}{\alpha}$,

если $\mu>0$, то $u(x)=2Ake^{\frac{\alpha a}{2}}\big[K_1(ke^{\frac{\alpha a}{2}})I_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})+I_1(ke^{\frac{\alpha a}{2}})K_0(ke^{\frac{\alpha x}{2}})\big]$, $k=\frac{2\sqrt{\mu}}{\alpha}$.

Указание. В результате двукратного дифференцирования получается задача Коши:

$$\begin{cases} u''-e^{\alpha x}u=f'',\\ u(a)=f(a),\ u'(a)=f'(a).\end{cases}$$

Замена $\xi=e^{\beta}$ при подходящем значении β приводит к уравнению Бесселя. **4.59.** $u(x)=f(x)-\frac{\mu\alpha}{W}\int_a^x(u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))yf(y)dy$; если $\alpha\mu<0$, то $u_1(x)=\sqrt{\xi}J_{\frac{1}{3}}(k\xi\sqrt{\xi})$, $u_2(x)=\sqrt{\xi}Y_{\frac{1}{3}}(k\xi\sqrt{\xi})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{-\mu\alpha}$, $\xi=x+\frac{\alpha}{\mu}$, $W=\frac{3}{\pi}$,

если $\alpha\mu>0$, то $u_1(x)=\sqrt{\xi}I_{\frac{1}{3}}(k\xi\sqrt{\xi})$, $u_2(x)=\sqrt{\xi}K_{\frac{1}{3}}(k\xi\sqrt{\xi})$, $k=\frac{2}{3}\sqrt{\mu\alpha}$,

$\xi=x+\frac{\alpha}{\mu}$, $W=-\frac{2}{3}$. Указание. Дифференцирование и исключение интегрального слагаемого приводят к эквивалентной задаче Коши:

$$\begin{cases} u''-\alpha\mu(x+\frac{\alpha}{\mu})u=f''-\alpha^2f,\\ u(a)=f(a),\ u'(a)=f'(a).\end{cases}$$

Замена $\xi=x+\frac{\alpha}{\mu}$ преобразует дифференциальное уравнение в уравнение той же структуры, что и и ответе к задаче 4.53.

4.60. $u(x)=f(x)-\frac{\mu\alpha x}{W}\int_a^x(u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))f(y)dy$,

где u_1 и u_2 те же, что в ответе к предыдущей задаче.
4.61. $u(x)=f(x)-\frac{\mu\alpha}{W}\int_a^x(u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y))yf(y)dy$; если $\alpha\mu<0$, то $u_1(x)=\sqrt{\xi}J_{\frac13}(k\xi\sqrt{\xi})$, $u_2(x)=\sqrt{\xi}Y_{\frac13}(k\xi\sqrt{\xi})$, $k=\frac23\sqrt{-\mu\alpha}$, $\xi=x-\frac{\alpha}{\mu}$, $W=\frac{3}{\pi}$, если $\alpha\mu>0$, то $u_1(x)=\sqrt{\xi}I_{\frac13}(k\xi\sqrt{\xi})$, $u_2(x)=\sqrt{\xi}K_{\frac13}(k\xi\sqrt{\xi})$, $k=\frac23\sqrt{\mu\alpha}$, $\xi{=}x-\frac{\alpha}{\mu}$, $W{=}-\frac32$. **4.62.** $u(x)=Ae^{-(a+1)^2}(v_2'(x)v_1(a)-v_1'(x)v_2(a))$, $v_1(x)=\Phi(\frac14,\frac12,(x+1)^2)$, $v_2(x)=(x+1)\Phi(\frac34,\frac32,(x+1)^2)$; $\Phi'(\alpha,\gamma,x)=\frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,x)$. Указание. Интегральное уравнение эквивалентно задаче Коши

$$v''-2(x+1)v'-\alpha v=0,\ v(a)=0,\ v'(a)=A,\ v(x)=\int_a^x u(y)dy.$$

В результате замены $\xi=(x+1)^2$ получается уравнение Куммера, фундаментальная система решений которого

$$v_1=\Phi(\alpha,\gamma,\xi),\quad v_2=\xi^{1-\gamma}\Phi(\alpha+\gamma-1,2-\gamma,\xi).$$

Для вычисления определителя Вронского $W(v_1,v_2)$ следует представить уравнение Куммера в самосопряженной форме

$$\tfrac{d}{d\xi}\xi^\gamma e^{-\xi}\tfrac{dv}{d\xi}-\alpha\xi^{\gamma-1}e^{-\gamma}v=0,$$

откуда $W=C\xi^{-\gamma}e^{\xi}$. Из асимптотики при $\xi\to0$ (она определяется явным выражением вырожденных гипергеометрических функций в виде степенных рядов) вытекает: $C=\lim_{\xi\to0}W\xi^\gamma e^{-\xi}=1-\gamma$, т.е. определитель Вронского $W(v_1,v_2)=(1-\gamma)\xi^{-\gamma}e^{\xi}$. В данном случае $W(v_1(x),v_2(x))=e^{(1+x)^2}$. Решение задачи Коши $v(x)=C_1v_1(x)+C_2v_2(x)$, C_1 и C_2 определяются начальными условиями; решение интегрального уравнения
4.63. $u(x)=f(x)+\int_a^x\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{u_1'(x)u_2(y)-u_2'(x)u_1(y)}{W(y)}\big)f(y)dy$,
$u_1(x)=e^{-3x}\Phi(\frac14,\frac12,(x+\frac32)^2)$, $u_2(x)=e^{-3x}(x+\frac32)\Phi(\frac34,\frac32,(x+\frac32)^2)$, $W=e^{(x-\frac32)^2}$. Указание. Дифференциальное уравнение задачи Коши для функции $v(x)=\int_a^x u(y)dy$ заменой $w=ve^{kx}$ (при подходящем k) преобразуется в уравнение той же структуры, что и соответствующее уравнение предыдущей задачи. **4.64.** $u(x)=f(x)+\int_a^x(w_2''(x)w_1(y)-w_1''(x)w_2(y))\frac{f(y)}{W(y)}dy$, $w_1(x)=e^{-kx}\Phi(\alpha,\frac12,\frac{A}{2}\xi^2)$, $w_2(x)=e^{-kx}x\Phi(\alpha+\frac12,\frac32,\frac{A}{2}\xi^2)$, $W=e^{\frac{Ax^2}{2}-2kx}$, $k{=}\frac{C}{A}$, $\alpha{=}\frac{A^2D-ABC-C^2}{2A^3}$, $\xi{=}x{+}\frac{AB+2C}{A^2}$.
Указание. Функция $w(x){=}\int_a^x(x-y)u(y)dy$ — решение задачи Коши:

$$\begin{cases} w''-(Ax+B)w'-(Cx+D)w=f(x),\\ w(a)=w'(a)=0.\end{cases}$$

4.65. $u(x)=\frac{1}{2k^2}f''(t)$, $t=\frac{x}{k}$, $f(x)=F(x)+Ax+B$, $A=-\frac12\big[F'(\frac{a}{k})-F'(0)\big]$, $B=\frac12\big[F'(\frac{a}{k})-F(\frac{a}{k})-F(0)\big]$. **4.66.** $u(x)=\frac{k}{2}f''(t)$, $t=kx$, $f(x)=F(x){+}Ax{+}B$, $A=-\frac12\big[F'(ak){-}F'(0)\big]$, $B=\frac12\big[akF'(ak){-}F(ak){-}F(0)\big]$.
4.67. $u(x)=\frac{d}{dx}\big(\frac{x^{1-\alpha}f'(x)}{2\alpha}\big)$,
$f(x){=}F(x)+Ax+B$, $A{=}F'(a)$, $B{=}\frac12(aF'(a){-}F(a){-}F(b))$, $\lim\limits_{x\to0}(x^{1-\alpha}F'(x)){=}0$.
Указание. Из уравнения при $x=0$ и $x=a$ следуют равенства

$$\int_0^a y^\alpha u(y)dy = f(0),\ \int_0^a (a^\alpha - y^\alpha)u(y)dy = f(a),$$

или

$$\int_0^a y^\alpha u(y)dy = f(0),\ a^\alpha \int_0^a u(y)dy = f(0) + f(a).$$

Результатом подстановки найденного решения в полученные соотношения и интегрирования по частям являются соотношения

$$af'(a) = \alpha f(a) + \alpha f(0),\ af'(a) = 2\alpha f(a) + 2\alpha f(0),$$

из которых следуют условия для функции $f(x)$:

$$f(0) + f(a) = 0,\ f'(a) = 0.$$

4.68. $u(x) = \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx}(\sin^2 x\, ctg^{1-\alpha} x f'(x))$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, $A = -F'(a)$, $B = \frac{1}{2}(aF'(a) - F(a) - F(b))$. **4.69.** $u(x) = 2\alpha k \cos z f''(z)$, $z = k\sin\alpha x$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, $A = -\frac{1}{2}(F'(0) + F'(x_a))$, $B = \frac{1}{2}[x_a F'(0) - F(x_a) - F(0))$, $x_a = k\sin\alpha a$. **4.70.** $u(x) = \frac{k\alpha}{2\cos^2\alpha z} f''(z)$, $z = k\,\mathrm{tg}\,\alpha x$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, выражения для A и B такие же, как в ответе предыдущей задачи, $x_a = k\,\mathrm{tg}\,\alpha a$.

4.71. $u(x) = \frac{1}{2}k\alpha\cos\alpha z f''(z)$, $z = k\,\mathrm{sh}\,\alpha x$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, выражения для A и B такие же, как в ответе к задаче 4.69, $x_a = k\,\mathrm{sh}\,\alpha a$.

4.72. $u(x) = \frac{k\alpha f''(z)}{2(1+\alpha z)}$, $z = k\ln(1+\alpha x)$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, выражения для A и B такие же, как в ответе к задаче 4.69, $x_a = \ln(1+\alpha x)$.

4.73. $u(x) = \frac{1}{2k^2\alpha^2\,\mathrm{ch}\,\alpha z}\frac{d}{dz}\frac{f'(z)}{\mathrm{ch}\,\alpha z)}$, $z = \frac{1}{\alpha} arcsh\frac{a}{k}$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, выражения для A и B такие же, как в ответе к задаче 4.69,$x_a = \frac{1}{\alpha} arcsh\frac{a}{k}$.

4.74. $u(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2 z^2}}{2k^2\alpha^2}\frac{d}{dz}(\sqrt{1-\alpha^2 z^2} f'(z))$, $z = \frac{1}{\alpha}\sin\frac{x}{k}$, $f(x) = F(x) + Ax + B$ выражения для A и B такие же, как в ответе к задаче 4.73, $x_a \frac{1}{\alpha}\sin\frac{a}{k}$.

4.75. $u(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\mathrm{ch}\,\alpha x}\right)$, $f(x) = F(x) + Ax + B$, $A = -F'(a)$, $B = \frac{1}{2}[aF'(a) - F(a) - F(0))$.

4.76. $u(x) = xf'(x) + f(x)$. **4.77.** $u(x) = xf'(x) + (1+\alpha)f(x)$.

4.78. $u(x) = B\,\mathrm{ch}\sqrt{2}x + C\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x$, $B = A\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2} - \mathrm{sh}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2} - \mathrm{sh}\sqrt{2}}$, $C = A\frac{1 + \mathrm{ch}\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2} - \mathrm{sh}\sqrt{2}}$. Указание. Если записать уравнение в виде

$$u(x) = \int_0^x (x-y)u(y)dy + \int_x^1 (y-x)u(y)dy + Ax$$

и продиффиренцировать

$$u(x) = \int_0^x u(y)dy - \int_x^1 u(y)dy + Ax = 0,$$

то из этих двух уравнений при $x = 0$ получаются граничные условия:

$$u(a) = \int_0^1 yu(y)dy,\ u'(0) = -\int_0^1 u(y)dy + A.$$

Дифференцирование второго уравнения и исключение интегрального слагаемого с помощью первого уравнения приводит к дифференциальному уравнению $u'' - 2u = 0$. В граничных условиях можно освободиться от интегралов, проведя замену $u(x) = \frac{1}{2}u''(x)$ и интегрирование по частям. В результате получится эквивалентная краевая задача для $u(x)$:

$$\begin{cases} u'' - 2u = 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0) + u(1) = u'(1),\ u'(0) + u'(1) = 2A. \end{cases}$$

4.79. $u(x) = B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x$,
$B = A\sqrt{3}\,ctg\alpha,\ C = A\frac{\sqrt{3}\sin\alpha - 1}{\sin\alpha},\ \alpha = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.
Указание. Интегральное уравнение сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} u'' + 3u = 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(0) + u'(\frac{\pi}{2}) = 0,\ u'(0) + u(\frac{\pi}{2}) = 2A. \end{cases}$$

4.80. $u(x) = B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x,\ B = A\frac{\sqrt{3} - th\,a\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2th\,a\sqrt{3}},\ C = A\frac{1 - \sqrt{3}th\,a\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2th\,a\sqrt{3}}$.
Указание. Интегральное уравнение сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} u'' - 3u = 0,\ 0 < x < a, \\ u(0) + u'(0) = 2A,\ u(a) - u'(a) = 0. \end{cases}$$

4.81. $u(x) = \pm f(x)\big(2\int_a^x K(y)f(y)dy\big)^{-\frac{1}{2}}$. Указание. Сделать замену $v(x) = \int_a^x K(y)u(y)dy$. **4.82.** $u(x) = f(x)\big[(1-\alpha)\int_a^x f^\alpha(y)g(y)dy\big]^{-\frac{1}{1-\alpha}},\ u(x) = 0$.
Указание. Посредством дифференцирования и исключения интегрального слагаемого интегральное уравнение сводится к задаче Коши:

$$u' - \tfrac{f'}{f}u = fgu^k,\ a < x,\ u(a) = 0.$$

4.83. $u(x) = \big[A^{1-\alpha} + (\alpha - 1)\int_a^x f(y)dy\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}$.
4.84. $u(x) = -\frac{1}{\alpha}\ln\big[\frac{k}{A} + \big(e^{-\alpha u(a)} - \frac{k}{A}\big)e^{\alpha A(a-x)},\ u(a) = Aa + B$.
4.85. $u(x) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathrm{tg}\big(arctg\,e^{\alpha a} + \frac{\alpha}{2}\int_a^x f(\xi)d\xi\big)$.
4.86. $u(x) = \frac{1}{\beta}\ln\frac{e^{\beta u(a)}h(x)}{1 + \frac{k}{\alpha A}e^{\beta u(a)}(1 - h(x))},\ h(x) = \big|\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha a}\big|^{\beta A},\ u(a) = A\ln|\sin\alpha a| + B$.
4.87. $u(x) = \frac{1}{\beta}\ln\frac{e^{\beta A} - th\,\varphi}{1 - e^{\beta A}th\,\varphi},\ \varphi = \frac{\beta k}{2\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{ch}\,\alpha a)$.
4.88. $u(x) = \frac{2}{\alpha}arctg\big(e^{\alpha k(x-a)}tg\frac{\alpha A}{2}\big)$.
4.89. $u(x) = \frac{\pi}{2\beta} + \frac{2}{\beta}arctg\big[tg(\frac{\beta A}{2} - \frac{\pi}{4})e^{\frac{\beta k}{\alpha}(\cos\alpha x - \cos\alpha a)}\big]$.
4.90. Если $\frac{A\alpha}{k} = p^2 > 0$, то $u(x) = p\frac{u(a) - p\,tg\varphi}{p - u(a)tg\varphi},\ \varphi = \frac{\beta k}{\alpha}(\cos\alpha a - \cos\alpha x)$; если $-\frac{A\alpha}{k} = p^2 > 0$, то $u(x) = tg\big[\frac{\beta k}{a}(\cos\alpha a - \cos\alpha x) + arctg\frac{u(a)}{p}\big]$, $u(a) = A\cos\alpha a + B$; если $A = 0$, то $u(x) = \frac{\alpha B}{\alpha - kB(\cos\alpha a - \cos\alpha x)}$.
4.91. Если $\frac{A\alpha}{k} = p^2 > 0$, то $u(x) = p\,tg(\frac{\beta k}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha x)$; если $-\frac{A\alpha}{k} = p^2 > 0$, то $u(x) = -p\,th(\frac{\beta k}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha x)$; если $\alpha A = 0$, то $u(x) = 0$.
4.92. Если $\frac{A\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2} = p^2 > 0$, то $u(x) = p\frac{A + \frac{\alpha}{2k} - pth\varphi}{p - (A + \frac{\alpha}{2k})th\varphi} - \frac{\alpha}{2k},\ \varphi = pk(x - a)$; если $-(\frac{A\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2}) = p^2 > 0$, то $u(x) = p\,tg\big[pk(x-a) + arctg(\frac{A}{p} + \frac{\alpha}{2kp})\big] - \frac{\alpha}{2k}$; если $\frac{A\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2} = 0$ то $u(x) = \frac{A + \frac{\alpha}{2}(A + \frac{\alpha}{2k})(x-a)}{1 - (kA + \frac{\alpha}{2})(x-a)}$.
4.93. Если $\frac{B\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2} = p^2 > 0$, то $u(x) = p\frac{u(a) + \frac{\alpha}{2k} - pth\varphi}{p - (u(a) + \frac{\alpha}{2k})th\varphi} - \frac{\alpha}{2k},\ \varphi = k(x - a)$; если $-(\frac{B\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2}) = p^2 > 0$, то $u(x) = p\,tg\big[pk(x-a) + arctg\frac{u(a) + \frac{\alpha}{2k}}{p}\big] - \frac{\alpha}{2k}$; если $\frac{B\alpha}{k} + \frac{\alpha^2}{4k^2} = 0$ то $u(x) = \frac{u(a) + (ku(a) + \frac{\alpha}{2})(x-a)}{1 - (ku(a) + \frac{\alpha}{2})(x-a)},\ u(a) = Ae^{\alpha a} + B$.
4.94. Если $1 - \frac{\alpha^2A^2}{k^2} = p^2 > 0$, то $u(x) = \frac{1}{\beta}\ln[p], tg\big(\frac{pk\beta}{2}(\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{ch}\,\alpha a) + arctg\frac{e^{\beta u(a)} + \frac{\alpha a}{k}}{p}\big) - \frac{\alpha A}{k}\big]$, если $-(1 - \frac{\alpha^2A^2}{k^2}) = p^2 > 0$, то

$u(x)=\frac{1}{p}\ln\frac{e^{\beta u(a)}(p+\frac{\alpha A}{k}th\varphi)+th\varphi}{p-(e^{\beta u(a)}+\frac{\alpha A}{k})th\varphi}$, $\varphi=\frac{\beta pk}{2\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha x-\mathrm{ch}\,\alpha a)$, если $1-\frac{\alpha^2A^2}{k^2}=0$, то $u(x)=\frac{1+[p+\frac{\beta A}{\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha x-\mathrm{ch}\,\alpha a)]e^{\beta u(a)}}{1-\frac{k\beta}{2\alpha}(\frac{\alpha A}{k}+e^{\beta u(a)})(\mathrm{ch}\,\alpha x-\mathrm{ch}\,\alpha a)}$, $u(a)=Ach\alpha a+B$.

4.95. Решение в неявном виде: $\int_A^{u(x)}\frac{du}{\ln u}=k(x-a)$.

4.96. Решение в неявном виде: $(\alpha+1)\int_{u(a)}^{u(x)}\frac{du}{ku^\beta+A(\alpha+1)}+x^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}=0$, $u(a)=Aa^{\alpha+1}+B$. **4.97.** Решение в неявном виде: $\frac{2B}{A^2}\ln\left|\frac{B-Au(x)}{B-Au(a)}\right|-\frac{2}{A}(u(x)-u(a))=x-a$, $u^2(a)=Ba+C$.

4.98. 1) *a*. $u(x)=\frac{A}{I(n+\frac12)}x^{n+\frac12}$, $I(n+\frac12)=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k+\frac12}+2-\frac{\pi}{2}\right)$, 1) *b*. $u(x)=\frac{A}{I(n+\frac13)}x^{n+\frac13}$, $I(n+\frac13)=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k+\frac13}+3-\ln 2-\frac{\pi}{\sqrt3}\right)$, 1) *c*. $u(x)=\frac{A}{I(n+\frac14)}x^{n+\frac14}$, $I(n+\frac14)=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k+\frac14}+4-\sqrt2\ln(1+\sqrt2)-\frac{\pi}{\sqrt2}\right)$; 2) $u(x)=\frac{A}{I(n)}x^n(\ln x+\frac{K(n)}{I(n)})$, $I(n)=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k}+\ln 2\right)$, $K(n)=(-1)^n\left[\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^2}+\frac{\pi^2}{12}\right]$; 3) $u(x)=\frac{A}{P^2+Q^2}(P\cos\ln x+Q\sin\ln x)$, $P=\int_0^1\frac{\cos\ln\xi d\xi}{1+\xi}$, $Q=\int_0^1\frac{\sin\ln\xi d\xi}{1+\xi}$. **4.99.** 1) $u(x)=\frac{2A\Gamma(\frac{\alpha+2}{2})x^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$, 2) $u(x)=\frac{2A}{\pi}\ln\frac{x}{2}$. **4.100.** 1) $u(x)=\frac{Ax^\alpha}{I(\alpha)}$, $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\xi^\alpha d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$, $I(0)=\ln(\sqrt2+1)$, $I(1)=\sqrt2-1$, $I(2)=\frac{1+\ln(\sqrt2+1)}{2}$, $I(3)=\frac{2-\sqrt2}{3}$, $I(4)=\frac{2\ln(\sqrt2+1)-sqrt2}{8}$, $I(5)=\frac{7\sqrt2-8}{15}$; 2) $u(x)=A\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{x^\alpha}{I(\alpha)}\right)\Big|_{\alpha=0}$. Указание. Вывести рекуррентную формулу: $I(\alpha)=\frac{\sqrt2}{\alpha}-\frac{\alpha-1}{\alpha}I(\alpha-2)$. **4.101.** $u(x)=\frac{A(-1)^{n-1}n!!}{\pi(n-1)!!}x^n$.

4.102. $u(x)=\frac{Ax^{n+1}}{I(n)}$, $I(2m-1)=\frac{(-1)^m}{2}[\sum_{k=1}^m\frac{(-1)^k}{k}+\ln 2]$, $I(2m)=(-1)^m[\sum_{k=1}^m\frac{(-1)^k}{2k-1}+\frac{\pi}{4}]$. **4.103.** 1) $u(x)=\frac{A}{I}x^{m+\alpha-1}$, 2) $u(x)=\frac{A}{I}x^\alpha(\ln x-\frac{K}{I})$, $I=\int_0^1\frac{\xi^{n+\alpha-1}d\xi}{a+b\xi^n}$, $K=\int_0^1\frac{\xi^{n+\alpha-1}\ln\xi d\xi}{a+b\xi^n}$. **4.104.** 1) $u(x)=\frac{A}{I(\gamma)}x^{\gamma+\alpha\beta-1}$, 2) $u(x)=\frac{A}{I(\gamma)}x^{\gamma+\alpha\beta-1}(\ln x-\frac{K(\gamma)}{I(\gamma}))$, 3) $u(x)=A\frac{d^n}{d\gamma^n}\left(\frac{x^\gamma}{I(\gamma)}\right)\Big|_{\gamma=0}$, $I(\gamma)=\int_0^1\frac{\xi^{\gamma+\alpha\beta-1}d\xi}{(a+b\xi^\alpha)^\beta}$, $K=\int_0^1\frac{\xi^{\gamma+\alpha\beta-1}\ln\xi d\xi}{(a+b\xi^\alpha)^\beta}$.

4.105. 1) $u(x)=\frac{A}{S(\alpha)}x^{\alpha-1}$, 2) $u(x)=\frac{A}{S(\alpha)}x^{\alpha-1}(\ln x-\frac{T(\alpha)}{S(\alpha)})$, где $S(\alpha)=\int_0^1K(\xi)\xi^\alpha d\xi$, $T(\alpha)=\int_0^1K(\xi)\xi^\alpha\ln\xi d\xi$. **4.106.** Обозначения: $S(\alpha)=\int_0^\infty x^\alpha K(x)dx$, $T(\alpha)=\int_0^\infty K)x)e^{-\alpha x}dx$. 1) Если $n=0$, то $u(x)=\frac{A}{S(0)}$, если $n=1$ то $u(x)=\frac{Ax}{S(0)}+\frac{AS(1)}{S^2(0)}$, если $n=2$, то $u(x)=\frac{Ax^2}{S(0)}+\frac{2AS(1)x}{S^2(0)}+\frac{2AS^2(1)}{S^3(0)}-\frac{AS(2)}{S^2(0)}$; 2) $u(x)=\frac{Ae^{\lambda x}}{T(\lambda)}$; 3) $u(x)=A\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\frac{e^{\lambda x}}{T(\lambda)}\right)\Big|_{\lambda=0}$.

4.107. 1) $u(x)=A(\alpha+\beta)e^{\beta x}$, 2)$u(x)=A(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)$, 3) $u(x)=A(\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta x+\beta\,\mathrm{sh}\,\beta x)$, 4) $u(x)=A((\alpha+\beta)\cos\gamma x-\gamma\sin\gamma x)e^{\beta x}$, 5) $u(x)=Ax^{n-1}((\alpha+\beta)x+n)e^{\beta x}$,

6) $u(x) = Ax^{n-1}((\alpha x + n)\sin\beta x + \beta x\cos\beta x)$,
7) $u(x) = Ax^{n-1}((\alpha x + n)\operatorname{ch}\beta x + \beta x\operatorname{sh}\beta x)$.

4.108. 1) $u(x) = A(\alpha - \beta)e^{\beta x}$, 2) $u(x) = A(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$,
3) $u(x) = A(\alpha\operatorname{sh}\beta x - \beta\operatorname{ch}\beta x)$, 4) $u(x) = Ax^{n-1}(\alpha x - n)$,
5) $u(x) = A((\alpha-\beta)\sin\gamma x - \gamma\cos\gamma x)e^{\beta x}$,
6) $(x) = Ax^{n-1}((\alpha x - n)\cos\beta x + \beta x\sin\beta x)$,
7) $u(x) = Ax^{n-1}((\alpha x - n)\operatorname{sh}\beta x - \beta x\operatorname{ch}\beta x)$.
Указание к п.7) $u(x) = A\mathbf{Re}\left\{\frac{1}{i^n}\frac{d^n}{d\beta^n}\left[(\alpha - i\beta)e^{i\beta x}\right]\Big|_{\beta=0}\right\}$.

4.109. $u(x) = \frac{A}{I(\alpha)}e^{-\alpha x}$, $I(\alpha) = 1 + \mu\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(\ln 4\alpha - \psi(1))$.

4.110. 1) $u(x) = A\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}e^{\beta x}$, 2) $u(x) = A\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\sin\beta x$,
3) $u(x) = \frac{Ax^{n-2}}{2\alpha}(\alpha^2x^2 - n(n-1))$, 4) $u(x) = \frac{A}{2\alpha}[(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\cos\gamma x + 2\beta\gamma\sin\gamma x)e^{\beta x}$,
5) $u(x) = A\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\operatorname{ch}\gamma x$,
6) $u(x) = \frac{Ax^{n-2}}{2\alpha}\left[((\alpha^2+\beta^2)x^2 - n(n-1))\cos\beta x + 2n\beta x\sin\gamma x\right]$,
7) $u(x) = \frac{Ax^{n-2}}{2\alpha}\left[((\alpha^2-\beta^2)x^2 - n(n-1))\operatorname{sh}\beta - 2n\beta x\operatorname{ch}\beta x\right]$.

4.111. Обозначения: $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\xi^\alpha d\xi}{1+\xi}$, $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{\xi^\alpha \ln x\xi}{1+\xi}$, $\alpha > -1$.
1) $u(x) = Cx^\alpha$, C — произвольная постоянная, α — корень уравнения $\mu I(\alpha) = 1$. 2) если $\mu I(0) < 1$, где $I(0) = \ln 2$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu I(n)}$, если $\mu I(0) > 1$, $\mu I(n) \neq 1$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu I(n)} + Cx^\alpha$, если $\mu I(n) = 1$, то $u(x) = -\frac{A}{K(n)}x^n\ln x + Cx^n$ 3) если $0 < \mu I(\alpha) < 1$, то $u(x) = \frac{\mu AK(n)}{1-\mu I(n)}x^n(\ln x + \frac{1}{1-\mu I(n)})$, если $\mu I(0) > 1$, $\mu I(n) \neq 1$, то $u(x) = \frac{\mu AK(n)}{1-\mu I(n)}x^n(\ln x + \frac{1}{1-\mu I(n)}) + Cx^\alpha$; результат вычисления интегралов: $I(n) = (-1)^n(\ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k})$, $K(n) = (-1)^{n+1}(\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2})$.

4.112. 1) $u(x) = Cx^\beta$, C — произвольная постоянная, β — корень уравнения $\mu B(\beta+1,\alpha) = 1$, $\beta > -1$, $\mu > 0$; 2) если $\mu < \alpha$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu B(n+1,\alpha)}$, если $\mu > \alpha$, $\mu B(n+1,\alpha) \neq 1$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu B(n+1,\alpha)} + Cx^\beta$, если $\mu B(n+1,\alpha) = 1$, то $u(x) = -\frac{Ax^n\ln x}{\mu K(n)} + Cx^n$, где $K(n) = \int_0^1 \frac{\xi^n \ln\xi d\xi}{(1-\xi)^{\alpha-1}}$; 3) если $\mu < \alpha$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu B(n+1,\alpha)}(\ln x + \frac{\mu K(n)}{1-\mu B(n+1,\alpha)})$, если $\alpha < \mu$, $\mu B(n+1,\alpha) \neq 1$, то $u(x) = \frac{Ax^n}{1-\mu B(n+1,\alpha)}(\ln x + \frac{\mu K(n)}{1-\mu B(n+1,\alpha)}) + Cx^\beta$. Указание. Из неравенства $B(n+1,\alpha) = \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-1}dt \le \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha}$ следует, что при $\mu < \alpha$ уравнение $\mu B(\beta+1,\alpha) = 1$, не имеет решения.

4.113. $u(x) = \frac{Ax^n}{1+\lambda I(n)}$, $I(n) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} - e^{-\alpha}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{1}{\alpha^{n-k+1}}$.

4.114. 1) $u(x) = \frac{Ax}{\pi} + \frac{B}{2}$; 2) $\frac{A}{P(n)}x^n$, где $P(2k) = (-1)^k\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\frac{1-\cos\pi\lambda}{\lambda}\Big|_{\lambda=1}$, $P(2k+1) = (-1)^{k+1}\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}\Big|_{\lambda=1}$.

4.115. $u(x) = \frac{f(x)}{I}$, $I^2 = \int_0^1 f(x)dx$. **4.116.** $u(x) = \pm\sqrt{\frac{A(\alpha-\beta)}{e^{\alpha+\beta}-1}}e^{\beta x}$.

4.117. $u(x)=\frac{f(x)}{I}$, $I^2=\int_0^1 g(x)f(x)dx$.
4.118. $u(x)=\pm\sqrt{A}$, $u(x)=\pm\sqrt{A}(3\xi-2)$, $u(x)=\pm\sqrt{A}(10\xi^2-12\xi+3)$, $\xi=f(x)$.
4.119. $u(x)=\frac{Ae^{\beta x}}{1+kCe\alpha x}$, C — корень уравнения $C=A\int_a^b \frac{e^{\alpha x}dx}{1+kCe^{\alpha x}}$.
4.120. $u(x)=\frac{f(x)}{1+Cg(x)}$, C — корень уравнения $C=\int_a^b \frac{f^{\alpha}dx}{(1+Cg(x))^{alphа}}$.
4.121. $u(x)=Ax^{\frac{1+\alpha}{1-\gamma}}$, $A^{\gamma-1}=\frac{\beta^{\frac{1+\alpha}{1-\gamma}}}{k\Gamma(\frac{1+\alpha}{1-\gamma})}$. Указание. Сделать замену $y=\xi x$.
4.122. $u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi+\sqrt{2\pi^2-8}}}(x\pm\sqrt{\frac{\pi^2-4}{2}})$,
$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi-\sqrt{2\pi^2-8}}}(x\pm\sqrt{\frac{\pi^2-4}{2}})$, при любом сочетании знаков.
4.123. $u(x)=\pm\sqrt{\frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha+k+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha-k+1}{2})}}x^{\frac{\alpha-k-1}{2}}e^{\beta x}$, **4.124.** $u(x)=\pm\sqrt{-2A}(x-1)$.
4.125. $u(x)=\pm\sqrt{-\frac{A}{3}}(7\alpha x-3)e^{-\alpha x}$,
$u(x)=\pm\sqrt{-\frac{A}{2}}(7\alpha x-4)e^{-\alpha x}$. **4.126.** $u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{B}}x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{\frac{\beta x}{a}}$,
$B=\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha-1}{2}}(a-\xi)^{\frac{\alpha-1}{2}}d\xi$. Указание. Сделать замену $y=\xi x$ и отыскивать решение вида $Bx^{\gamma}e^{\beta x}$, где β и γ константы. **4.127.** $u(x)=p\ln x+q$, где (p,q) — решение системы: $2p+q+q^2=2B$, $p-Ap(p-q)=B$.Для q получается уравнение четвертой степени. В частном случае $A=3$, $B=8$, имеется решение $u(x)=2\ln x+3$. **4.128.** $u(x)=px\ln x+qx$, где (p,q) — решение системы: $2p+q+\frac{Aq^2}{3}=2B$, $p-\frac{Ap}{9}(p-3q)=B$. Для q получается уравнение четвертой степени. В частном случае $A=-3$, $B=3$ интегральное уравнение имеет решение $u(x)=x(3\ln x+1)$. **4.129.** $u(x)=\frac{\beta^{2\alpha+1}x^{\alpha}}{A\gamma(2\alpha+1,\beta)}$, где $\gamma(x,y)$ — неполная гамма-функция. **4.130.** $u(x)=\frac{(2\beta)^{2\alpha+1}e^{-\beta x}}{\gamma(2\alpha+1,\beta)}$, где $\gamma(x,y)$ — неполная гамма-функция. **4.131.** $u(x)=Bx^{\alpha}$, B — корень уравнения $kB^2-(2\alpha+1)B=(2\alpha+1)A$.
4.132. $u(x)=Bx$, B — корень уравнения $k(1-\frac{\pi}{4})B^2-B+A=0$.
4.133. $u(x)=Be^{\frac{\alpha+\beta}{1-n}x}$, $B^{n-1}=(\frac{\beta+\alpha n}{1-n})^{m+1}\frac{1}{x\Gamma(k+1)}$. **4.134.** $u(x)=g(x)-kC$, C — корень уравнения $Ce^{\beta kC}=\int_a^b e^{\beta g(y)}dy$. **4.135.** $u(x)=Be^{\alpha x}+f(x)$, B — корень уравнения $B+\int_a^b \varphi(y)e^{\beta Bexp(\alpha y)}dy$, $\varphi(y)=Ae^{-\alpha y+\beta f(y)}$.
4.136. $u(x)=B$, B — корень уравнения $B-\frac{1}{b}e^{\alpha B}\ln(1+\frac{b}{a})=A$.
4.137. $u(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{yf(y)dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **4.138.** $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}}=\frac{f(a)}{\pi\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\pi}\int_a^x \frac{f'(y)dy}{\sqrt{x-y}}$. Вторая форма ответа получается интегрированием по частям при условии дифференцируемости функции $f(x)$.
4.139. $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(y)dy}{y\sqrt{\ln\frac{x}{y}}}$.
4.140. $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{I_1(y)f(y)dy}{\sqrt{I_0(x)-I_0(y)}}$. **4.141.** $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(y)g'dy}{(g(x)-g(y))^{1-\alpha}}$.

Указание. Решение данного уравнения в частном случае ($\alpha=\frac12$) построено в примере 4.8. Аналогичная процедура построения применима и здесь: замена x на s, интегрирование от a до x с множителем $g'(s)(g(x)-g(s))^{1-\alpha}$ и т.д.

4.142. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\big[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\big]$.

4.143. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{2\pi}e^{\beta x^2}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\beta y^2}f(y)dy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{1-\alpha}}$.

4.144. $u(x)=\frac{\beta\sin\pi\alpha}{\pi x^\gamma}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{y^{\beta-1}f(y)dy}{(x^\beta-y^\beta)^{1-\alpha}}$.

4.145. $u(x)=\frac{\beta\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{\beta y}f(y)dy}{(e^{\beta x}-e^{\beta y})^{1-\alpha}}$.

4.146. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\operatorname{ch}yf(y)dy}{(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y)^{1-\alpha}}$.

4.147. $u(x)=\frac{k\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(y)dy}{\operatorname{ch}^2kx(th\,kx-th\,ky)^{1-\alpha}}$.

4.148. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{u(y)dy}{y(\ln\frac{x}{y})^{1-\alpha}}$.

4.149. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{K_1(y)f(y)dy}{K_0(y)-K_0(x))^{1-\alpha}}$.

4.150. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}g'(x)\big(\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\big)^2\int_a^x\frac{f(y)g'(y)dy}{(g(x)-g(y))^\alpha}$.

Решение. Уравнение

$$\int_a^x(g(x)-g(y))^\alpha u(y)dy=f(x)$$

посредством дифференцирования сводится к уравнению задачи 4.141:

$$\int_a^x\frac{u(y)dy}{(g(x)-g(y))^{1-\alpha}}=\frac{f'(x)}{\alpha g'(x)}.$$

Следовательно,

$$u(x)=\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f'(y)dy}{(g(x)-g(y))^{1-\alpha}}.$$

Так как в данном случае дифференцируемость функции не является обязательной, то следует преобразовать интеграл:

$$\int_a^x\frac{f'(y)dy}{(g(x)-g(y))^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)g'(x)}\int_a^xf'(y)\frac{d}{dx}(g(x)-g(y))^{1-\alpha}dy=$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)g'(x)}\frac{d}{dx}\int_a^xf'(y)(g(x)-g(y))^{1-\alpha}dy=$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)g'(x)}\frac{d}{dx}\big[f(y)(g(x)-g(y))^{1-\alpha}\Big|_a^x+(1-\alpha)\int_a^x\frac{f(y)g'(y)dy}{(g(x)-g(y))^\alpha}\big]=$$

$$=\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(y)g'(y)dy}{(g(x)-g(y))^\alpha}$$

4.151. $u(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}}$. **4.152.** $u(x)=\frac{2}{\pi}e^{\beta x^2}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{e^{-\beta y^2}f(y)dy}{\sqrt{x-y}}$.

4.153. $u(x)=\frac{2}{\pi x}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{f(y)dy}{y\sqrt{x-y}}$. **4.154.** $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha\sqrt{x}}\big(\sqrt{x}\frac{d}{dx}\big)^2\int_a^x\frac{f(y)dy}{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^\alpha}$.

4.155. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\operatorname{sh}x\big(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\big)^2\int_a^x\frac{\operatorname{sh}yf(y)dy}{(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y)^\alpha}$.

4.156. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\cos x\big(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\big)^2\int_a^x\frac{\cos yf(y)dy}{(\sin x-\sin y)^\alpha}$.

4.157. $u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}I_1(x)\big(\frac{1}{I_1(x)}\frac{d}{dx}\big)^2\int_a^x\frac{I_1(y)f(y)dy}{(I_0(x)-I_0(y))^\alpha}$.

4.158. $u(x)=\frac{2}{\pi\mu-2}$. **4.159.** $u(x)=\frac{2x}{2-3\ln 2}$. **4.160.** $u(x)=-2x^3$.

4.161. $u(x)=4+\frac{5\mu x}{5-\mu}$. **4.162.** $u(x)=\left(1-\frac{2}{3}\mu+\mu\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{18}\right)^{-1}$.

4.163. $u(x)=\frac{1}{2}\left(1+e^{2x}\right)$. **4.164.** $u(x)=\sqrt{x}e^{\mu x}$. **4.165.** $u(x)=x^2e^{\frac{\mu x^3}{3}}$.

4.166. $u(x)=\sin^2 x$. **4.167.** $u(x)=\frac{1}{1-\mu}$. **4.168.** $u(x)=x+\frac{\mu}{1-\mu^2}(1+\mu|x|)$.

4.169. $u(x)=\frac{2}{\pi}\frac{2V_2-V_1}{3}$, $v(x)=\frac{2}{\pi}\frac{2V_1-V_2}{3}$.

4.171. $R(x,y,\mu)=\frac{\sqrt[4]{xy^3}}{1-\frac{\mu}{2}}$; $u(x)=\sqrt[4]{x}(x-\frac{2}{5})$.

4.172. $R(x,y,\mu)=\frac{y\sqrt{y}}{1-\frac{\mu}{3}}$; $u(x)=(3-x)\sqrt{x}$.

4.173. $R(x,y,\mu)=\frac{e^{x-y}}{1-\mu}$; $u(x)=\frac{e^x}{1-\mu}$.

4.174. $R(x,y,\mu)=\frac{\sin x\cos^5 y}{1-\frac{\mu}{6}}$; $u(x)=\sin^2 x-\frac{4}{35}\sin x$.

4.175. $R(x,y,\mu)=\frac{\sin(x-y)-\frac{\mu\pi}{2}\cos(x-y)}{1+\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2}$; $u(x)=1-\frac{1}{\pi}\sin x+\cos x$.

4.176. $R(x,y,\mu)=e^{x^2-y^2+\mu(x-y)}$; $u(x)=1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mu\,e^{(x+\frac{\mu}{2})^2}[erf(x+\frac{\mu}{2})-erf\frac{\mu}{2}]$.

4.177. $R(x,y,\mu)=\frac{5-3\cos x}{5-3\cos y}e^{\mu(x-y)}$; $u(x)=e^x[\frac{1}{2}(5-3\cos x)\,arctg\,(2\,tg\,\frac{x}{2})+1]$.

4.178. $R(x,y,\mu)=\frac{sh\sqrt{\mu}(x-y)}{\sqrt{\mu}}$; $u(x)=(x+2)e^x-shx$.

4.179. $R(x,y,\mu)=\frac{xe^{-\frac{y^2}{2}}}{1-\mu}$; $u(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu\,I_0(1)}{e(1-\mu)}x+J_0(2x)$. Указание. Воспользоваться формулой (3.76). **4.180.** $u=C$. Указание. Продифференцировать уравнение (точнее, тождество) по ε.

4.181. Ядро должно быть разностным: $K(t,\tau)=K(t-\tau)$. Решение. Если T — основной период (т.е. наименьший положительный период) функции $u(t)$, то функция $v(t)$ должна быть периодической с тем же периодом (это следует из 4.10). В этом случае справедливо тождество:

$$v(t+T)=k\,v(t+T)+\int\limits_{-\infty}^{t+\tau}K(t+T),$$

которое заменой $s-=\tau+t$ преобразуется к виду

$$v(t+\tau)=k\,u(t+\tau)+\int_{-\infty}^{t}K(t+T,\tau+T)u(\tau+T)\,ds.$$

Так как $v(t+\tau)=v(t)$, $u(t+\tau)=u(t)$, то

$$\forall\ t\in\mathbf{R}:\quad\int_{\infty}^{t}[K(t+T,\tau+T)-K(t,\tau)]\,u(\tau)\,d\tau=0.$$

Отсюда $K(t+T,\tau+T)-K(t,\tau)=0$ и далее

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[K(t+T,\tau+T)-K(t,\tau)\right]\Big|_{T=0}=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial\tau}=0.$$

Общее решение полученного уравнения (см. главу 9) $K(t,\tau)=K(t-\tau)$.

4.182. Указания. п.1 Произведение операторов

$$(\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2.u)(t) = \int_0^t K_1(t-s)(\mathcal{K}_2 u)(s)\,ds = \int_0^t K_1(t-s)\,ds \int_0^t K_2(s-\tau)\,u(\tau);$$

в последнем интеграле изменить порядок интегрирования; п.1.2. сделать замену переменной $s-\tau=\xi$ и $s=t+\tau-\xi$ соответственно.

4.183. Решение. Для $0<t-\tau<R$ (см. (4.28))

$$|K_1(t-\tau)| = |K(t-\tau)| \le M,$$
$$|K_2(t-\tau)| \le \int_\tau^t M^2\,d\tau = M^2(t-\tau),$$
$$|K_3(t-\tau)| \le \int_\tau^t M^3(t-\tau)\,d\tau = M^3\frac{(t-\tau)^2}{2}$$

и т.д. Для ядра $K_n(t-\tau)$ получается оценка (устанавливается методом математической индукции)

$$|K_n(t-\tau)| \le M^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{4.42}$$

Пусть $0<r_1<r$, R — любое положительное число, $t-\tau\le R$. В соответствии с определением 2 нужно найти радиус сходимости ряда из функций $K_n(t-\tau)$. В силу оценки (4.27)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(t-\tau)\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\frac{(M(t-\tau))^{n-1}}{(n-1)!} \le \frac{M}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|r_1^n}{(n-1)!}\left(\frac{MR}{r_1}\right)^{n-1}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{MR}{r_1}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} = e^{\frac{MR}{r_1}}$$

сходится при любом R, то общий член ряда стремится к нулю, следовательно, существует n_0 такое, что для $n>n_0$

$$\left(\frac{MR}{r_1}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)} < 1.$$

Таким образом, исходный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\frac{M}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r_1^n,$$

что доказывает его равномерную сходимость для $t-\tau\le R$.

4.184. Указание к п.3. Непрерывность следует из оценки

$$\| \mathcal{K}u_n - \mathcal{K}u \| = \| \mathcal{K}(u_n - u \| \leq \| \mathcal{K} \| \| u_n - u \| .$$

4.185. Решение. Доказательство проводится методом последовательных приближений, основанном на построении последовательности $v_0 = u$, которая является отрезком ряда Неймана

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathcal{K}^m u.$$

Поскольку $K \in C(\overline{h})$, то $|K| \leq M$ и

$$|\mathcal{K}^m u| \leq \frac{M^m t^m}{(m-1)!} \| u \|, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

(доказательство проводится методом математической индукции). С помощью этого неравенства получается оценка

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \mathcal{K}^m u \right| \leq M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu|^m M^m t^m}{(m-1)!} \| u \| \leq M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu|^m M^m t_0^m}{(m-1)!} \| u \| = e^{|\mu| M t_0},$$

т.е. ряд Неймана мажорируется сходящимися числовым рядом, поэтому при любом $\mu \in \mathbf{C}$ ряд сходится равномерно (и абсолютно) на отрезке $[0; t_0]$. Так как члены ряда — непрерывные функции на $\overline{h}$, то его сумма $v \in \overline{h}$. Итак,

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathcal{K}^m u,$$

$$\| v \| \leq M e^{|\mu| M T_0} \| u \| . \tag{4.43}$$

Существование решения. Если в (4.31) перейти к пределу при $n \to \infty$, то получится соотношение $v = u + \mu \mathcal{K} v$, т.е. v — решение интегрального уравнения. Единственность. Пусть есть два решения v_1 и v_2, тогда функция $v = v_1 - v_2$ — решение уравнения $v = \mu \mathcal{K} v$, откуда

$$v = \mu \mathcal{K} v = \mu^2 \mathcal{K}^2 v = ... = \mu^m \mathcal{K}^m v.$$

Так как ряд Неймана сходится на $\overline{h}$, то его общий член стремится к нулю с ростом n, поэтому

$$\| v \| \leq |\mu|^m |\mathcal{K}^m v| \to 0,$$

откуда $\| v \| = 0$, или $v = 0$. Непрерывная зависимость v от u следует из соотношения (4.43). По определению (4.42)

$$v = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathcal{K}^m \right) u = \frac{u}{1 - \mu \mathcal{K}}.$$

Резольвентным называется такой оператор $\mathcal{R}$, что $v = u + \mu\mathcal{R}u$, следовательно, $1 + \mu\mathcal{R} = \frac{u}{1+\mu\mathcal{K}}$.

4.186. $u(x) = 1 - 2x + 3x^2$.

4.187. $u(x) = e^{-x} + \sin x$.

4.188. $u(x) = \cos 5x$.

4.189. $u(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{1-\mu} q \int_0^x f(x)\,dx + f(x), & \mu \neq 1, \\ C + f(x), & \mu = 1,\ \int_0^1 f(x)\,dx = 0, \\ \text{нет решений}, & \mu = 1,\ \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0. \end{cases}$

4.190. $u(x) = \begin{cases} \frac{\mu\,(1+2a)}{4+\mu(2-\pi)}\, arctg\, x + x^2 + a, & \mu \neq \frac{4}{\pi-2}, \\ x^2 - \frac{1}{2} + C\, arctg\, x, & \mu = \frac{4}{\pi-2},\ a = -\frac{1}{2}, \\ \text{нет решений}, & \mu = \frac{4}{\pi-2},\ a \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

4.191. $u(x) = \begin{cases} \frac{\mu\,(a+2)}{2+\mu(2-\pi)}\, arcsin\, x + ax + 1, & \mu \neq \frac{2}{\pi-2}, \\ C\, arcsin\, x - 2x + 1, & \mu = \frac{2}{\pi-2},\ a = -2, \\ \text{нет решений}, & \mu = \frac{2}{\pi-2},\ a \neq -2. \end{cases}$

4.192. $u(x) = \begin{cases} \frac{\mu\,\pi\,(2+a)}{2(1-\mu)}\, \sin x + 4x + a, & \mu \neq 1, \\ C \sin x + 4x - \pi, & \mu = 1,\ a = -\pi, \\ \text{нет решений}, & \mu = 1,\ a \neq -\pi. \end{cases}$

4.193. $u(x) = \begin{cases} \frac{\mu\,\pi\,(\pi+2a)}{2-\mu\pi}\, \cos^2 x + x + a, & \mu \neq \frac{2}{\pi}, \\ C \cos^2 x + x - \frac{\pi}{2}, & \mu = \frac{2}{\pi},\ a = -\frac{\pi}{2}, \\ \text{нет решений}, & \mu = \frac{2}{\pi},\ a \neq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

4.194. $u(x) = \begin{cases} x^5, & \mu \neq \frac{1}{\sqrt{\pi} erf 1}, \\ C\, e^{-x^2} + x^5, & \mu = \frac{1}{\sqrt{\pi} erf 1}. \end{cases}$

4.195. $u(x) = \begin{cases} \sin x, & \mu \neq -\frac{1}{2}, \\ \sin x + C \cos x, & \mu = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

4.196. $u(x) = \begin{cases} \frac{5\mu+3-\frac{5}{2}x^2(6\mu+3}{4\mu+3}, & \mu \neq \frac{2}{3}, \pm\frac{3}{4}, \\ \frac{19}{17} + Cx - \frac{105}{34}x^2, & \mu = \frac{2}{3}, \\ C + \frac{1}{5} - (C + \frac{1}{5})x^2, & \mu = \frac{3}{4}, \\ \text{нет решений}, & \mu = -\frac{3}{4}. \end{cases}$

4.197. $u(x) = 1$.

4.198. $u(x) = p \ln x - \frac{105}{2}x^2 x + 50x$.

4.199. $u(x) = \begin{cases} Cx^2 - \frac{5}{9}\left(\frac{C}{3} + \frac{10}{11.}\right)\ln^2 x - 4x + \frac{133}{33}, & a = \frac{133}{33}, \\ \text{нет решений}, & a \neq \frac{133}{33}. \end{cases}$

4.200. $u(x) = \frac{1}{12}\ln^2 x + \frac{1}{3}\ln x + x - \frac{1}{4}$.

4.201. $u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi}\sin x - \frac{4}{3\pi}\sin 3x, & \mu \neq \frac{4}{\pi}, \\ 1 + C_1 \sin x + C_2 \sin 3x, & \mu = \frac{4}{\pi}. \end{cases}$

4.202. $u(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{\mu+1}, & \mu\neq-\frac12,-1\\ Cx+(2+\frac{\pi^2C}{3})\sin x, & \mu=-\frac12,\\ \text{нет решений}, & \mu=-1.\end{cases}$

4.203. $u_1(x)=0,\ u_2(x)=\frac{1}{2\mu},\ u_{3,4}=\frac{3}{8\mu}(1\pm x).$

4.204. $u_1(x)=\frac35\cos x,\ u_{2,3}(x)=\frac15(3\cos x\pm4).$

4.205. $u(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{\sqrt{\pi}-\mu}, & \mu\neq\sqrt{\pi},\\ \text{нет решений}, & \mu=\sqrt{\pi}.\end{cases}$

4.206. $u(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[4]{e}\sin x}{2\sqrt[4]{e}-\mu\sqrt{\pi}}+2x, & \mu\neq\frac{2\sqrt[4]{e}}{\sqrt{\pi}},\\ \text{нет решений}, & \mu=\frac{2\sqrt[4]{e}}{\sqrt{\pi}}.\end{cases}$

4.207. $u_1(x)=\frac35\cos x,\ u_{2,3}(x)=\frac15(3\cos x\pm4).$

4.208. 1) $u(x,y)=-g^{\tau}(y)A^{-1}(x)g(x),\ \ A=I+H,\ \ I$ — единичная матрица, H — матрица с элементами $h_{ij}=\int\limits_x^\infty g_i(s)g_j(s)\,ds,\ \ g$ — вектор-столбец с компонентами g_i; если $y=x$, то $u(x,x)=\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx},\ \ \Delta=det\,A$;

2) $u(x,y)=\overline{g}^{\tau}(y)A^{-1}(x)\overline{g}(y),\ \ A=I+H\overline{H},\ \ H$ — матрица с элементами $h_{ij}=\int\limits_x^\infty g_i(s)\overline{g}_j(s)\,ds,\ \ u(x,x)=\overline{g}^{\tau}(x)A^{-1}(x)\overline{g}(x)$;

3) $u(x,y)=-\overline{g}^{\tau}(y)A^{-1}(x)\overline{H}(x)g(x),\ \ u(x,x)=\frac{1}{2\Delta}\frac{d\Delta}{dx},$ A и H те же, что и в предыдущем пункте.

Решение п.1. Структура уравнения (4.33)

$$u(x,y)=-\sum_{j=1}^{n}g_j(y)\left(g_j(x)+\int_x^\infty u(x,s)g_j(s)\,ds\right)$$

подсказывает вид решения

$$u(x,y)=\sum_{j=1}^{n}v_j(x)g_j(y). \tag{4.44}$$

Если $u(x,y)$ в форме (4.44) подставить в (4.33), то требование равенства нулю коэффициентов при $g_j(y)$ порождает систему линейных алгебраических уравнений

$$v_i(x)+g_i(x)+\sum_{j=1}^{n}v_j(x)\int_x^\infty g_i(s)g_j(s)\,ds=0,\quad i=1,2,3,\ldots,n,$$

или в матричной форме

$$A\,v=-g. \tag{4.45}$$

Таким образом, если функция $u(x,y)$, определенная выражением (4.44), удовлетворяет уравнению (4.33), то $v(x)$ — решение уравнения (4.45). Непосредственной подстановкой проверяется справедливость обратного

утверждения. Следовательно, уравнения (4.45) и (4.33) эквивалентны. Матрица H — положительно определенная, так как для любого вектора $p(x)$

$$p^{\tau}(x)H(x)p(x) = \sum_{i,j=1}^{n} p_i(x)h_{i,j}p_j(x) = \\ = \int_x^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} p_i(x)g_i(s)p_j(x)g_j(s)\,ds = \int_x^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x)g_i(s) \right)^2 ds \geq 0.$$

Отсюда следует, что $det\,A = \Delta \neq 0$. Иначе, уравнение $(I + H)p = 0$, или, что то же самое, $Hp = -p$, имело бы нетривиальное решение $p \neq 0$, соответствующее отрицательному собственному значению -1. Таким образом, уравнение (4.45) имеет единственное решение $v(x) = -A^{-1}(x)g(x)$, которое определяет единственное решение $v(x) = -g^{\tau}(y)A^{-1}(x)g(x)$ уравнения (4.33). При $y = x$

$$u(x,x) = -g^{\tau}(x)A^{-1}(x)g(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} g_i(A^{-1})_{ij}g_j = \\ = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dh_{ij}}{dx}(A^{-1})_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{h'_{ij}A_{ij}}{\Delta} \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx}.$$

Указание к п.3. $u(x,x) = -\overline{g}^{\tau}(x)A^{-1}(x)\overline{H}(x)g(x) = -\sum_{i,k,l=1}^{n} \overline{g}_i(A^{-1})_{ik}\overline{h}_{kl}g_l =$

$= \sum_{i,k,l=1}^{n} (A^{-1})_{ik}\overline{h}_{kl}h'_{li}tr(A^{-1}\overline{H}H') = \frac{1}{2}tr[(\overline{H}H)'A^{-1}] = \frac{1}{2}tr(A'A^{-1})$.

4.209. 1. $\nu(M) = \frac{1}{4\pi^2 r_0} \int_S f(M)\,ds - \frac{1}{\pi}f(M)$. 2. $\nu(M) = C + \frac{1}{\pi}f(M)$.

Указание. Если $P, Q \in S$, то $r_{P,Q} = -2r_0 \cos\varphi_{PQ}$.

4.210. $\mu_1 = \frac{1}{\pi}$, $u_1(x) = sinx + \cos x$,
$\mu_2 = -\frac{1}{\pi}$, $u_2(x) = \sin x - \cos x$.

4.211. $\mu = 6$, $u(x) = x^2 - x$.

4.212. $\mu_1 = 1$, $u_1(x) = x + \frac{\pi^3}{9}\cos x$,
$\mu_2 = -\frac{1}{2}$, $u_2(x) = \cos x$.

4.213. $\mu_1 = 1$, $u_1(x) = 3x^2 + \ln x$,
$\mu_2 = -\frac{10}{17}$, $u_2(x) = 12x^2 - 5\ln x$.

4.214. $\mu_{1,2} = \frac{4}{\pi}$, $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \cos 3x$.

4.215. $\mu_1 = -\frac{3}{4}$, $u_1(x) = x$,
$\mu_{2,3}\frac{3\sqrt{5}}{8}(-\sqrt{5} \pm 3)$, $u_{2,3}(x) = \sqrt{5}x^2 \pm 1$.

4.216. $\mu_1 = \frac{3}{16}$, $u_1(x) = x^2 + 1$,
$\mu_{2,3} = -\frac{3}{2}$, $u_2(x) = x$, $u_3(x) = 2x^2 - 1$.

4.217. $\mu_1 = \frac{2}{\pi}$, $u_1(x) = 1$,
$\mu_2 = \frac{4}{\pi}$, $u_2(x) = \cos 2x$,
$\mu_3 = -\frac{4}{\pi}$, $u_3(x) = \sin 2x$.

4.218. $\mu_1 = \frac{2}{\pi+1}$, $u_1(x) = 1$,
$\mu_{2,3} = \pm\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$, $u_{2,3}(x) = \sin 4x \pm \sqrt{2}\cos 4x$.

4.219. $\mu_1 = \frac{1}{6}$, $u_1(x) = sh\,1\,sh\,x + \frac{6\,sh\,1}{7\,e}x + 3$,
$\mu_2 = \frac{3}{4}$, $u_2(x) = x$.

4.220. $\mu = 2$, $u(x) = 1$.

4.221. $\mu_{1,2} = \pm 1$, $u_{1,2}(x) = \pi \pm 4x + 8\cos x$.

4.222. $\mu_1 = \frac{2}{\pi}$, $u_1(x) = 1 + 3\cos 2x$,
$\mu_{2,3} = \frac{6}{3\pi \pm 2\sqrt{22}}$, $u_{2,3}(x) = 3 \pm \sqrt{22}\,\sin x - 2\,\cos 2x$.

4.223. $\mu_{1,2} = \pm\frac{5}{84}$, $u_{1,2}(x) = 15\,\sin x \pm 21\,\sin 2x - 8\,\sin 3x$.

4.224. $\mu_n = \frac{4+\pi^2(2n+1)^2}{4\,ch\,1}$, $u_n(x) = \sin\pi(n+\frac{1}{2})x$, $n \in \mathbf{N_0}$.

4.225. $\mu_n = \frac{1-\pi^2 n^2}{\sin 1}$, $u_n(x) = \cos \pi n x$, $n \in \mathbf{N}_0$.

4.226. $\mu_n = 1 + \alpha_n^2$, $u_n(x) = \cos\alpha_n x$, $\alpha_n > 0$ — корень уравнения $ctg\,\alpha = \alpha$. **4.227.** $\mu_n = \frac{n^2}{8\pi}$, $u_n(x) = \sin\frac{\pi n}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)$, $n \in \mathbf{N}$.

4.228. $\mu_0 = \frac{1}{\pi^3}$, $u_0(x) = e^{\frac{x}{\pi}}$, $\mu_n = -\frac{n^2}{\pi}$, $u_n(x) = \sin nx + \pi n\cos nx$, $n \in \mathbf{N}$.

4.229. $\mu_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 1$, $u_n(x) = e^{-x}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, $n \in \mathbf{N_0}$.

4.230. $\mu_n = \frac{2n+1}{4\pi\alpha_n^2}$, $u_n(s) = Y_n^m(s)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$, $n \in \mathbf{Z}$.
Указание. Применить производящую функцию и теорему сложения.

4.231. $\mu_n = \frac{2n+1}{4\sqrt{2}\pi}$, $u_n(s) = Y_n^m(s)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$, $n \in \mathbf{N_0}$.

4.232.
$$\begin{cases} \mu \neq \frac{n^2}{8\pi}, & u(x) = \frac{\sin x}{1-2\pi\mu}, \ n \in \mathbf{N}, \\ \mu = \frac{n^2}{8\pi}, & u(x) = \frac{4\sin x}{4-n^2} + C\sin\frac{n}{2}(x+\pi), \ n \in \mathbf{N}, n \neq 2, \\ \mu = \frac{1}{2\pi}, & \text{нет решений.} \end{cases}$$

4.233.
$$\begin{cases} \mu \neq (2n+1)^2, & u(x) = \frac{9\,\sin 3x}{9-\mu}, \ n \in \mathbf{N_0}, \\ \mu = (2n+1)^2, & u(x) = \frac{9\,\sin 3x}{9-(2n+1)^2} + C\,\sin(2n+1)x, \ n \in \mathbf{N_0}, \ n \neq 1, \\ \mu = 9, & \text{нет решений.} \end{cases}$$

4.234.
$$\begin{cases} \mu \neq \frac{1}{\pi^3}, \ \mu \neq -\frac{n^2}{\pi}, & u(x) = \frac{\sin x + \pi\cos x}{1+\pi\mu}, \ n \in \mathbf{N}, \\ \mu = \frac{1}{\pi^3}, & u(x) = Ce^{\frac{x}{\pi}} + \frac{\pi^2}{\pi^2+1}(\sin x + \pi\cos x), \\ \mu = -\frac{n^2}{\pi}, \ n \geq 2, & u(x) = C(\sin nx + \pi n\,\cos nx) + \frac{1}{1-n^2}(\sin x + \pi\cos x). \\ \mu = -\frac{1}{\pi} & \text{нет решений.} \end{cases}$$

4.235. $u(x) = x + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2nx}{n^3}$.

4.236. $U(x)=1-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_{0n}x)}{\mu_{0n}(1+\mu_{0n}^2)J_1(\mu_{0n})}$.

4.237. $u(s)=f(s)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n}\frac{f_{nm}Y_n^m(s)}{n+\alpha}$. Указание. См. задачу 4.231.

4.238. $u(\theta)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}+\frac{\alpha}{t}\ln\frac{t-\cos\theta+\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}{1-\cos\theta}$.

4.239. $u(s)=\frac{u_0(2n+1)Y_n^m(s)}{2(n+1)}$. **4.240.** $u(s)=\frac{u_0}{28}\left(\frac{5}{6}Y_2^2(s)+\frac{3}{25}Y_n^m(s)\right)$.

4.241. $u(s)=f(s)+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n}\frac{1}{n}f_{nm}Y_n^m(s)+C$ при условии $\int\limits_{S_1}f\,ds=0$.

4.242. $u(s)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n}(2n+1)f_{nm}Y_n^m(s)$.

4.243. $u(\theta)=\frac{\alpha(1-t^2)}{4\sqrt{2}\pi(1+t^2-2t\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$. **4.244.** $u(x)=(1+\frac{4}{15}x^2)\sqrt{x}$.

4.245. $u(x)=xe^x-\sin x$. **4.246.** $u(x)=(1+\frac{2}{3}x)\sqrt{x}$.

4.247. $u(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\,e^{\frac{t}{2}}+\frac{2}{3}e^{-t}$. **4.248.** $u(x)=(1-\frac{4}{3}x)\sqrt{x}e^{-x}$.

4.249. $u(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left(x^{-\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}\right)$. **4.250.** $u(x)=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^{-\frac{1}{4}}$. **4.251.** $u(x)=\sin x$.

4.252. $u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^x\,erf(\sqrt{x})$. **4.253.** $u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}e^x\,erf(\sqrt{2x})$.

4.254. $u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,erf(\sqrt{x})$. **4.255.** $u(x)=\sqrt{\pi}e^x\,erf(\sqrt{x})-\sqrt{x}$. **4.256.** $u(x)=e^{-x^2}$.

4.257. $u(x)=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-x}+(2x+1)erf\sqrt{x}$. **4.258.** $u(x)=x\sin x$.

4.259. $u(x)=4xe^{-x^2}$. **4.260.** $u(x)=xJ_1(x)+\sin x$. **4.261.** $u(x)=J_0(x)-xJ_1(x)$.

4.262. $u(x)=3(\,ch\,x-1)$. **4.263.** $u(x)=\sin x$. **4.264.** $u(x)=\cos x$.

4.265. $u(x)=\frac{125}{8}e^{\frac{5}{2}x}-8e^x+\frac{9}{8}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$. **4.266.** $\Phi(u)=\frac{Q_0}{\Sigma_s(u)}(1+\delta(u))$.

4.267. $u(x)=ch\,x$. Указание. Применить (3.42). **4.268.** $u(x)=1$. Указание. Применить (3.43). **4.269.** $u(x)=x^2$. Указание. Применить (3.43).

4.270. $u(x)=x$. Указание. Применить (3.43). **4.271.** $u(x)=x\sin x$. Указание. Употребить соответствие (3.44). **4.272.** $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$.

Указание. Замена $y-a=\tau$ и обозначения $x-a=t$, $u(y)=u(\tau+a)=v(\tau)$, $f(x)=f(t+a)=g(t)$ преобразуют уравнение к виду: $\int\limits_0^t\frac{\cos\alpha\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{t-\tau}}v(\tau)d\tau=g(t)$.

Изображение решения $V(p)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\frac{\alpha^2}{4p}G(p)=\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\frac{\alpha^2}{4p}(pG(p)-g(0))$, где $g(0)=0$ (следует из уравнения для v). Оригинал $v(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}g'(t-\tau)d\tau=$

$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^t\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{t-\tau}}g(\tau)d\tau$. Остается возвратиться к старой переменной и

прежним обозначениям. **4.273.** $u(x)=\frac{2}{\pi\alpha}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_a^x\frac{\cos\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$.

4.274. $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{\cos\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$. **4.275.** $u(x)=\frac{2}{\pi\alpha}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_a^x\frac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$.

4.276. $u(x)=\frac{2}{\pi\alpha}e^{\beta x}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_a^x e^{-\beta y}\frac{\cos\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$.

4.277. $u(x)=\frac{2}{\pi\alpha}e^{\beta x}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_a^x e^{-\beta y}\frac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}f(y)dy$.

4.278. $u(x)=(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2)\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))f(y)dy$. Другая форма ответе: $u(x)=(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2)^2\int\limits_a^x(x-y)J_0(\alpha(x-y))f(y)dy$.

4.279. $u(x)=(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2)\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))f(y)dy$.

4.280. $u(x)=(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2)^2\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))g(y)dy$, $g(x)=\int\limits_a^x f(y)dy$.

4.281. $u(x)=\frac{1}{\alpha}(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2)\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))f(y)dy$.

4.282. $u(x)=\frac{1}{3\alpha}(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2)^3\int\limits_a^x J_0(\alpha(x-y))g(y)dy$, $g(x)=\int\limits_a^x f(y)dy$.

4.283. $u(x)=1$, $v(x)=-ch\,x$. Указание. Использовать соотношения (3.43) и (3.44). **4.284.** $u(x)=I_0(2\sqrt{x})-1$. **4.285.** $u(x)=1-J_0(2\sqrt{x})$.

4.286. $u(x)=\frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$. **4.287.** $u(x)=\frac{2}{3\pi}\left(\frac{ch\,2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-sh\,2\sqrt{x}\right)$.

4.288. $u(x)=\frac{3\sqrt{3}}{20\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\sqrt[3]{x}J_{-\frac{2}{3}}(2\sqrt{x})-1}{\sqrt[3]{x^2}}$. **4.289.** $u(x)=-2$. **4.290.** $u(x)=2x$.

4.291. $u(x)=e^x$. **4.292.** $u(x)=\sin x$. **4.293.** $u(x)=\cos x$. **4.294.** $u(x)=sh\,x$.

4.295. $u(x)=J_1(x)$. **4.296.** $u(x)=I_1(x)$. **4.297.** $u(x)=\pm\frac{2\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{1}{4})}\sqrt[4]{\pi x}$.

4.298. $u(x)=\pm\frac{sh\,x}{x\sqrt{2\pi x}}$. **4.299.** $u(x)=1$. **4.300.** $u(x)=x\,e^x$. **4.301.** $u(x)=x$.

4.302. $u(x)=\mathcal{E}rf(\pm\sqrt{x})$. **4.303.** $u(x)=4$. **4.304.** $u(x)=I_0(x)\,e^x$.

4.305. $u(x)=1-x$. **4.306.** $u(x)=e^x-1$. **4.307.** $u(x)=J_0(x)\,e^x$.

4.308. 1)$u(x)=\pm\sqrt{A}\frac{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}x^{\frac{\alpha-1}{2}}$; 2)$u(x)=\pm\sqrt{A}\frac{e^{\beta x}}{\sqrt{\pi x}}$;

3)$u(x)=\pm\sqrt{A}\frac{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{\beta x}$; 4)$u(x)=\pm\sqrt{A\alpha}J_0(\alpha x)$;

5)$u(x)=\pm\sqrt{A\alpha}I_0(\alpha x)$; 6)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{J_0(\alpha y)dy}{\sqrt{x-y}}$;

7)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{I_0(\alpha y)dy}{\sqrt{x-y}}$; 8)$u(x)=\pm\sqrt{A\alpha}J_0(\alpha x)e^{\beta x}$;

9)$u(x)=\pm\sqrt{A\alpha}I_0(\alpha x)e^{\beta x}$; 10)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}e^{\beta x}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{J_0(\alpha y)dy}{\sqrt{x-y}}$;

11)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}e^{\beta x}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{I_0(\alpha y)dy}{\sqrt{x-y}}$; 12)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\sqrt{\pi}}}2^{-\frac{7}{8}}\alpha^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{8}}J_{-\frac{1}{4}}(\alpha\sqrt{\frac{x}{2}})$;

13)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\sqrt{\pi}}}2^{-\frac{7}{8}}\alpha^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{8}}I_{-\frac{1}{4}}(\alpha\sqrt{\frac{x}{2}})$;

14)$u(x)=\pm\sqrt{B}e^{\beta x}\big(\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\alpha x}+\alpha\,erf\sqrt{\alpha x}\big)$, $\alpha=\frac{A}{B}$;

15)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\Gamma)\alpha)}}\big(\frac{\alpha B}{A}\big)^{\frac{1}{2}}x^{\alpha-1}e^{-\alpha x}\Phi(-\frac{1}{2},\alpha,\frac{\alpha Bx}{A});;$

16)$u(x)=\pm\sqrt{\frac{A}{\Gamma)\alpha)}}\big(\frac{\alpha B}{A}\big)^{\frac{1}{2}}x^{\alpha-1}\Phi(-\frac{1}{2},\alpha,\frac{\alpha Bx}{A})$;

4.309. $u(x)=-\frac{1}{\pi}\int_x^\infty\frac{f'(y)\,dy}{\sqrt{y-x}}$. Указание. Сделать замену $y=1/\xi$.

4.310. $u(x)=-\frac{2x}{\pi}\int_x^\infty\frac{f'(y)\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$. Указание. Замена $y=\sqrt{\xi}$ приводит данное уравнение к предыдущему. **4.311.** $u(x)=-\frac{1}{\pi}\int_x^\infty\frac{f'(y)\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$. Указание. Уравнение $2\int\limits_0^\infty u(\sqrt{x^2+y^2})\,dy=f(x)$ сводится к предыдущему заменой $\sqrt{x^2+y^2}=\xi$. **4.312.** $u(x)=e^x(1-\frac{1}{\sqrt{2}}erf\sqrt{x})$.

4.313. $u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-2\sqrt{x}}-arctg\sqrt{x}$. **4.314.** $u(x)=2x^{-\frac{3}{4}}$. **4.315.** $u(x)=\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

4.316. $u(x)=2e^{-x}$. **4.317.** $u(x)=\cos x$. **4.318.** $u(x)=1$.**4.319.** $u(x)=\frac{J_0(x)}{1-\mu}$.

4.320. $u(x)=\frac{x^2}{2}+\sqrt{\pi}\,x+1$. **4.321.** $u(x)=\eta(x-\alpha)$.

4.322. $u(x)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{|\sqrt{x}-\sqrt{a}|}$. Указание. Для преобразования интеграла ввести функцию $v(x)=xu(x)$ и применить теорему умножения (3.58).

4.323. $u(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{x}+1}{|\sqrt{x}-1|}$. **4.324.** $u(x)=-\frac{\ln|x-1|}{\pi x}$. **4.325.** $u(x)=\ln|x^4-1|$.

4.326. $u(x)=\frac{\ln|x-1|}{\sqrt{x}}$. Указание. Записать уравнение в виде:

$$v(x)=\ln|x^2-1|-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}v(y)}{1+\frac{x}{y}}\frac{dy}{y},\qquad v(x)=\sqrt{x}u(x).$$

4.327. $u(x)=\eta(1-x)\ln x$. Указание. Записать интеграл в виде:

$$-\int\limits_0^\infty\eta(1-\tfrac{x}{y})\ln\tfrac{x}{y}u(y)\tfrac{dy}{y}.$$

4.328. $u(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\ln(x+1)$. См. указание к предыдущей задаче.

4.329. $u(x)=\eta(x-1)$. Указание. См. задачу 3.168, п.1.

4.330. $u(x)=-\frac{\sqrt{x}}{\pi(x+1)}$. **4.331.** $u(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

4.332. $u(x)=\frac{1}{1+x}$. **4.333.** $u(x)=2e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$.

4.334. $u(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\sqrt{\pi}e^{-x}$. **4.335.** $u(x)=\frac{A}{\pi}\sqrt{\frac{a}{x}}\frac{1}{a+x}$. Указание. Из уравнения вычесть это же уравнение при $x=0$.

4.336. Указание. Для построения решения нужно осуществить следующие действия: 1) проинтегрировать уравнения системы по y:

$$f_i(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_i(y)\,dy, \;\; i = 1, 2;$$

2) применить преобразование Фурье:

$$F_i(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i(x) e^{-i\,\lambda\,x} dx, \;\; i = 1, 2;$$

3) решить линейную систему алгебраических уравнений относительно $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$; 4) определить $f_1(x)$ и $f_2(x)$ посредством обратного преобразования Фурье; 5) выразить $E_1(r)$ через $f_1(x)$ (см. задачу 4.311).

4.337. 1) $f(t)=C\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{k\,\Gamma(2\alpha+1)}$; 2) $f(t)=\frac{C}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}\right)$; 3) $f(t)=\frac{2C_1}{3\omega}\left(1-\cos\frac{\omega t}{2}\right)$.

Указания. 1) Применить интегральное преобразование Лапласа; 2),3) Дифференцированием свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Горюнов Анатолий Федорович

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть I

Учебное пособие

Редактор Н.В. Егорова

Подп. в печать 01.10.2008. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 38,5. Печ. л. 38,5. Тираж 150 экз.
Изд. № 4/116. Заказ №

Московский инженерно-физический институт (государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

Типография издательства „Тровант".
г. Троицк Московской обл.